FILOSOFIA

DELLE MATEMATICHE

DELL'

AB. GIUSEPPE BRAVI

MILANO 1854

COI TIPI DI ALESSANDRO LOMBARDI

a spese dell'autore

PREFAZIONE.

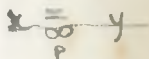
I principii di ragione sù de' quali poggia una gran parte del sapere umano si appalesano alla mente di ognuno sempre forniti della stessa identica certezza ed evidenza, e quindi riescono per chicchessia egualmente convincenti e persuasivi. A ben sguardare per entro alla natura de' medesimi noi li troviamo semplici, indecomponibili, e perciò non suscettivi di dimostrazione. Essi sono corredati di un tale splendore di vero, che non possiamo a meno di dar loro un pieno assentimento. Quali verità prime non accattano da verun altra cognizione antecedente la certezza e l'evidenza da cui sono accompagnate, ma le contengono in loro medesime, e le vanno anzi ad ogni conoscenza

dedotta che da loro dipende comunicando. Tali principii non hannosi a tenere il patrimonio esclusivo di una qualche scienza particolare, ma sibbene il retaggio comune di ogni ramo razionale del sapere umano. Sù de' medesimi troviamo stabilite non solo le più elevate parti della filosofia speculativa, ma anche tutto l'edificio delle matematiche pure. In forza quindi di una sì fatta identità di base, la scienza del geometra può per tal capo esser tradotta nel campo della filosofia razionale, e con questa venire unizzata. Onde pertanto determinare il grado di certezza e di evidenza inerenti alle verità matematiche, le quali poggiano sopra basi razionali od ipotetiche, hannosi ad usare quelle stesse identiche norme che si impiegano nelle metafisiche discipline. Volendo noi quindi trattare delle dottrine matematiche a fine di ben determinare l'esattezza più o men rigorosa che presentano i diversi metodi sino ad ora impiegati nell'esporre le varie parti delle medesime, quasi a pietra di paragone ci atterremo alla scorta dei principii razionali, per lo che abbiamo intitolato questo scritto Filosofia delle Matematiche.

I Greci e gli antichi Italiani coltivarono con amore l'aritmetica e la geometria, e se non ne furono in tutto gli inventori, contribuirono in modo eminente all'incremento di esse. Dopo i secoli di barbarie, in un con lo studio delle altre scienze si riprese anco quello delle matematiche discipline. Appresso fu inventata l'algebra la quale essendo in breve tempo pervenuta a grande perfezione, venne utilmente impiegata nella dimostrazione di molti antichi geo-

metrici trovati rendendoli e precisi e meglio universali. Finalmente la scoperta dell'analisi sublime, o del calcolo infinitesimale allargò per modo il campo delle matematiche, che i veri dell'antica geometria, e quelli altresì rinvenuti coll'analisi finita apparvero ben poca cosa in paraggio dei trovati cui si pervenne colle nuove dottrine. Newton e Leibnitz ai quali comunalmente si devolve l'onore di una tale scoperta, fondarono l'analisi infinitesimale sopra il principio: che, due grandezze le quali non differiscono tra sè stesse che per una quantità infinitamente piccola, sono fra loro eguali. *Ma il fatto stà che l'onore dell'invenzione di un tale principio non compete nè all'uno nè all'altro dei due prefati e grandi geometri, ma sibbene al nostro Galei, e prima di Newton e di Leibnitz era di già stato vantaggiosamente usato da Keplero, da Wallis, da Fermat, da Barrow e da altri.*

L'esattezza di un tale principio, sin dal momento in cui si incominciò ad usarlo nell'analisi infinitesimale, venne però richiamata in dubbio da valentissimi ingegni, e molti di essi accamparono anche gravissime difficoltà contro dello stesso. A fine di evitare tali obbiezioni Alembert, Eulero e Lagrangia, ebbero ricorso ad altre dottrine.

Il primo di questi, al prefato principio, sostituiva il metodo dei limiti, già inventato ed adoperato da Archimede. Il secondo di essi allo invece trasmutava le grandezze ideali infinitamente piccole di Newton e di Leibnitz in grandezze ideali evanescenti, trovate ed impiegate esse pure dal prelodato geometra di Siracusa. Il terzo per ultimo

bandiva le quantità infinitamente piccole, ed in vece di queste si faceva ad usare delle sole grandezze finite.

All'appoggio dell'autorità di sì gran nomi i matematici appigliaronsi in seguito all'uno od all'altro di sì fatti metodi differenti, ritenendosi da taluni più esatto l'uno, e da altri l'altro secondo che meglio ad essi talentava.

In mezzo a tanta discrepanza di opinioni concernenti la parte principale delle scienze esatte, nessun matematico si è assunto l'incarico di porgere un'esatta analisi dei principii antichi e recenti sù de'quali vennero sino ad ora basate, e di confrontarli infra di loro per quello concerne il grado di rigore e di esattezza ad essi inerente. A dir vero il polacco Wronski nella sua opera impressa a Parigi nel 1814 col titolo: Philosophie de l'infini, *s'accinse a dare un ragguaglio dei varii principii ammessi dai matematici e dei metodi da questi impiegati nel trattare la loro scienza; ma senza pericolo di andar errati possiamo asserire, che per più capi il suo lavoro non solo è manchevole ma difettoso ed erroneo; per lo che devesi ritenere manchi tuttora un'opera in cui si dia un'analisi ragionata e completa delle diverse basi, e dei differenti modi di trattare le scienze esatte. A tal vuoto noi ci siamo studiati di supplire con questo scritto. Avremo poi pienamente raggiunta la meta che in proposito ci siamo prefissa? Se parlando delle cose proprie fosse lecito accedere a quanto l'intimo convincimento suggerisce, diremmo di sì. Ma già sappiamo che un sì fatto giudizio spetta nè a noi nè al volgo dei matematici, ma sibbene a que' pochi che nella*

scienza sono profondamente versati, giusta il detto: la scienza fu sempre paucis contenta judicibus. *Per lo che passeremo senz'altro a dar ragione del metodo che ci siam proposti in questo lavoro.*

*Noi abbiamo iniziato le nostre ricerche dall' esame dei principii usati da Euclide e da Archimede nelle loro discussioni geometriche, e riteniamo d' aver a pieno messo in chiaro, che le basi da essi impiegate rispetto alle dottrine concernenti le linee curve, sono ben lontane dal contenere quella piena certezza ed evidenza che generalmente si crede. In tale esame ci siamo pure intertenuti nel far conoscere, che la così detta prova ricavata dall'*assurdo *alla quale i geometri tanto di frequente ebbero ricorso, nelle dottrine relative alle curve e nel modo da essi impiegato, non presenta valore niuno.*

Ma l'oggetto più principale di queste nostre filosofiche investigazioni ebbe per iscopo l'esame di tutte le teoriche escogitate dai matematici intorno al calcolo sublime; ed incominciando dagli inventori di questo e venendo insino allo stato odierno della scienza abbiamo curato porre in chiaro tutti i pregi ed anco tutte le mende contenuti nelle relative loro dottrine. Nelle indagini scientifiche vuolsi all'in tutto dar bando al pregiudizio dell'autorità. Ove quindi si trattò di esporre imparzialmente il vero, non guardammo punto alla fama dell'autore, ma sibbene unicamente al merito del suo dettato. Dalla lettura di questo scritto per altro potrà ognuno molto bene comprendere, che abbiamo proceduto non solo in modo contegnoso, ma tale da fare ap-

pieno comprendere l'alta estimazione in cui teniamo il merito di quei sommi geometri il di cui nome starà ognora a caratteri indelebili scolpito nel tempio dell'immortalità.

Questo nostro scritto contiene non solo lo sviluppo dei pensamenti da altri posti innanzi in proposito, ma molte riflessioni che non ci fu dato di leggere nelle opere altrui; per lo che ne giova sperare, che abbia a riescire gradito ai cultori delle scienze esatte. Esso poi certamente tornerà utile alla gioventù che si dedica allo studio delle matematiche, giacchè troverà in esso fedelmente esposti e discussi i principii della scienza dal suo nascere insino a noi, in un coll'analisi dei varii sistemi escogitati dai principali geometri, e di quello che in proposito vuol essere accettato per vero, oppure rejetto come erroneo; per lo che essa potrà rilevare a colpo d' occhio ciò che nelle matematiche discipline merita lode o biasimo.

Tale fu lo scopo che ci siamo prefisso nell'intraprendere questo nostro lavoro. Ben lontani dal credere che esso sia nelle nostre mani riuscito al tutto esente da mende, saremo quindi disposti ad accettare in proposito quelle osservazioni di coloro che, veramente dotti nella scienza accennarono di buona fede ciò che in esso trovasi o no consenziente al vero. Ma rispetto a quelli che o nuovi Ardellioni nella scienza o predominati del pregiudizio dell'autorità calcolano il merito delle dottrine, dal nome dello scrittore e non dalla sostanza dell' opera, ed estimano temerità nel rivocare in dubbio l' esattezza di un dettato per questo solo che n'è autore un celebre scrittore, ossive-

ro, all'uso degli inscienti gazzettieri, nel dar ragguaglio delle opere che vengono alla luce si limitano a lode od a biasimo puramente generali senza venire al particolare, dichiariamo sin d'ora di non curarcene punto e ci guarderemo mai sempre dal prendere la penna in mano per fare ad essi anco la benchè minima risposta.

CAPITOLO PRIMO

1. Ogni filosofia che l'uomo può rinvenire nelle matematiche tutta si fonda e per intiero sta riposta nei principii che i geometri ammettono ed assumono per fondamento della loro scienza. Ogni aperta evidenza, ed ogni perfetta certezza provengono dal principio evidente di nostra ragione, detto anche principio di *identità*, o di *contradizione* (1). Questo principio, come ognun sa, consiste nell' essere evidentemente impossibile, che una cosa qualunque sia e non sia nel medesimo tempo. Tale principio non è scienza, ma lume evidente dell' animo, e per ciò fondamento e base di ogni scienza evidente e dimostrativa. E perchè questo lume dell' animo risplende in tutti della più perfetta luce di evidenza che esister possa per l'uomo, così i geometri sono ricorsi e si sono sempre unicamente ap-

(1) Qui s'intende quella certezza evidente della quale ne ripugna la possibilità dell' opposto, detta anco certezza immediata, vedi *Teorica e Pratica del Probabile*, tipi Rusconi, Milano 1827, e T. I, 2.ª ediz. tipi Natali, Bergamo 1840.

poggiati a questo lume ogni qualvolta nelle loro dimostrazioni vollero riuscire appieno persuasivi e rigorosi. Essi però compresero, che l'evidenza del ricordato principio accompagnava anco tutte le loro posizioni mentali, quali essi credettero di preporre a tutti i loro ragionamenti; osservando, che tali loro posizioni benchè ideali o ipotetiche, ritenute però inalterabilmente quali le ponevano, a queste si poteva e veniva apertamente applicato il surriferito principio, perchè anco per tali posizioni ripugnava che esse fossero e non fossero quali si erano immaginate e poste.

2. I principii sopra dei quali i geometri fondarono il grandioso edificio delle matematiche sono i seguenti, considerati quali prime e semplicissime derivazioni del suddetto principio. 1.° *Quelle cose che sono uguali ad una medesima cosa sono ancora uguali fra loro.* 2.° *Se alle cose uguali si aggiungono cose uguali, i tutti sono uguali fra loro.* 3.° *Se dalle cose uguali si traggono cose uguali, le rimanenti sono uguali fra loro.* 4.° *Se alle cose disuguali si aggiungono cose uguali, i tutti sono disuguali.* 5.° *Se dalle cose disuguali si traggono cose uguali, le rimanenti sono disuguali.* 6.° *Le cose che sono doppie di una medesima, sono fra loro uguali.* 7.° *Le cose che sono la metà di una medesima, sono fra loro uguali.* 8.° *Quelle cose che convengono e si adattano bene insieme sono uguali.* 9.° *Il tutto è maggiore della sua parte.* 10.° *Due linee rette non comprendono spazio.* Questi sono i principali principii che stanno avanti agli elementi geometrici antichi che noi abbiamo e quali furono raccolti ed ordinati dal grande geometra Euclide. In seguito ne ricorderemo anche degli altri. Portando frattanto attenta riflessione sopra i ricordati principii si comprende chiaramente, che i primi sette ed il nono, sono prime ed immediate induzioni del principio d'identità, già ricordato nel numero precedente, quindi chiari, semplici

ed evidenti. L'ottavo ed il decimo sono assiomi o principii non appieno evidenti, e che perciò immediatamente non derivano dal suddetto principio di identità, ma all'invece sono concetti non molto chiari, e dei quali si terrà ragionamento in progresso. I su citati assiomi o principii premessi dal grande geometra Euclide ai suoi elementi di matematica, sono qui da noi riportati quali li traduce il celebre matematico Comandino il quale ha voltato nella nostra lingua il testo del greco filosofo con universale approvazione dei dotti.

3. Euclide fa precedere ai suoi elementi, oltre i riferiti principii, delle *definizioni*, dei *postulati*, e delle *dimande*. Trattandosi di un libro che trovasi a mano di tutti basterà in seguito citare quelle sole di tutte le sue posizioni che meritano particolare esame.

4. Accenneremo ancora, ed in via incidentale, che i modi di dimostrazione usati dagli antichi geometri sono di due maniere. Uno quando il ragionamento parte dai primi evidenti principii e direttamente procede innanzi sempre accompagnato dalla loro evidenza. L'altro quando l'assunto posto, distrugge i principii evidenti ammessi e ritenuti. Quest'ultimo modo fu detto argomentare dall'assurdo. Gli antichi esprimevano generalmente quest'ultimo genere di argomentazione con le seguenti espressioni: *est enim deductio ad impossibile, assumptio ejus, quod quæsito contradicit, tamquam concesso, per consequentia ad id quod vero concesso opponitur.*

5. Ma incominciamo dall'osservare cosa siano gli assiomi, i postulati, le definizioni, ecc.

Gli assiomi sono verità evidenti per sè stesse, o prime e spontanee illazioni del principio d'identità, fonte d'ogni evidenza. I postulati o le dimande, sono concetti o nozioni chiare e facili, che il geometra esige gli siano concessi,

quasi fossero altrettanti principii chiari ed evidenti; e ciò tanto se contengano qualche massima, quanto se esprimano qualche facilissima operazione da eseguirsi.

Le definizioni sono alcuni concetti semplici o nozioni elementari prime, che il geometra considera quali basi o posizioni fondamentali; e circa queste non occorre altro se non di osservare, che siano chiare, precise ed inalterabili.

6. Accennato succintamente il significato di queste nozioni preposte alla geometria elementare e sopra delle quali si appoggia e fonda la filosofia di essa, portiamo la nostra riflessione sopra alcune di tali nozioni a fine di comprendere, se queste abbiano le qualità volute e richieste per servire di principii razionali ed ipotetici ad una scienza esatta e rigorosissima, qual'è la matematica; cioè vediamo se queste nozioni siano appieno evidenti, facili, aperte, chiare, come vogliono e debbon'essere tutte le basi ed i fondamenti di una scienza veracemente rigorosa.

7. Euclide nell'ottavo assioma pone come cosa apertissima ed evidentissima che: *quelle cose che convengono e si addattano bene insieme sono uguali;* come si esprime la traduzione del sullodato Comandino. Campano, altro rinomato traduttore delle opere di Euclide riferisce lo stesso assioma in quest'altra sentenza: *si aliqua res alicui superponatur, appliceturque ei, nec excedat altera alteram, illæ sibi invicem erunt æquales.* Legendre, chiaro geometra francese, espone questo assioma come segue: *Deux grandeurs, ligne, surface, ou solide, sont égales lorsque étant placées l'un sur l'autre elles coyncident dans toute leur étendue.* Questo principio però benchè comunemente ammesso come evidente, tuttavia presentandosi esso in molti casi quasi un miscuglio di ragione pura e di operazione pratica o empirica, non si può avere per un principio puro ed evidente; onde appare

che per questo non meritasse (preso in tutta la latitudine del significato) di essere collocato tra gli assiomi più evidenti ed aperti. In fatti, o la soprapposizione delle due grandezze accenna a caso pratico dipendente da nostra volontaria fattura, ed in allora veste l'aspetto, anzi diviene una verificazione reale avente tutta la qualità di un fatto, il quale per sua natura è bensì irrefragabile, ma non mai dimostrabile ed appieno evidente (Teorica e Pratica del Probabile tom. 2, cap. 17); o la soprapposizione è ipotetica e razionale, ed allora si risolve in una petizion di principio, in quanto che si viene a dire, che tutto è uguale ove niuna differenza esiste nelle grandezze che si mettono in comparazione.

8. È bensì vero v. g. che una linea la quale sia collocata mentalmente sopra di un'altra, quando la prima ricopra puntualmente la seconda, cioè non riesca nè più lunga nè più corta di questa, la linea soprapposta è uguale a quella altra, sopra della quale è collocata; ma questa eguaglianza o identità di lunghezza che si manifesta a noi in forza di questa soprapposizione toglie appunto all'assioma quella naturale sua intrinseca e spontanea evidenza, che deve esso avere quale principio primo, indipendentemente da ogni verificazione, sia poi essa reale, mentale o ideale.

9. Queste poche osservazioni pare che comprovino, aver Euclide usato di qualche larghezza di ragionamento nell'aver collocato questo principio di soprapposizione fra gli assiomi più evidenti, e tanto più si appalesa questa sua larghezza, in quanto che in ogni concreto caso reale ovvero razionale la soprapposizione veste sempre l'aspetto e la forma, anzi porta seco come l'impronta d'identità verificata; il che è ben tutt'altra cosa che carattere e spiegata proprietà di un'assioma, il quale ultimo per sua natura deve sempre risplendere di luce intellettiva evidente, e ciò indipendentemente da ogni pratica o razionale operazione.

10. L'assioma decimo consiste in questa sentenza: = Due linee rette non comprendono spazio alcuno. = Esso può riescire chiaro ed evidente a quelli che sono versati negli elementi delle matematiche, e che sanno dare a questo concetto qualche chiara significazione, ma tale non si presenta a quelli che al tutto ne sono digiuni. Infatti la definizione della linea retta essendo quella di sola lunghezza, quella cioè che, come dicono, si distende egualmente fra suoi punti, ovvero quella che segna la distanza più breve che esiste tra due punti, ben si vede che la nozione della linea retta è affatto estranea allo spazio; il che vuol dire, che avvisando di far conoscere come una linea possa conterminare o rinchiudere dentro di sè stessa uno spazio, esigesi che la mente nostra si occupi del modo e delle richieste relazioni e condizioni necessarie e volute per la chiusura dello spazio.

Più, la nozione istessa che noi abbiamo dello spazio è varia secondo il diverso modo di vedere degli uomini ed è perciò molto indeterminata e di difficile rappresentazione. Anzi i filosofi non sono ancor d'accordo nel dichiarare, se positiva o negativa sia la nozione che l'uomo ha dello spazio. Male a proposito adunque si accinge Euclide ad introdurre in un'assioma un concetto costitutivo dello spazio, mentre è vago, indeterminato ed oscuro, ed insieme nulla ha di comune con le linee rette.

Inoltre la chiusura dello spazio, che qui si ritiene non potersi fare dalle linee rette, non può essere intesa se non di quello spazio che si considera disteso o collocato in un piano ideale o reale, e questa condizione è tanto necessaria e presupposta in questo assioma, che questa venendo meno, la sentenza o l'assioma diviene una proposizione senza significato. Ora questa necessaria condizione, che limita cotanto lo spazio, anzi lo riduce ad una semplice e sola rap-

presentanza superficiale o parziale di esso, non essendo stata dichiarata nè tampoco motivata da Euclide nel suo assioma, lascia che esso rimanga una sentenza oscura ed indeterminata. In fatti, ognuno deve convenire, che trattandosi dello spazio considerato secondo tutte le sue possibili dimensioni, nè due, nè tre, nè qualsivoglia numero di linee rette possono chiuderlo.

11. L'assioma decimo adunque è di tal natura, che per dargli un preciso significato o, come suol dirsi, per renderlo chiaro ed evidente conviene restringerlo, conviene rendersi famigliare, precisa e ben determinata la nozione dello spazio; più conviene non considerare che quella parte di spazio che si immagina distesa e formante un piano, o una superficie, e superficie rettilinea, le quali cose tutte quanto difficilmente possano adempiersi per le esposte ragioni, ognuno lo intende. Pare adunque che si possa conchiudere e con sicurezza, che l'assioma di cui parliamo non sia semplice, nè pienamente evidente al paro degli altri; e che per questo non sia giustamente ben collocato nel novero degli assiomi evidenti e certissimi.

Il sullodato geometra Campano traduttore delle opere di Euclide, indotto forse dalle ragioni che siam venuti esponendo, ha creduto bene di spogliare questo assioma decimo dell'onorifica veste della quale Euclide l'aveva fregiato, per indossargli quella più dimessa di semplice postulato o petizione, giudicando quest' ultima denominazione come più confacente e propria alla natura e qualità di sì fatta proposizione.

12. Meno evidente, e manco chiaro pare che sia il postulato che Euclide ha pure voluto premettere al primo libro de'suoi elementi, il quale postulato consiste in questa memorabile proposizione: = Se sopra due rette linee cadendo una terza farà gli angoli interiori e da una medesima parte mi-

nori di due retti, quelle linee prolungate in infinito congiungersi insieme da quella parte dove sono gli angoli minori di due retti. = Questa traduzione del postulato euclideo è del celebre Comandino.

13. Campano riferisce questo stesso postulato con le seguenti espressioni concepito: = Se in due linee rette, una linea retta abbattendosi faccia dalla medesima parte due angoli interni minori di due retti, è necessità che quelle due rette incontrate dalla terza prolungate all' infinito si incontrino. =

14. Questo postulato si presenta, come ognuno vede, più presto un difficile teorema, anzi che una semplice dimanda chiara ed elementare. In fatti esso si fonda sopra concetti i più elevati dell'animo nostro; e concetti tali che vincono e superano persino la nostra intelligenza istessa. E in vero chi può comprendere, anco speculando intentamente quanto si vuole, la intrinseca natura di tale dimanda? Chi può dire a sè stesso cosa sia, e quanto valga un prolungamento infinito delle linee rette? Arrogi, che in questo postulato Euclide generaleggiando in espressioni, lascia indeterminata al tutto la minoranza che i mentovati due angoli interni aver possano in comparazione di due angoli retti, e questa differenza o minoranza (elemento integrale del postulato) restando appieno indeterminata nella maniera con cui annuncia il postulato, fa che non si possa aver diritto a ricavarne veruna precisa illazione procedente dalla su citata minoranza. Anzi considerando ben bene più addentro la cosa, si vede, che questa minoranza annunciata con tutta la più larga ampiezza di espressioni, deve perciò accomodarsi a tutti i casi possibili ed escogitabili, acciò sia generalmente vero il postulato; imperciocchè se anco in un solo caso di valor determinato ed attribuito a questa minoranza non soddisfacesse pienamente il postulato, rendendolo sempre vero e precisamente vero, in allora il postulato mancherebbe a

verità, e mentirebbe sè stesso. Ora ognuno di leggieri comprende, che fra tutti i valori escogitabili e possibili, anco solo nel campo di un prolungamento finito delle linee, i valori diversi che possono attribuirsi a questa minoranza sono indefiniti nel numero, e tutti di valor diverso; e intanto niuno di tutti questi indefiniti, o infiniti valori e tutti diversi tra loro, niuno, dico, esige che il prolungamento delle due linee debba procedere sino all' infinito o ad infinita distanza perchè si tocchino o si congiungano; anzi è chiara cosa che tutti questi varii ed indefiniti valori possibili nel campo di protrazione finita assolutamente non solo esigono protraimento all' infinito, ma anzi evidentemente lo escludono.

Un solo ed unico è il valore il quale attribuito a questa minoranza rende verificato pienamente il postulato. E questo valore che attribuito, o meglio sostituito in questa minoranza, verifica pienamente il postulato è il valore infinitamente piccolo, quello cioè che renda la minoranza o la differenza infinitamente piccola. Ogni altro valore finito che si attribuisca al postulato non può avverare puntualmente il prolungamento delle linee all'infinito.

Più, se (come sarà fatto chiaro nel progresso di questa filosofia), la differenza che passa tra il valore dei due angoli interni delle linee incontrate dalla terza ed il valore dei due angoli retti, fosse infinitamente piccola, non di primo ordine, ma infinitamente piccola di secondo ordine (cioè infinitamente piccola in confronto o in comparazione alla differenza che si è di già supposta infinitamente piccola, comparata alle quantità finite) ben si comprende ed apertamente si conosce, come con tale valore attribuito alla suddetta differenza, le due linee rette incontrate dalla terza, non possano incontrarsi nè poco nè molto, anco prolungate sino all'infinito, giacchè un tal valore esige anzi un prolungamento due volte infinitamente infinito. E quando si vogliano prendere in considerazione i valori infi-

nitamente piccoli degli ordini superiori, come di terzo, di quarto, ecc, tanto più e più sempre ci scostiamo dalla verificazione del postulato, perchè sempre più conosciamo che nè anco dopo molti infiniti prolungamenti le linee non possono, toccarsi (*).

15. Per queste osservazioni innegabili si appalesa la poca, anzi la nessuna semplicità e la non aperta evidenza di questo principio; e perchè conduce l'animo e il nostro pensiero sulle vie dell'infinito impervie ed inaccessibili alla nostra speculativa intelligenza; e perchè non avverandosi il principio o postulato di cui trattasi che in un solo caso, e questo pure fuori all'in tutto dell'ordine delle grandezze finite, cioè nel solo caso che la minoranza degli angoli interni sia infinitamente poco diversa dal valore di due retti, si ha tutta ragione di conchiudere, che il postulato, quale viene annunciato da Euclide, ed in maniera generica ed appieno indeterminata, il postulato, dico, non sia nè evidente, nè tampoco vero, ma anzi in una infinità di casi al tutto manchevole e falso, e segnatamente sempre nell'ordine delle quantità finite, quali sono appunto tutte le grandezze geometriche prese in considerazione dal greco geometra.

16. Comandino fa osservare, che Proclo riteneva che al tutto il suddetto postulato si dovesse tôr via dei postulati, che è il quinto, essendo un teorema e teorema il quale lascia

(*) Forse alcuno dirà, che con questo modo di parlare Euclide ha voluto significare che nel caso anco più sfavorevole, prolungate le due linee in infinito conviene che si tocchino, perchè questa minoranza negli angoli interni è chiaro indizio che le linee incontrate sono tra di loro inclinate e disposte a toccarsi da quella parte ove gli angoli interni fatti dalla terza sono minori di due retti.

Ma questa maniera di intendere il postulato euclideo, benchè verosimilmente contenga il verace pensiero di questo grande geometra, non è per verun conto propria, nè acconcia a rendere evidente il postulato, per le ragioni suddette.

molte dubitazioni, le quali però Tolomeo in un suo libro propose di sciogliere. In fatti questo teorema per esser reso evidente con dimostrazione ha bisogno di molte definizioni e di molti altri teoremi, ed Euclide, soggiunge Comandino, ne dimostra il converso nella prop. 19, lib. 1.

17. Ma basti questo motto intorno alla natura dei postulati. Invece portiamo il nostro pensiero sopra il seguente oggetto; cioè che tanto Euclide, quanto gli altri antichi geometri anteriori ad esso e suoi contemporanei ammettevano la nozione suprema dell'infinito, e la trattavano come fosse nozione elementare, semplice e chiara.

18. Notato in via incidentale questo fatto, proseguiamo ad osservare, che nella *terza petizione* o *dimanda* messa avanti da Euclide al libro settimo de' suoi elementi, egli dice: = il numero infinitamente si accresce, ma non infinitamente si scema =; questa dimanda sicuramente non è chiara, e quello che più importa è anco poco vera. Primamente, perchè l'accrescimento di un numero all'infinito è cosa nè possibile, e manco fattibile, almeno ogni qualvolta s'intenda ciò potersi operare nelle vie note ed ordinarie, per le quali un numero aumenta e si fa maggiore realmente o razionalmente; imperciocchè qualsivoglia dato o proposto numero finito (come finito è sempre ogni assegnato o numero di unità), con ogni aumento finito che venga praticato allo stesso, non può mai diventare infinito.

19. Arrogi che anco presupposta la inamissibile ipotesi che il numero cioè potesse divenire infinito in forza di successivi aumenti (il che ripugna alla natura del numero, la quale vuole che possa sempre essere accresciuto), non esiste alcuna ragione perchè retrocedendo e riscendendo per tutti li gradi che han servito di aumento non possa essere infinitamente diminuito. Ed assoggettando qualsivoglia numero a delle diminuzioni determinate e fisse, non possa es-

sere infinitamente diminuito, e ciò anche in forza di diminuzioni e di leggi ammesse e riconosciute per vere dallo stesso Euclide come vedrassi n. 39, 40, 42, 46.

Per dare però a questa sentenza di Euclide qualche probabile esplicazione, diremo, che quel grande siasi indotto ad ammettere, che il numero non può infinitamente scemare o diminuire, pensando che tra il numero finito e l'infinito esistendo un campo infinitamente grande, l'animo ravvisa possibile questo infinito accrescimento nel numero; laddove tra il numero finito e lo zero il campo non apparendo che finito (l'animo nostro procedendo un poco alla buona), gli pare, che questo campo non ammetta che pochi passi e questi pure di non molta lunghezza e durata. Ma questo modo troppo grossolano di pensare non corrisponde a verità, come sarà palese per le dottrine esposte nel capo secondo di questa filosofia. Ma questo cenno basti per ciò che concerne la poca esattezza di questa opinione di Euclide.

20. Portiamo il nostro dire sopra le seguenti posizioni geometriche. *Il punto geometrico è quello che non ha grandezza alcuna,* ovvero *quello al quale non appartiene parte alcuna.* Altrimenti, *signum cujus pars nulla.* Comandino dopo aver dato la prima definizione del punto geometrico tolta fedelmente dal testo di Euclide, fa osservare: = che per la negazione delle parti ci ha dimostrato quale sia il punto, che è principio di tutta la materia proposta; perciò che essendo che li principii siano differenti da quelle cose delle quali essi sono li principii, ed essendo che le loro negazioni dimostrino in un certo modo la natura di quelli, non senza cagione hanno ritrovato le nozioni negative convenire ad essi principii; il che afferma Proclo con l'autorità di Parmenide. =

21. Il punto adunque senza parte, senza alcuna grandezza lo si adopera e lo si impiega per designare un sito, un

luogo qualunque delle grandezze; ma intanto si vede che la natura negativa del punto pare che mal si presti e convenga all'ufficio al quale lo si impiega. La ragione arrecata nel numero precedente dal Comandino è più presto una illusione che una verità; in fatti, se i principii delle cose sono e debbono essere sì stranamente diversi dalle cose istesse, quali si presentano in questo caso, di essere cioè al tutto negativi, come mai si possono ritenere ed appellare principii, elementi, o costitutivi primi delle cose reali o ideali? Non è egli cosa aperta che questa maniera di pensare del Comandino non regge a verun rigore?

La linea è una lunghezza senza larghezza e senza profondità.

I fini della linea sono punti.

La linea retta è quella che si distende egualmente fra li suoi punti.

La superficie è quella che solamente ha lunghezza e larghezza.

La superficie piana è quella che giace egualmente fra le sue linee.

Il solido è quello che ha lunghezza, larghezza e profondità.

La più semplice riflessione basta a farci comprendere, che *punto, linea, superficie,* ecc., sono nostre ideali posizioni, o concetti astratti e soggettivi del pensiero; sono enti intellettuali arbitrarii astrattissimi, perchè nulla di realmente sussistente può dirsi *punto* geometrico, *linea,* ecc.

22. Tuttavia non fu senza molta avvedutezza e fino accorgimento che i geometri idearono e posero queste nozioni di tanta e sì difficile astrazione; perchè il punto v. g. come ente negativo apparisce adattatissimo ad indicare il principio ed il fine di una linea o il principio ed il fine di qualsivoglia lunghezza, in modo da non lasciare nell'animo

veruna dubitazione intorno alla precisa lunghezza della linea medesima; imperciocchè se esso punto avuto avesse qualche spessore, la mente sarebbe stata costretta a ricercare in esso il vero e preciso confine della estremità della lunghezza cui veniva apposto; e questo confine sarebbe perciò rimasto dentro lo spessore del punto, e quindi non precisamente determinato.

23. Ammessa e ritenuta la definizione del punto, cioè di cosa ideale soggettiva senza parti, tuttavia non si considerava in geometria privo di una specie di veste o di forma che dir si voglia di entità, e ciò a fine gli fosse applicato pienamente il principio di tutta evidenza, che supposto il punto v. g. indicare l' estrema destra di una linea, ripugnasse che esso non lo rappresentasse.

Quando però ci sforziamo con la nostra immaginativa di comprendere l'intrinseca forza del suddetto principio applicato al punto geometrico veracemente privo di ogni entità, ci ritroviamo in una veramente imbarazzante oscurità.

Altrettanto interviene all'animo nostro allor che il punto ideale geometrico viene adoperato ad indicare il principio, il fine, il mezzo di una linea o lunghezza, perchè appunto esso manca di ogni sentore di lunghezza.

Pure in onta di tutte queste oscure nozioni, e prima e dopo Euclide si è sempre ritenuto, che i fini della lunghezza siano punti, e che la linea retta sia quella che si distende egualmente fra li suoi punti. Le quali cose tutte, come ognun vede, si ammettono e si ritengono in via meramente ipotetica e non dimostrativa, perchè non si presentano altrimenti quali nozioni chiare e facili al nostro intendimento, ogni qual volta le vuole ben addentro minutamente considerare.

24. Parimenti la nostra facoltà ragionatrice non trova rispondere al pieno rigor di ragione il pensamento di alcuni

geometri, i quali vaghi di spiegare la genesi della linea, la considerano come ingenerata dal movimento o dal flusso del punto geometrico. E ciò, perchè la mente non arriva a comprendere come un punto, o un ente, se può dirsi così, all'in tutto negativo, possa esser suscettivo di movimento; giacchè ogni idea o nozione che noi abbiamo e ci formiamo tanto del moto reale quanto dell'ideale è sempre una nozione di entità positiva, o di ente sussistente, ma tale che non può mai esser separato dalla nozione del mobile nel quale sussiste. Questa nozione del moto adunque di sua natura sempre positiva, è però nozione più tosto di modo, che di verace entità sussistente in sè stessa; per la qual cosa la nostra mente non sa come indossarla, al punto che non differisce in niente dallo zero o dal nulla. Di più la nostra imaginativa, che non dispiega mai la sua attività se non si appoggia alla considerazione o rappresentazione di qualche cosa reale o ideale, difficilmente può idearsi l' orma o il solco che dovrebbe lasciarsi indietro il punto geometrico col suo progressivo movimento, mentre questo solco avrebbe e non avrebbe dimensione, come non ne ha alcuna il mobile supposto generatore del solco.

25. E giacchè qui teniamo discorso delle applicazioni che i geometri fanno del loro punto, diremo anco una parola intorno alla universale convenzione di denominare ed appellare col nome di punti gli estremi o i fini della linea, come ogni altro sito o luogo della stessa. Difatti mal si comprende come lo zero dimensione, qual'è il punto, possa indicare o segnare gli estremi od altri luoghi della linea, ente di lunghezza; tanto più che dicono tutti i geometri, che tolti col pensiero e levati via questi punti, la lunghezza o la linea rimane la stessa nè più nè meno, e nulla, rigorosamente parlando, perde della sua entità. Eppure appare cosa facile ad ammettersi, che se i punti indicavano veramente gli

estremi di una linea e non erano fuori della stessa, appare, dico, che coi punti sottratti, anco le indicate estremità vengano insiememente sottratte.

Più la dottrina universalmente su questo oggetto è, che ogni sito della linea è un punto; e intanto nè anco infiniti punti possono costituire e formare una qualsivoglia linea!

E poichè cade il ragionare della linea e de'suoi punti; osserviamo ancora, che anco la vantata e definita distensione della linea fra li suoi punti è un enigma inconcepibile; di fatto tutti questi punti conviene che siano tutti separati fra di loro, e tutti fra di loro discosti, per avere la possibilità di considerarli distesi lungo la linea istessa. Questo è necessario, perchè ove questi punti si toccassero, tutti si costiperebbero in uno solo e si confonderebbero. Ora questa ipotesi di separazione dei punti tra i quali si distende la linea, o la si imagina distesa, contiene di necessità la posizione di una infinità di punti geometrici, e di una infinità di vacui interposti ai punti medesimi; perchè supposti al contatto fra di loro si costipano come è detto in un solo punto, ed allora torna impossibile la definizione data della linea; considerandoli poi separati da altrettanti interposti vacui, si ammettono per necessità infiniti punti ed infiniti vacui. Ma questi vacui esser debbono tutti occupati dalla linea distesa, e non segnata dai punti; la qual cosa quanto sia difficilmente conciliabile coll' universale opinione, la quale asserisce, che ogni sito della linea è segnato e indicato da un punto, ognuno lo intende. Queste e varie altre osservazioni, che si potrebbero notare su questo oggetto, provano che affatto ipotetico è il concetto della definizione della linea e de'suoi punti, e che ipotetica ed oscura ne riesce la destinazione dei punti ad indicare ogni suo sito e le sue estremità.

26. Queste riflessioni, come tutti se ne possono accorgere,

traducono la nostra facoltà intelligente in un campo vasto e senza confine, e quello che anco più importa, ripieno di altissime e difficilissime investigazioni. Queste riflessioni però i geometri percorrono e sorpassano col solo sussidio di mere ipotesi; ma gli altri filosofi con le loro razionali speculazioni non possono nè appieno comprendere nè ammettere. E questa diversa maniera di vedere intorno a tali oggetti, appalesa apertamente il diverso procedere dei geometri e degli altri filosofi. Tutto è difficile al filosofo che vuol comprendere ogni cosa con chiarezza e con scrupolosa analisi, e perciò in su la via che esso percorre non vuole che insorgano nubi od oscurità ad offuscare la evidente chiarezza e semplicità; perciò egli non avanza mai passo se non vale a superare tutti gli ostacoli che rinviene e tutte le difficoltà che gli si presentano in sul cammino; all'invece pel geometra, che dove non comprende e non vede aperto, si contenta di supporre, e dove sono oscurità o difficoltà, non cura rischiararle e risolverle, tutto è facile o almeno niente lo arresta in sul cammino. Di qui viene, che il primo non può progredire ove non sia scorto dal vero rigorosamente comprovato; il secondo progredisce a volo ovunque gli piace sull'appoggio delle sue ipotesi.

27. Ma ritornando in sul dire di queste prime fondamentali posizioni geometriche, e non curando le oscurità da noi accennate ai numeri 24 e 25, egli è però vero, che avendo ammesso il punto geometrico senza parte veruna, od avendolo ritenuto come senza alcuna grandezza, e tutto ciò in via puramente ipotetica; più avendolo considerato come atto a rappresentare gli estremi ed ogni altro sito delle linee, delle superficie, ecc., egli è, dico, vero, che giova mirabilmente a determinare ogni sito e luogo escogitabile della grandezza lineare, superficiale ecc, e che nulla si saprebbe escogitare di più adatto ed appropriato. In fatti qualunque dimensione o spes-

sezza che si fosse attribuita al punto, per quanto tenue o minima ella fosse stata, la nostra facoltà percipiente e pensante avrebbe saputo ravvisare nel punto il medio, i lati estremi, la cima, il fondo, ecc. Laddove nel punto avente zero dimensioni altrettanto non si può rinvenire, nè anco speculando; onde sotto tale risguardo manifesta ed aperta si rende l'utilità della geometrica nozione del punto. Così la lunghezza della linea (quale poi ne sia la incomprensibile di lei natura e generazione) viene considerata come precisamente determinata ne' suoi estremi e nei siti di essa dai punti geometrici segnati; si rinvengono adunque in questa soggettiva nozione del punto geometrico utilissimi sussidii per la scienza matematica.

28. I geometri che hanno ideati e definiti i principj della scienza geometrica, ricordati al num. 21, hanno ancora concordemente attribuito ad essi e a tutte le grandezze una mirabile, e per così dire, *trascendente* proprietà, quella cioè del *continuo.* Questa è come il perno principale sopra del quale si fonda e si aggira la filosofia delle matematiche.

Noi terremo apposito ragionamento di questa proprietà del *continuo,* della quale, si considerano rivestite anzi intimamente costituite tutte le grandezze ideali geometriche, meno il punto; per ora osserveremo, che tanto i geometri, che considerano la linea come la fosse una serie continuata di punti, quanto quelli che la risguardano come ingenerata dal movimento del punto geometrico, e perciò così distesa su la traccia da quel punto segnata, come ancora queglino che credono la superficie essere prodotta ed originata dalla linea moventesi parallelamente a sè stessa, come parimenti que' che han detto, il solido esser formato dal movimento del piano o della superficie, tutti questi geometri han tentato di assegnare l'origine della lunghezza, della superficie del solido; ma tutte queste loro ipotesi tendenti a manifestare altrettante genesi di lunghezza, di larghezza, di solidità, ecc. sono manchevoli in faccia

alla vera filosofia. In fatti l'ingegno umano non sarà mai capace di spiegare, che al punto geometrico possa convenire ed applicarsi il moto, e privo come esso è di ogni sentore di lunghezza, possa dar origine alla linea. La ragione umana non saprà mai appieno comprendere, come il movimento della linea in senso paralello a sè stessa, possa dar vita alla superficie, e finalmente come il movimento di quest' ultima dia esistenza al solido.

29. Non proseguendo per ora più oltre queste osservazioni intorno alla natura ed origine dei principj della geometria, fermiamoci per poco a ragionare dei due capitali oggetti della scienza geometrica, vale a dire, in primo luogo teniamo ragionamento del *continuo,* conosciuto anche sotto il nome di legge di *continuità,* in secondo luogo dell'*infinito matematico* e sua natura.

Senza un filosofico esame di queste due nozioni, o meglio, posizioni geometriche, le quali si porgono scambievolmente la mano, riesce impossibile il dare al nostro ragionamento quella precisione ed esattezza, che gli si può dare maggiore, onde giungere con le nostre indagini a risultamenti evidenti o almeno assai persuasivi, secondo porta la natura delle diverse parti delle matematiche.

CAPO SECONDO

Natura e proprietà del CONTINUO.

30. Non è fattibile il poter dare una vera e chiara definizione del *continuo*. Tuttavia per approssimarsi il meglio che si può a quest' alta soggettiva nozione del continuo, diremo che esso consiste in una nostra forma mentale al tutto soggettiva; e questa forma soggettiva avente aspetto di entità geometrica, è ritenuta quasi sia una proprietà sostanziale attribuita alle grandezze geometriche, per la quale, esse grandezze vengono in certo modo elevate ad uno stato al tutto eminentemente soggettivo. Per questa forma, o meglio, per questo nostro modo di considerare le grandezze geometriche come veramente informate della proprietà del continuo, deriva, che queste grandezze divengano infinitamente divisibili. Pare che si possa anco dire, che questa forma del continuo non consista in altro, che nella nostra soggettiva rappresentazione delle quantità geometriche, in forza della quale si ritengono e si suppongono di natura infinitamente divisibile. Ora come può mai la intelligenza umana rappresentarsi con precisione la natura di questa essenziale proprietà, che mette piede e radice nell'infinito, e che perciò non si può comprendere? Chi può mai render chiaro a sè stesso il fondo o la natura di questo continuo, il quale pare abbia da esser così fitto, così fino, così compatto ed insieme così infinitamente divisibile? Ma intralasciando la ricerca tendente a far conoscere pienamente la natura del continuo, accontentiamoci di ammettere alla meglio che sappiamo ideare, questo *continuo*, e riteniamo positivamente tutte le grandezze geome-

triche per essenzialmente divisibili all'infinito, come sempre han ritenuto concordemente tutti i matematici.

31. E per aggirarci ancora per poco intorno all'ideale supposizione, ovvero al concetto mentale del continuo diremo, che esso consiste in una supposta costituzione o formazione delle quantità geometriche in forza della quale è come se esse derivassero o fossero risultanti dall' unione di una infinità di particelle infinitamente piccole e quasi impercettibili. Diremo finalmente, che questa forma intellettuale ed appieno soggettiva del continuo, si suppone e si considera di tale vastità e profondità che la nostra intelligente attività non arriva a comprendere.

Questa forma soggettiva del continuo, introdotta dalla nostra mente come costitutivo essenziale nelle linee, nelle superficie, nei solidi, nei numeri, nelle grandezze algebriche, finite, cognite, incognite, costanti, variabili, infinite, infinitesime e combinate in qualsivoglia maniera di loro funzioni, questa forma, dico, ne diventa la loro più importante e più sublime essenziale proprietà. D'onde ne viene, che questa proprietà rincaccia, per così dire, a tanta e sì inarrivabile distanza i primitivi e costitutivi elementi delle grandezze geometriche che veramente si sottraggono alla penetrante nostra intellettiva comprensione, e tanto più poi si sottraggono alla nostra intelligenza, quando facciamo riflessione, che considerandosi e ritenendosi la proprietà del continuo come essenziale alle grandezze egualmente che a tutte le escogitabili loro particelle, ne conseguita, che anco li più minimi o infinitesimi loro ideali primitivi elementi, sono ancor essi nè più nè meno sempre infinitamente divisibili, il che vie maggiormente risospinge questi primitivi elementi affatto fuori della nostra intelligenza istessa.

32. Gli è per questo che tutti i tentativi fatti dai geometri onde ispiegare la generazione delle grandezze mate-

matiche sono riusciti inutili; e perchè? perchè la cognizione dei relativi elementi costitutivi di esse sono stati per questa proprietà risospinti fuori del dominio della nostra facoltà percettiva ed intelligente.

33. Passando sopra di questa nozione un poco alla buona, molti geometri han creduto di rinvenire nella proprietà del continuo una sublime generazione della grandezza, considerando quest'ultima come formata e composta da una infinità di elementi infinitamente piccoli; ma si vede che questa proprietà sussiste sempre e tutta intiera, qual'attributo essenziale, anco in questi supremi infinitissimi elementi; il che indusse necessariamente a dover considerare anco questi elementi come essi pure infinitamente composti; e fece conoscere perciò, che i veraci primi costitutivi elementi delle grandezze geometriche sono infinitamente lontani da ogni nostra più ardita e perspicace speculazione. Per la qual cosa, tralasciando di entrare in ulteriori filosofiche indagini, dirette a conoscere, se i primi principii delle quantità geometriche esser debbano semplicissimi, ovvero anch'essi infinitamente composti, ci accontenteremo, per ora, di osservare, che trattandosi di grandezze ideali soggettive, quando di esse soggettivamente se ne voglia conoscere la generazione, dobbiamo ricorrere ai loro principii o primitivi generatori, e questi non trovandosi entro i limiti della nostra percezione, conviene conchiudere, che tutte queste belle e peregrine speculazioni intorno alla verace generazione delle grandezze geometriche, non possono essere che verosimili od ipotetiche. E intanto la natura intima del continuo considerata qual costitutivo essenziale di queste geometriche entità ci nasconde e cela ad una profondità inaccessibile la verace ed aperta generazione delle grandezze geometriche. Convien dunque in questa oscurità appigliarsi ad ammetterne una, soltanto in via ipotetica, o meglio, conviene adattarsi alcun poco alla buona a considerare la

grandezza geometrica finita come grandezza risultante da indefinite minime parti o elementi, e questi in modo che siano sempre in piena armonia coll' infinita divisibilità di queste grandezze, qualunque ne sia la loro entità.

34. Ma a che cosa si riduce questa dal continuo voluta infinita divisibilità? Ecco un quesito cui si deve cercare una soddisfacente filosofica soluzione.

Per avvicinarsi quanto si può a questa soluzione dobbiam premettere, che per natura della proprietà del continuo, si ha da ritenere, che ogni escogitabile maniera di divisione può essere applicata alla grandezza geometrica; e che tutte le maniere possibili si possono ridurre a due classi; una è quella la quale progredisce con spartimenti di valori disuguali, così che tutte le parti in cui rimane divisa una data grandezza, tutte abbiano tra di loro valori diversi. Che poi una tale maniera di divisibilità in parti tra di loro disuguali abbia o no bisogno di una legge la quale mantenga ognora viva la proprietà di procedere sempre all'infinito, questo qui non occorre di indagare per ora. L'altra maniera di dividere la data grandezza geometrica è quella nella quale si tentasse di dividerla secondo la vasta ed indefinita latitudine di una divisibilità corrispondente alla natura del continuo, cioè si tentasse spartirla secondo tutti gl'infiniti possibili od escogitabili modi di divisione; e come questa ci para innanzi tutti gli escogitabili modi e leggi diverse di divisibilità, perciò torna impossibile il voler anco mentalmente o soggettivamente comprenderne la vastità.

35. Per dare un poco più di luce a quest'ultima maniera di divisibilità delle grandezze geometriche, e per meglio comprendere quanto sia infinito il campo della divisibilità corrispondente alla natura del continuo, osserviamo, che in questa seconda maniera la divisione, o lo spartimento delle grandezze s'intenderebbe fatto in modo, che ove si trattasse di dividere una grandezza staccandone i di lei brani successi-

vamente, questo si dovrebbe fare in maniera che la divisione passasse per tutte le vie possibili di smembramento, onde corrispondere così alla natura del continuo ed a tutta la sua verace infinita potenza.

Ora ognuno comprende che se, v. g., fosse data una linea, da dividersi secondo questa seconda maniera, e se per ipotesi si ritenesse questa linea composta di infinite parti infinitesime, allorquando la divisione dovesse adattarsi al poter del continuo, dovrebbe effettuarsi in modo, che non solo uno ad uno questi infiniti elementi venissero separati, ma di più che lo fossero ancora secondo tutte le indefinite combinazioni e permutazioni di tutti questi infiniti elementi, il che trasporta in una divisibilità più che infinita ed in una regione cotanto superiore alla nostra capacità che non si scorge alcun confine e veruna via di uscirne.

36. Intanto chi saprebbe asserire che anco con altrettanto o con tutto questo si fosse poi pareggiata o adequata la natura del continuo? Dopo tanto e sì prodigioso scompartimento, non venendo mai meno la proprietà del continuo in veruna minima parte in cui fosse divisa la linea, come si direbbe esaurita la vastità infinita del continuo? Onde ne deriva, che la seconda maniera di divisione traducendo l'animo in nozioni a lui impervie ed inconcepibili si deve abbandonare come impraticabile e come inducente in un campo infinito, anzi infinitamente infinito.

37. Una divisibilità adunque procedente su la scala o sopra la graduazione infinita corrispondente alla capacità del continuo riesce impossibile anco mentalmente, e ciò anche perchè tra il più che infinito campo di diverse divisibilità, tutto rimanendo indeterminato, niuna ragione giammai esiste, con la quale si possa rispondere in qualche modo, ad una determinata concreta divisione, niuna che possa condurla a qualche finimento, niuna che possa nè anco per semplice approssi-

mazione farla progredire verso la consunzione della divisione della grandezza che si considera divisibile in infinito.

38. Ogni qualvolta adunque la nostra mente tenti fabbricarsi un metodo di divisione il quale adegui la sterminata proprietà del continuo, si prefigge un'impresa che giammai potrà condurre a buon fine. Egli è per questa difficoltà che il buon senso ha posto i geometri su la via del vero, la quale sola era possibile all'umana intelligenza; vale a dire, il buon senso ha loro suggerito di non appigliarsi che a quelle possibili divisioni della grandezza le quali procedessero per parti discontinue e regolate da una legge determinante il loro reciproco successivo rapporto, legge per altro di natura sempre partecipante ed avente piede o radice nella proprietà del continuo o dell'infinito.

39. E qui cercheremo di far conoscere che cosa si intenda per divisione secondo parti discontinue, o che cosa significhi divisione procedente dalla natura del continuo secondo una legge di discontinuità, o secondo una legge di parti disuguali, dette discontinue. Primamente si deve notare che per modo discontinuo, noi intendiamo esprimere quel modo che ha del saltuario nelle parti, e che perciò pone sempre tra queste parti discontinue delle differenze o ragioni finite e per lo più costanti. Queste differenze però sono sempre tali che esse medesime possono esser trattate nè più nè meno di quello che si tratta la grandezza principale, della quale esse sono come le membra tutte disuguali di essa concorrenti a formare la stessa. Arrechiamo qualche esempio numerico atto a metter sott'occhio questo modo di divisione o spartimento discontinuo delle grandezze. E l'esempio si considererà sotto l'aspetto generale indeterminato, per cui sarà applicabile a qualsivoglia altra geometrica o algoritmica grandezza.

Sia adunque la unità numerica astratta che si voglia dividere in parti discontinue indefinite o disuguali tra di loro.

La seguente maniera di serie, nota a tutti, ne presenterà un tipo: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ ec. ec.; l'altra qui unita ne presenterà un'altro:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \text{ecc. all' infinito.}$$

E così dicasi di qualsivoglia altro escogitabile modo di spartimento della medesima unità, ma modo determinato e fisso, cioè avente appoggio in una legge geometrica che ne regga e governi l'andamento dei termini o delle parti dell' unità. Ora nella prima serie la legge è quella di pigliare a prima giunta, o di primo tratto la metà dell' unità proposta; poi la metà del residuo, e poi la metà del secondo residuo; e così di seguito; il che dà origine alla prima serie che procede con ordine e legge geometrica decrescente all'infinito. Nella seconda, la legge prescrive di pigliare della proposta unità, prima due terze parti di essa, poi due terze parti del residuo, poi finalmente due terze parti del secondo residuo, e così via via all' infinito; il qual processo dà origine e vita alla seconda serie procedente anch' essa con legge geometrica all'infinito.

40. Le due serie state riferite nel numero antecedente, come pure tutte le altre consimili che si potrebbero porre in campo, che pure sono indefinite nel numero, presentano due cose ben distinte da osservarsi. Una è l'andamento della divisione il quale è governato dalla legge di bipartire l'unità ed in seguito bipartire i successivi residui, e così sempre all'infinito. La seconda pone radice nel continuo da cui desume la possibilità di ogni divisione, e della divisione procedente all'infinito. La divisione che ha dato origine alla prima serie, porta che il primo termine sia duplo del secondo, e così

successivamente via via; l'antecedente sempre duplo del susseguente, e così sempre. Nella seconda serie il valor dei termini è continuamente triplo del susseguente. La differenza fra i termini della prima serie è di $\frac{1}{4}$; e questo valore può nè più nè meno dar origine alla seguente serie, regolata dalla stessa legge: $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ ecc.

La differenza dei termini di quest'ultima serie che ha origine dal rapporto che governa la prima, è di $\frac{1}{8}$ e questo può esser espresso dalla seguente serie ulteriore: $\frac{1}{8} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ ec. ec. e così di seguito.

La differenza tra i termini della seconda serie è $\frac{1}{3}$, la qual terza parte può esprimersi in serie come segue: $\frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ ecc. all'infinito; la differenza tra i termini di questa serie è di $\frac{1}{9}$, che posto in serie dà: $\frac{1}{9} = \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$ ecc. all'infinito.

41. Lo spartimento discontinuo che presentiamo dell'unità soggettiva è applicabile a qualsivoglia grandezza lineare, superficiale, solidale, algebrica, algoritmica, e ad ogni altra grandezza, espressione, o funzione finita, infinita, infinitesima o mista e combinata in ogni possibile funzione. Una semplice riflessione sopra questa serie basta a rendere l'animo

pienamente convinto di questa verità; perciò non spenderemo ulteriormente il tempo nel dichiararla.

42. Ritornando adunque in su la considerazione della continua infinita divisibilità delle grandezze si comprende, che i geometri antichi, i quali hanno immaginata e posta in campo la proprietà del continuo e la infinita sua divisibilità, sono stati poco consentanei a sè stessi nel mostrarsi poi contenti e paghi dall'ammettere alla fine di un'infinita divisione o diminuzione, solamente una quantità piccolissima da essi denominata *minore di ogni assegnabile grandezza;* imperciocchè una diminuzione protratta all' infinito dava di capo in un residuo supremo infinitamente piccolo, ammessa che sia anco solo in via ipotetica o razionale, la diminuzione infinita di una grandezza finita. Il pensiero adunque di qualificare questa suprema rimanenza, quale grandezza solamente minore di ogni assegnabile, fu certo pensamento poco filosofico e poco rigoroso. Questo loro procedere si risolveva in uno scambio di illazione, almeno per ciò che risguardava l'ovvio significato di questa loro denominazione; come pure riguardo al modo ed ai termini con cui erano annunciate le premesse.

43. Si noterà pure in seguito, che essi evitando lo infinito e l'infinitamente piccolo, non si erano accorti di un'altra sconvenienza di idee nel loro ragionamento, quale è quella di ammettere in forza della natura del continuo un' infinito maggiore di un' altro; come pure non conobbero appieno, che una divisibilità infinita inchiudeva nei termini istessi la di lei impossibilità, anco in via ipotetica di poterla esaurire o realmente, o idealmente. In onta però di tutto ciò, essi non mostrarono di aver difficoltà a servirsi delle illazioni qui sopra ricordate e dipendenti, anzi aventi esistenza nella infinita divisibilità come compiuta, e ciò in quel modo che ognuno fa, parlando e trattando di cose al tutto semplici, ovvie, e per sè stesse chiare pienamente.

CAPO TERZO.

Dell'infinito geometrico.

44. Parlando dell'infinito geometrico, voglio che sia avvertito, che intendiamo parlare di quel concetto mentale e puramente soggettivo, quale si può formare o ideare la nostra intelligenza in via al tutto razionale speculativa, e non già intendiamo trattare del concetto mentale infinito che noi abbiamo dell'Ente supremo creatore di tutto. La cognizione di quest' ultimo non dipende dalle speculazioni geometriche che danno vita al primo, e molto meno risiede nel fondo del nostro idealismo, come addiviene dell'infinito geometrico.

45. La prima ricerca adunque che ci interessa intorno all'infinito geometrico è quella di sapere, se speculando noi sopra dati finiti che conosciamo, tanto empirici, che ideali od astratti, possiamo arrivare ad acquistare ed a formarci un' idea, o una cognizione, od una nozione dell'infinito? E dando a questa ricerca una più concreta significazione, può egli lo spirito nostro acquistare l'idea o la nozione di una grandezza così grande la quale di ogni grandezza finita possibile sia maggiore e vinca ogni limite di essa grandezza, e sia perciò infinita? La serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4 e 5 ec., ec., all' infinito, può essa presentare e contenere un termine che sia infinito, od abbia un valore infinito?

46. Prima di innoltrarsi in questo gineprajo ricordiamo i pensamenti dei geometri intorno allo infinito. Gli antichi, come abbiamo già detto, ammisero la divisibilità infinita delle grandezze, ammisero il prolungamento infinito delle linee. Quando noi diciamo che gli antichi ammisero il concetto filosofico dell'infinito, noi stiamo in sulle forme generali, perchè

crediamo che tanto Euclide, quanto Archimede, e probabilmente diversi altri avanti di loro, avessero ammesso questo concetto. Non così pensa il signor Arrago, fisico e geometra francese, il quale nel tomo 22.° delle *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Francia*, tessendo la biografia di L. N. Carnot scrive: = L' infinito si manifestò per la prima volta nelle matematiche il giorno nel quale Archimede determinò il rapporto approssimato del diametro alla circonferenza, per una assimilazione del circolo al poligono circoscritto e composto di una infinità di lati. = Ma ognuno può conoscere quanta poca filosofia si trovi in questo suo modo di parlare e quanto poco sia esso consono all'esattezza storica.

Primamente un rapporto approssimato mal si presta alla nozione dell' infinito, perchè l'indeterminato ed approssimativo non contiene la nozione dell'infinito. E se crede che la nozione dell' infinito stia riposta nella supposizione gratuita che il poligono circoscritto sia di un'infinità di lati, questa non è ragione sufficiente. Acciò che esso faccia qualche prova, conviene poter dire che questo concetto sia stato per la prima volta veduto o pensato da Archimede; il che nè da Arrago, nè da alcun altro si può fare; perchè Archimede è coetaneo di Euclide il geometra. In Euclide il matematico, ritrovasi per intero questa nozione e questo concetto. Non si sa se Euclide sia l'inventore di questa ipotesi, ovvero se egli l'abbia presa da altri, come sembra anzi più verosimile.

L' attribuirla dunque ad Archimede e precisamente all' epoca nella quale egli si occupò del rapporto del circolo al poligono, questo è procedere troppo alla buona, e asserire largamente senza prova, e senza anco decorosa verisimiglianza. Ma ritornando agli antichi, essi dopo aver ammesse linee infinite e divisioui infinite, si rifiutarono poi all'idea del vero infinito e si arrestarono alla minore di tutte le assegnate; e que-

sta immaginata qual'effetto dell'infinita loro divisibilità, presupposta anco eseguita; più ammisero la grandezza infinitamente divisibile, considerata intiera, in modo da essere in comparazione del supremo di lei residuo, solamente maggiore di tutte le assegnate. Quest'ultima considerazione era però ristretta ad una semplice comparazione, mentre il pensamento di ammettere in generale delle grandezze maggiori di tutte le date, e di tutte le assegnabili significava un concetto superiore al tutto alle loro premesse, e non poteva esser posto che in via puramente ipotetica, come sarà palese in progresso di quest'opera.

Ma un tale loro contegno restringeva ed impicciolìva non poco la natura del continuo, che da loro veniva ammessa e predicata in tutta l'estensione del significato e come essenziale costitutivo delle loro grandezze e indistintamente di tutte.

I metodi di Euclide e di Archimede fondati pienamente sopra la natura del continuo, e da loro famigliarmente usati, non si arrestano ai limiti ai quali essi li contrassero, ma progrediscono apertamente all'infinito. Quindi è, che nei loro ragionamenti si appalesa un manco di rigorosa logica, il quale fa poco onore a quei sommi; essi in fatti conducono e richiamano il pensiero su la via che si incammina e progredisce all'infinito e ciò senza alcuna restrizione, e senza far cenno di alcun ostacolo, o di alcun limite che possa arrestarlo su questa strada aperta fino all'infinito, e ciò fanno a fine di guarentire le loro induzioni che intendono dedurre dalla posizione di questa infinita progressione. Ora che poi in onta di tali posizioni si guardino scrupolosamente dall'infinitamente piccolo, o dall'infinitesimo, come egualmente si astenghino dall'ammettere la consecutiva grandezza infinita se non altro in comparazione della infinitesima o della minor di ogni data, questo è mancare al pieno rigore. Essi proce-

dendo alacremente su questa via, si arrestano al punto ove la quantità impicciolita per le successive diminuzioni derivanti dalle continue infinite divisioni, sia arrivata, o meglio, che considerano arrivata, al punto da essere nella di lei grandezza minore di ogni data, od anco di ogni assegnabile. E per esattezza storica diciamo ancora, che si accontentarono che l' impicciolamento avesse estenuata la grandezza solamente sino al punto da esser divenuta minor di ogni altra data.

Pervenuti a questo stato dello impicciolimento della grandezza, ed appellata allora quest' ultima come è detto minor di ogni data, apparve loro che in tale supremo stato di picciolezza, si potesse considerare come diventata incapace ad accrescere le grandezze finite omogenee, quando ad alcuna di esse venisse aggiunta; e parimenti che allora fosse in questo stato incapace di diminuirle ogni qual volta venisse loro sottratta. In sequela di questa loro supposizione si indussero a considerare la grandezza minor di ogni data come eguale allo zero; e perciò stabilirono il grande e famoso principio antico: = Due grandezze le quali non differiscono fra di loro, se non che per una differenza minor di ogni data grandezza assegnata, queste sono tra di loro rigorosamente uguali =. Un siffatto contegno ben addentro considerato, desta, a dir vero, non poca sorpresa, e l'animo nostro che lo contempla, trovasi perciò costretto a farsi le seguenti dimande.

La legge di diminuzione cui si appoggiano gli antichi per ridurre a tanta tenuità una differenza di grandezza qualunque, la quale in origine aveva un valor finito, fino al ridurla allo stato di minore di ogni data, è essa una legge opportuna ed acconcia a tale scopo? E quando pure la legge fosse a tanto opportuna e potesse somministrare la grandezza minor di ogni data, quale è la ragione rigorosa e perentoria che in tale stato la si possa ritenere e trattare per eguale

allo zero? Ognun comprende che dalle risposte che si posson fare a queste due dimande si conoscerà tutta la dottrina degli antichi, e quale e quanta sia l'evidenza delle dottrine loro.

Tentiamone adunque le risposte; e primamente consideriamo le dottrine conducenti alla grandezza minor di ogni data. Le leggi delle diminuzioni poste in campo da Euclide e da Archimede coincidono in quanto alla loro sostanza, perciò quello che si dirà del pensamento del primo facilmente ed intieramente sarà applicabile a quello del secondo. Ma si proverà tosto, che nè in via di fatto, nè in via razionale, queste leggi non conducono rigorosamente alla grandezza minor di ogni data, e molto meno al punto di ridurla eguale allo zero; perciò sarà certo e manifesto, che le leggi poste in campo da quei grandi non presentano precisione filosofica rigorosa. Questo sarà un passo primo che propriamente appaleserà tutto il valore della filosofia degli antichi e primi geometri. Ma perchè si dice, che queste leggi non conducono al ritrovamento della grandezza minor di ogni data? Perchè, diciamo, procedono sopra leggi geometriche, le quali inducono bensì ed operano su la data differenza finita e proposta di impiccolire delle rapide e grandiose diminuzioni, ma in onta di tutte queste diminuzioni protratte anco sin dove piaccia, rimane sempre e poi sempre parte finita su la quale continuare le diminuzioni senza fine. Primamente si osservi, che il procedimento, o meglio la natura delle diminuzioni progredienti secondo legge geometrica, lascia sempre intiera la proprietà essenziale del continuo nella grandezza finita residua, e perciò questa per quanto si voglia impiccolita, può nè più nè meno della grandezza di maggior valore od entità esser continuamente impiccolita. Ora, se tali appunto sono le leggi poste in campo ed adoperate dagli antichi, dunque in forza di queste leggi non si arriva mai ad una piccolezza

della quale non se ne possa assegnare un'altra minore, e quindi non si arriva mai alla minore di ogni assegnata, e molto meno assegnabile. Entriamo in più minuto e particolare esame. Gli antichi pongono una diminuzione spinta sino all'infinito. Ora, incominciamo a chieder loro: se il vostro processo di diminuzione lo fate stendere sino all'infinito, quando è che arriva alla grandezza minor di ogni data? s'incontra esso processo in questa quantità minor di ogni data prima di arrivare all'infinito, o la ritrova solamente là all'infinito? se in questo processo o procedimento di diminuzioni si rinviene prima di arrivare all'infinito, la differenza diminuita sarà ancora evidentemente dell'ordine delle grandezze finite, e perciò ancor più grande dello zero e necessariamente diminuibile; se poi si ritrova solamente là all'infinito, dimandiamo, è ella possibile una diminuzione infinita, bella e terminata ed esaurita? Non è anzi allo invece apertamente impossibile, il finire la divisibilità infinita, perchè qualunque volta si ammettesse esaurito l'infinito, si ammetterebbe niente meno che tale divisibilità fosse, e nel medesimo tempo non fosse infinita? Non si può dunque, nè in via di fatto, nè in modo alcuno razionale attignere l'infinito; dunque la minor di ogni data (che in seguito appelleremo ancora per *inassegnabile* o minor di ogni assegnabile) riposta e collocata che sia all'infinito, sarà collocata ad una distanza cui non si può arrivare, perciò non si potrà mai giugnere ad ottenerla. Sarà quindi a considerarsi di impossibile conseguimento, e realmente e razionalmente. Dunque tutto il fondamento, tutto l'appoggio, che si può avere in filosofia per ammettere questa quantità minor di ogni data, cade da sè, e seco trae in un abisso anco la possibilità istessa di questa minor di ogni data. L'animo nostro postosi sulla via delle diminuzioni procedenti con legge geometrica non rinviene in nessun luogo al di quà dell'infinito uno stato di piccolezza che non possa

ancor esser diminuito; l'animo nostro non può andare all'infinito, neanco speculando, purchè proceda su la via di queste diminuzioni; dunque qual è mai l'appoggio dei geometri antichi sul quale essi fondavano l'esistenza reale od ideale di questa vantata grandezza minor di ogni data, ricavandola dalle loro leggi geometriche di diminuzioni poste in campo?

47. Galilei, e dopo lui Cavalieri, poi Wallis, Kramer, Barrow e molti altri che precedettero la scoperta dell'analisi infinitesimale, pensando su queste dottrine degli antichi, conobbero che ci voleva questo punto o questo limite al quale pervenuti, almen speculando si potesse dire, di aver raggiunto questa piccolezza minor di ogni data, e tale che si potesse anco senza timor d'inganno considerare quasi zero. E siccome questo limite non si presentava loro prima di arrivare all'infinito, essi supposero che esso fosse là all'infinito e sorpassando tutte le difficoltà, anzi la stessa impossibilità di raggiungere lo infinito, lo supposero nè più nè meno collocato in fondo all'infinita diminuzione, avendo solamente in vista di assicurarsi della legittimità delle conseguenze che ne volevano dedurre. Il filosofo di Firenze, considerando che questo metodo degli antichi mirava e tendeva a condurre alla suprema risoluzione dei primi elementi, e trovandosi nel medesimo tempo incapace di dimostrare, come dallo stato finito potesse la grandezza passare allo stato di minor di ogni data, e non trovando neanco dell'esattezza in questo loro concetto della grandezza minor di ogni data, credette di considerarla come infinitamente piccola o come infinitesima, denominazione che gli pareva corrispondente alla supposizione della divisione o diminuzione protratta coll'ipotesi all'infinito. Egli chiamò questo stato di piccolezza infinitamente piccolo, col nome di *indivisibile*. Questo grande filosofo però conobbe ancor la necessità di supporre e di dover ammettere pienamente l'infinito e l'infinitesimo. Così per opera

o meglio per pensamento giusto del nostro fiorentino filosofo vediamo sostituito al concetto vago di minor di ogni data, la nozione dell'*indivisibile*, o della grandezza infinitamente piccola, assai più precisa e propria, e vediamo meglio supposta, anzi che provata l'esistenza dell'indivisibile, o dell'infinitesimo. Cavalieri fece uso degli indivisibili di Galilei ma presi e considerati in una significazione più lata e manco rigorosa, cioè considerò gli indivisibili come parti indefinitamente piccole e componenti le grandezze finite. Wallis seguitò ed ammise pienamente le dottrine di Galilei nella sua aritmetica dell'infinito; e Barrow sostituiva alla parola di indivisibile il suo filosofico significato attribuitogli da Galilei, e denominò l'indivisibile grandezza infinitamente piccola.

Secondo la filosofia del Galilei, ogni grandezza finita era il risultato o un composto di infiniti indivisibili; e la grandezza istessa in comparazione di ognuno de'suoi indivisibili riusciva infinitamente grande. Questi indivisibili costituivano, od erano come gli elementi generatori della grandezza finita. E siccome ciò si riteneva vero per tutte le grandezze finite delle quali alcune sono di un valore assai tenue, ed altre di un valore grandissimo, così quando con la sua perspicacissima penetrazione conosceva di esser astretto ad ammettere degli infiniti gli uni maggiori degli altri, e persino indefinitamente maggiori, egli in certo modo faceva alto dinanzi a queste incompresibili posizioni o induzioni, e si limitava a dire, che tanto lo indivisibile, o quantità infinitamente piccola, quanto l'infinito, erano nozioni superiori all'intelligenza umana, e per essa incomprensibili.

Se con questa maniera però di pensare si potevano attutire alcun poco queste difficoltà, di darsi un'infinito incomparabilmente maggior d'un'altro, tuttavia a risolverle non valeva mai, nè poteva far perciò in modo, che un'animo perspicace ne potesse rimanere soddisfatto e convinto.

48. Quando apparvero Newton e Leibnitz, l'infinito e l'infinitamente piccola quantità divennero anco nozioni più usate e famigliari nelle matematiche; ma siccome questa maggior famigliarità non si fondava sopra dei nuovi e più chiari concetti di quelli di Galilei, perciò all'apparire della nuova analisi contenente dichiaratamente questi concetti, insorsero degli oppositori che rinfacciarono alla nuova analisi le difficoltà istesse che si proposero e che furono promosse contro le dottrine di Galilei. Nè Leibnitz, nè Newton seppero risolvere queste difficoltà, ma invece si limitarono a far osservare, che i principii dei loro nuovi calcoli e dottrine dovevan ritenersi per veri perchè conducevano a verità e servivano a dimostrare anco le più patenti verità geometriche.

Questa maniera però di rispondere alle difficoltà era tutt' affatto indiretta e perciò non capace di accontentare gli oppositori; onde ne veniva, che di tempo in tempo questi insorgessero contro i principii dei loro trovati, e segnatamente tentassero screditarne la loro filosofia. Siccome però gli autori di queste milantate difficoltà erano lodatori delle antiche dottrine di Euclide e di Archimede, così porgevano un salvo condotto a Newton ed a Leibnitz di cercare e difenfendere i loro principii, assomigliandoli (con poco onore di questi grandi filosofi e geometri) ai principii degli antichi, e procurando di far conoscere, che erano presso che le nozioni istesse poste in campo sotto diverse denominazioni.

49. Intanto notiamo, come non si trovi nelle opere degli antichi geometri alcuna chiara e precisa definizione o nozione dell'infinito. E quei pochi cenni che rinveniamo in essi sparsi qua e là, sebbene tutti si riducano ad una sparuta e magra nozione dell' infinito, hanno altresì il singolare carattere di diversificare assai anco in quel poco di buono che contengono. Ed in questa elevata regione della filosofia della matematica, non potevano quei geometri esser sussidiati dalla filosofia

comune, poichè nè l' idealismo di Platone, nè le forme ed astrazioni sublimi di Aristotile, nè il panteismo greco posteriore a questi sommi, e finalmente nè anco la più elevata idea che presentava dell' infinito la scuola di Alessandria con tanta forza e pompa di sapere rappresentata specialmente dalle speculazioni profonde di Plotino, porgevano un dato ad uno sgabello per salire alla inaccessibile nozione dell'infinito geometrico; e ciò tanto più, che l'alta filosofia comune antica mirava ad affissare nelle sue contemplazioni la sola natura dell' infinito assoluto, reale, mentre la filosofia matematica accennava sempre alla natura dell'infinito relativo e quantitativo ideale.

50. E perchè vie meglio si conosca e più da vicino che si può, quale fosse precisamente la maniera di considerare lo infinito adoperata dagli antichi, notiamo che Euclide parlando delle linee paralelle dice: le paralelle esser quelle che prolungate all'infinito non si toccano, mentre quelle che non sono paralelle, prolungate che siano all'infinito convien che si tocchino. Ponendo attenzione a questo modo di presentare una nozione indiretta dell'infinito, parlando delle paralelle, come qui sopra, si vede che egli parla dell' infinito, e lo ricorda, come nozione sussidiaria e capace a render chiara una elementare definizione. Più questa maniera di parlar dell'infinito adoprata da Euclide, che era poi quella di tutti gli altri suoi contemporanei e predecessori, di considerare cioè il prolungamento infinito delle linee come cosa assai semplice e chiara, desta veramente la meraviglia anco a' nostri dì, perchè ancora al presente è nozione superiore sotto molti riguardi alle nostre forze intellettuali. Ritorneremo in seguito su di questo oggetto della nostra filosofia.

51. Intanto proseguiamo a mettere sott'occhio come lo stesso Euclide ritorni sul concetto dell'infinito anco nel primo teorema del libro decimo de' suoi elementi, ove dice: = Pro-

poste due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tragga una parte maggiore della sua metà, e da quella che rimane similmente si tragga una parte maggiore della metà, e ciò si faccia sempre, alla fine rimarrà una certa grandezza la quale di ogni minor grandezza proposta sarà minore =. Fissando la nostra attenzione sopra questa celebre proposizione euclidea, pare che questo geometra si proponga in questo luogo solamente di spingere le sue speculazioni unicamente al di là di qualsivoglia grandezza proposta; ma poichè in ciò fare si appoggia pienamente alla natura e proprietà del continuo, sopra del quale è necessariamente fondata la legge della proposta diminuzione, come è aperto dalle espressioni da esso usate, *e così si faccia sempre*, perciò è cosa evidente che con questo teorema ammette veracemente l'infinito, al quale solo conviene l'esser interminabile, ed il poter corrispondere alle parole, *e così si faccia sempre*.

Di più osserveremo, che la minore delle due proposte grandezze non è enunciata in modo che la di lei minoranza dall'altra maggiore sia determinata, o almeno ristretta entro dati limiti fissi, onde per questo la differenza tra l'una e l'altra delle due proposte grandezze rimane pienamente indeterminata nel di lei quantitativo valore. Da ciò ne viene, che il teorema per essere generalmente vero deve abbracciare qualsivoglia valore che aver possa, o che piaccia di attribuire a questa differenza quale può esistere tra le proposte due grandezze.

Ora ognun vede, che per questa ragione, il valore di questa differenza può aggirarsi in campo sì vasto che abbia non solo dell'indefinito, ma anco dell'infinito, il quale campo appunto si addice a tutti i possibili valori che esister possono, e tutti fra loro diversi nella indefinita latitudine della differenza.

32. Nè si può dire, che la legge di diminuzione proposta

da Euclide, e che egli stesso aveva tolto dai pitagorici, sia tale, che procedendo per salti col prender parti sempre disuguali e discontinue non ponga capo, o non conduca all'infinito; perchè quando non ponga piede in questo concetto supremo della mente nostra, deve avere, o presto o tardi, un limite, ed ogni limite per quantunque lontano se lo voglia ammettere, esclude ed escluderà sempre il valore delle espressioni, *e così si faccia sempre.*

53. Siccome qui si tratta di una fondamentale dottrina, rendiamoci famigliare più che si può la legge geometrica enunciata e propostaci nel suddetto teorema o principio (N.51), ed al quale Euclide appoggia la verità del suo teorema.

Supponiamo adunque che la maggiore delle due proposte grandezze sia una linea di dieci metri, che la minore sia di un metro di lunghezza. Pigliando dalla maggiore la metà e qualche cosa di più, si potrà prendere una linea o lunghezza di sei metri, o pure si potran pigliare sei decime parti della maggiore grandezza, e di ciò che residua o rimane ancor sei decime parti, e *così si faccia sempre*; onde esprimendo in serie queste successive parti accennano la seguente

$$\text{serie: } \frac{6}{10} A + \frac{24}{100} A + \frac{96}{1000} A + \frac{384}{10000} A + \text{ecc.},$$

all'infinito, indicando qui per A la maggiore delle due proposte grandezze.

Si osservi ancora che il teorema ricordato (N. 51) abbraccia, come si è detto un'infinità di valori; perciò si vede, che si può incominciare la serie tanto sopra due grandezze che differiscono di nove metri, (come è il caso scelto), come sopra due grandezze delle quali la differenza sia di tanti milioni o bilioni ecc. di unità che si vogliano. Ma inerendo anco solo nella ipotesi, o caso scelto da noi, osserviamo che si può, adempiendo il dettato di Euclide incominciare tanto

da sei metri, quanto da sette, da otto e da nove; di più si vede, che si poteva incominciare da metri cinque più un decimo, da $5 + \frac{1}{10}$; da $5 + \frac{1}{100}$; poi da $5 + \frac{1}{1000}$ ec.; così da $6 + \frac{1}{10}$; da $6 + \frac{1}{100}$; poi da $6 + \frac{1}{1000}$ e così prosegui; o pure incominciando da qualsivoglia degli indefiniti o meglio infiniti spartimenti di cui è suscettibile l'unità, e qualsiasi parte di essa. Nei quali tutti indefiniti, anzi infiniti possibili valori e modi di principiare e continuare la serie delle diminuzioni, la legge geometrica che ne governa il di lei andamento esige sempre che rimanga un residuo finito, sul quale abbiasi sempre entità finita da prenderne la metà e qualche cosa di più, secondo esigono le espressioni, e *così si faccia sempre*. Ora se tale condizione è voluta necessariamente dall'enunciato del teorema, ed è voluta dalla legge che regola la serie di cui parliamo, e che contiene ed esprime all'infinito tutte le successive diminuzioni, le quali tutte devono avverare il posto teorema, come mai si potrà dire, che in ognuno dei diversi infiniti casi, o dei diversi infiniti valori secondo i quali può procedere questa serie, ognuno, dico, dei cotanti e sì diversi valori debba condurre, nè più nè manco ciascuno indistintamente alla grandezza minore di ogni proposta? Ognun comprende con quanta diversa origine e con quanto diverso progresso di impiccolimento del valore, procedano queste diverse serie, o quest'unica serie generale, secondo che in essa si pongono diversi valori. Ora, come mai gli ultimi residui di tanti disuguali valori possono indistintamente esser ritenuti come tutti eguali tra loro, ed alla grandezza minor di ogni proposta?

54. Per appieno comprendere questa incongruenza che i

diversi procedimenti della serie tutti condur debbano ad uno ed identico risultamento, cioè alla minor quantità di ogni proposta, poniamci sott'occhio un'altra serie essa pure tutta fondata sul teorema di Euclide. Incominciando la serie col prendere invece di sei decime parti, col pigliarne sette decime parti si ottiene la seguente serie: $\frac{7}{10}A + \frac{21}{100}A + \frac{63}{1000}A$ ecc., ecc., all'infinito. Ora ponendo in confronto i termini di queste due serie si vede, che il primo termine della prima serie sta al primo della seconda come 6 a 7; il secondo termine della prima serie sta al secondo termine della seconda serie come 24 a 21 centesime parti, ed il terzo della prima al terzo della seconda come 96 a 63. Tutti questi valori sono disuguali. Se adesso supponiamo spinte le due serie fin dove piaccia, siccome esse sono governate da legge geometrica inalterabile, e ciò sempre, anco nella insigne ipotesi che potessero esser protratte sino all'infinito, vedremo, che comparando termine con termine non riusciranno nè posson mai riescire uguali; dunque nè anco in fine non posson i termini essere eguali; dunque indistintamente tutte queste serie delle diminuzioni non possono condurre egualmente alla grandezza minore di ogni proposta; perchè tutti i termini della prima fino all'infinito si manterranno sempre disuguali da quelli delle altre. Ripiglieremo in seguito queste considerazioni.

55. Da tutto ciò si vede, che, o ci conviene alterare la legge, che ci ha proposta Euclide, legge che governa e da vita a queste due serie, e che la può dare anco ad indefinite altre, e quindi alterando questa legge fare, che per salto l'ultimo o qualunque altro termine o residuo diventi inassegnabile o minor di ogni proposta grandezza; o ci con-

viene rinunciare persino alla possibilità di avere un residuo finale il quale si possa ritenere di un valore minore di ogni proposto valore; e molto più poi, che si possa considerarlo e trattarlo come zero. Di fatti il valore più o men piccolo di qualsivoglia quantità non può mai fare, che una grandezza d'origine finita divenir possa eguale a zero; ed in quel modo precisamente che ripugna, che una linea lunga un milione di metri si possa ritenere come zero lunghezza, così egualmente ripugna che una linea lunga un metro solo o una millionesima parte di metro, si possa aver per zero.

56. Il greco geometra che si è proposta questa legge o questo procedimento di diminuzione, avrà certamente veduto che entrava nel pecoreccio, e si gettava in fondo ad un'abisso del quale nè sapeva, nè poteva prevederne la profondità, e molto meno rinvenire nè anco la via di uscirne. Perciò, che fece egli ridottosi in faccia a sì grandi difficoltà? Si determinò di arrestarsi sull'orlo del precipizio, che si era davanti escavato, e fissamente contemplandolo per quanto gli era fattibile col suo pensiero, gli parve di ravvisare in esso, anzi ad una indeterminata inassegnabile distanza di esso, il residuo della sua grandezza cotanto impiccolito, che si diede a credere, o meglio a supporre cosa che si potesse averlo per rigorosamente minore di ogni proposta grandezza, e di più si indusse a ritenere, che in questo stato la sua minor di ogni data si potesse avere o considerare per rigorosamente uguale allo zero. E quello che più riesce inconcepibile, si è che in ciò fare, egli credette di esser appoggiato alla legge di diminuzione da esso proposta e procedente direttamente allo infinito!

57. Ma richiamiamo a filosofico esame questo suo singolare ragionamento, ossia esaminiamo questo modo di pensare e di vedere tenuto da Euclide. La diminuzione da esso lui proposta è governata da una legge geometrica che mette e tra-

duce l'animo all'infinito; ma egli non si prevale di tanta estensione ed arriva solo al punto al quale crede ridotta qualsivoglia grandezza ad esser divenuta minore di qualunque grandezza proposta. Ora osserviamo, che per arrivare a questo punto, se pur era possibile l'arrivarvi con qualche legge, diveniva inutile il dire nel teorema, e *così si faccia sempre.* Pure se queste espressioni si fossero intralasciate, era ben facile il comprendere, che fermandosi con le diminuzioni ad una indeterminata piccolezza della grandezza sottoposta a diminuzione, nessuno poteva dire, che questa poi alla fin fine si potesse avere e considerare per minore di ogni proposta grandezza, atteso che procedendo ancora innanzi si avrebbe per necessità ottenuto uno stato di impiccolimento ancora minore, come vuole la serie e la proposta legge unica ed inalterabile che sempre la governa. Gli convenne adunque di stare in su le considerazioni generali, e circondarsi di forme e di concetti indeterminati e vaghi; anzi gli fu giuocoforza ristringere il suo teorema alla considerazione, che poste due grandezze disuguali si poteva ridurre la maggiore a divenire minor di ogni proposta o data.

58. Tuttavia convien dire, o che egli non vedesse tutta la indefinita, o infinita estensione del suo teorema, o che non volesse manifestare questa estensione medesima. Imperciocchè nell'ordine delle grandezze finite non esiste, nè può esistere grandezza o valore che ulteriormente non possa esser diminuito, o ciò che torna allo stesso, di cui non se ne possa assegnare sempre una minore. Ora nell'ordine finito era egli forse possibile di rinvenire grandezze impiccolite al segno da riuscire minori di ogni proposta grandezza, e ciò relativamente? Era egli fattibile un passo ancor maggiore, quello cioè di poterle anco in questo ultimo stato ritenere e considerare per eguali a zero?

Ecco ciò che nè da Euclide, nè da nessun altro degli

antichi geometri si è mai dimostrato, e che non potrà mai da nessuno nè anco in seguito dimostrarsi; dico dimostrarsi, perchè anco l'espressione che una grandezza ovvero un'unità divisa per l'infinito dia una grandezza infinitamente piccola, è espressione supposta e non dimostrata come sarà palese in appresso.

59. Tuttavia convien dire, che parve loro di trovare qualche appoggio al principio antico nel considerare, che portando le diminuzioni oltre ogni limite, e considerando, che siccome col procedere innanzi nelle diminuzioni si faceva continuo guadagno nell'impiccolimento del valor della proposta grandezza, così credettero di potersi indurre a ritenere di dovere arrivare al punto del valor minore di ogni data, e che questo si potesse avere rigorosamente per vero. Ma non s'accorsero che con questo contegno non si faceva verun guadagno in punto al dimostrare la verità del teorema. Di fatti, ristretto esso teorema entro i confini di qualsivoglia grandezza, egli è fuor di ogni dubitazione che la legge di diminuzione proposta serve sempre a rinvenire ed assegnare delle grandezze che riescono minori di tutte quelle che possiamo avere a questi limiti, per quantunque lontani essi si possano supporre.

Considerando del resto il teorema generalmente, cioè esteso a qualsivoglia piccola grandezza la quale riesca assolutamente minore di tutte le proposte, la ricerca di un'altra che possa essere ancor più piccola, è un'enigma inconcepibile, è un progetto al tutto inconcludente; imperciocchè la nostra intelligente attività la quale a forza di lambicate speculazioni può concepire delle grandezze quanto vuole più e più impiccolite, come mai questa nostra attività potrà superare sè stessa nell'assegnarne dell'altre, le quali siano di tutte le già preconcette ancora minori? Come potrà soccom-

bere nel suo poter di proporre al suo egual potere di diminuire?

Da ogni lato adunque si perde sempre invano la fatica che facciamo in uno inutile tentativo, in un'affannoso inconcludente sforzo dell'intelligenza; giacchè è troppo chiara cosa in sè stessa, che la nostra percipiente intelligenza è egualmente grande e potente nel proporre, quanto è grande e sempre potente nel diminuire, e non può in alcuno superare sè stessa. E se ci piace portare il nostro pensiero alla legge delle diminuzioni e di considerare, che le nostre speculazioni possano sopra questa legge appoggiarsi per ispingersi innanzi indefinitamente, questo pensamento ci porrà bensì in istato di estendere lontanissime le nostre nozioni, ma tutto questo nulla significa dal momento che porremo attenzione, che la legge medesima la quale sussidia mirabilmente la nostra intelligenza a rinvenire gradi supremi di piccolezza, la sussidia egualmente e mirabilmente anco a rinvenire gradi supremi di sempre nuove decrescenti quantità minori da proporre; quindi è, che anco per questo lato, non ci può la legge somministrare verun guadagno; infatti alla fin fine la legge geometrica non è e non può essere, che un mezzo efficacissimo a sussidiare la nostra speculazione, spingerla insino a limiti lontanissimi; ma poichè tal legge a questi limiti egualmente giova a trovar piccolezze sempre minori, e ad assegnarne di sempre minori ancora, e *così si faccia sempre;* perciò giova e non giova all'intento di dimostrare il teorema, anzi diviene affatto inutile il ricorrere alla legge per dimostrare il teorema.

60. Dal lato adunque della nostra percipiente attività, che è poi alla fin fine il lato unico che possa dar verità al teorema, il tentativo che la mente nostra può fare per vincere sè stessa nell'assegnare grandezze e nel diminuirle, diviene

puerilità. La ricerca adunque dimostrativa della grandezza minore di ogni proposta è pan perduto; e ciò tanto se si tenta in via pratica, cioè col mezzo di qualsivoglia legge geometrica, quanto se si tenta in via e modo al tutto razionale o soggettivo, o con elaborate speculazioni.

61. Che dobbiam dunque pensare del teorema di Euclide, che tende a dimostrare la esistenza della grandezza minore di ogni proposta, o di ogni altra? Che dobbiam pensare dei principii di Archimede che in sostanza mirano allo stesso intento? Chè, in somma del principio ammesso ed abbracciato da tutti gli antichi, ed ammesso e commendato quasi anco da molti dei moderni geometri?

Quando sarà che per legge razionale, o per forza di nostra potenza intellettiva potrem dire di esser noi pervenuti al ritrovamento di una grandezza che sia minore di ogni altra che si possa proporre? Quando sarà che rigorosamente si potrà riconoscere per eguale a zero, questa minor di ogni data anco nell'insigne ipotesi che si fosse rinvenuta? Ecco dei quesiti ai quali sforzandoci di far risposta piglieremo occasione di viemeglio renderci famigliari e persuasive le dottrine che sinora siam venuti esponendo.

62. Tuttavia questa grandezza minore di ogni altra proposta la si considera e la si ritiene di un valore nullo o eguale allo zero, ogni qualvolta la si pone a petto o la si mette in comparazione alla grandezza di valor finito. Tale è appunto il verace concetto del principio antico. Ora facilmente ci vien veduto, che tutto il valore, o tutta la verità di questo famoso principio, tutta dipende dal valore ipotetico, che ci piace di assegnare alla grandezza minore di ogni altra proposta. Dico valor ipotetico, perchè è cosa evidente che per ipotesi si può tutto quello che ci piace; e per ragionamento si può solo quello, che si dimostra, oppure ciò che è chiaro per sè stesso.

63. Qui parmi che alcuni diranno, che questa suprema piccolezza di cui parla Euclide, e che tutti gli altri intendono di esprimere con la grandezza minor di ogni proposta non si rinviene con la serie di diminuzione nè a poca distanza della sua origine, nè a molta, ma bensì alla fine della serie medesima, quando cioè è protratta, o si suppone protratta all'infinito. E difatti essi soggiungeranno: non è egli evidente che spinta la serie sino al suo supremo confine, anco l'ultimo termine di essa esprimerà una grandezza presso che annichilata, o cotanto stremata che rigorosamente si potrà ritenere per zero?

64. Per comprendere ben bene la forza di queste osservazioni, incominceremo dall'osservare che tanto gli antichi quanto i moderni loro fautori, quando vogliono appigliarsi a queste osservazioni ed a questi ripieghi, essi senza avvedersene si gettano in braccio all'ipotesi, e cercano appunto coll'ipotesi, e forse senza accorgersene, di giustificare e dimostrare un principio che spacciano come per qualche cosa di più, che per una pura ipotesi.

E che sia vero quanto diciamo, risulta aperto, quando si rifletta, che una legge di diminuzione la quale procede all'infinito, questa legge per sua intrinseca natura presenta una serie di diminuzioni interminabili, e assolutamente interminabili; dunque la opinione che questa serie possa arrivare all'infinito e se la possa suppor fin là protratta, è opinione al tutto insussistente, e che perciò non può essere ammessa che in via puramente ipotetica.

65. In ogni fondata filosofia siam tenuti a non equivocare tra il reale e l'ipotetico; anzi ogni buona filosofia ci impone l'assoluto precetto e dovere di ben distinguere l'uno dall'altro questi due differentissimi oggetti, o concetti mentali; quindi il fine di ciò che non ha nè può aver termine, non si presenta possibile, nè realmente, nè razionalmente, ma

rimane solo il libero arbitrio di volere, contro ogni ragione, supporlo, e la supposizione di poter arrivare all'infinita diminuzione per opera di infinito protraimento della serie operata sopra una qualunque grandezza finita, cosa ci presenta alla nostra percipiente attività? Nient'altro che la facoltà di supporre o ritenere di esser pervenuti a quella parte della grandezza finita, a quel supremo di lei primitivo ideale elemento il quale appunto per esser figlio ed ingenerato da infinite supposte diminuzioni consecutive, ci si presenta come infinitamente piccolo nel di lui valore. Posizione, o se più piace, conclusione armonizzante appieno con le antecedenti nostre osservazioni (num. 46), perfino nell' identità dei termini.

66. Inerendo per tanto all'ipotesi dell'ultimo residuo infitesimo, concetto il più verosimile che ci porge la ipotetica presupposta infinita diminuzione, per qual ragione potremmo noi dire, che questo infinitesimo sia identico con la grandezza minor di ogni proposta? Per qual motivo lo potremo noi ritenere e considerar come zero? Eccoci adunque anco dopo ardite ipotesi, eccoci collocati innanzi ad una incomprensibile proposizione, quella cioè, che l'infinitesimo si possa per legge rinvenire e che ammesso per ipotesi come rinvenuto, sia poi da aversi per eguale a zero?

67. Sia qui notato ancora che nella supposizione che abbiam fatto di poter arrivare coll'infinita diminuzione ad un residuo infinitamente piccolo o infinitesimo, noi abbiamo sorpassato un'altra possentissima difficoltà, quella cioè di supporre, che una grandezza finita a forza di passare per finite diminuzioni, e di lasciar sempre finiti residui, possa esser cacciata fuori dell'ordine finito.

In fatti se l'infinitesimo è un'entità non finita, ma bensì un'entità fuori dell' ordine finito, come ha essa mai potuto divenir tale in forza di una legge fondata su la essenziale

proprietà del finito, o sopra la natura del continuo, o sopra la infinita divisibilità?

Ma basti pertanto questo poco che abbiam detto intorno al principio antico. Ritorneremo soventi volte su lo stesso nel seguito di questa filosofia.

68. Proseguiamo ancor per poco ad esaminare altri pensamenti degli antichi relativi al medesimo principio, e che fanno comprendere in modo sensibile più particolarmente la nozione che essi ne avevano. Euclide esponendo dottrine comuni nel secondo teorema del libro duodecimo de' suoi Elementi si accinge a pruovare questa proposizione: = I cerchj sono fra loro come i quadrati dei loro diametri =. Nel primo teorema dello stesso libro duodecimo aveva dimostrato che: = I poligoni simili che si descrivono nei cerchj sono fra loro come i quadrati dei loro diametri =. Nel succitato secondo teorema vuol dunque pruovare, avverarsi pei circoli questa proprietà dei poligoni. Ma non rinvenendo via alcuna che direttamente condur lo potesse a dimostrare pei circoli questa proprietà, credette potervi arrivare indirettamente comparando il circolo col poligono.

69. Esaminiamo il suo ragionamento. Egli adunque inscrive un poligono nel cerchio, e col moltiplicare i lati di questo poligono inscritto vien diminuendo la differenza che esisteva tra i primi e pochi lati del poligono e la circonferenza. E postosi su la via della approssimazione, che sempre spinge innanzi colla moltiplicazione dei lati di questo poligono, si sforza ridurre la differenza finita e primitiva a sì tenue cosa od a sì stremato valore, che si abbia rigorosamente a considerare come una differenza minor di ogni proposta, per indi conchiuderne l'eguaglianza del poligono col cerchio, e quindi la comunanza della proprietà del poligono dimostrata nel primo teorema del sucitato libro.

70. Ognuno, per le ragioni sin qui arrecate può com-

prendere, come questa maniera di dimostrare non possa essere mai appieno rigorosa, e specialmente per la pratica e teorica impossibilità (alla quale si appiglia Euclide), quella cioè di ridurre a zero la differenza che esiste ed esisterà sempre eterna tra la retta e la curva. Poi ancora perchè la stessa via delle diminuzioni che risultano da questo metodo è sottoposta a legge geometrica procedente all'infinito e che mai può condurre allo zero, ma che anzi contiene l'assoluta dimostrativa impossibilità di pervenirvi.

71. Se la diminuzione anzi che progredire secondo legge geometrica si avverasse per salti ed in modo da prenderne parte aliquote della differenza, questa presto o tardi sarebbe esaurita, ma nel caso concreto di legge geometrica non si può mai arrivare a questo rigoroso esaurimento. Più, siccome ogni lato del poligono inscritto, riesce sempre una vera corda dell'arco circolare cui è sottopposto, e siccome la retta è sempre la linea più corta che congiunga i due punti estremi dell'arco, perciò è sempre impossibile che il lato del poligono possa confondersi coll'arco sopraposto, e siccome la linea più corta e breve è impossibile che sia eguale alla più lunga così anco per questa ragione non sarà mai fattibile di tor di mezzo rigorosamente questa differenza.

72. Di quì si vede, che il ragionamento di Euclide e comune all'antica geometria, si risolve in una pura approssimazione, e nulla più, e che il volerlo scambiare in una rigorosa dimostrazione è aperto inganno, è manifesto equivoco. È bensì vero che questa approssimazione può sempre divenire vie maggiore mano mano che si moltiplicano i lati del poligono, perchè ad ogni passo che si fa nella moltiplicazione di essi, si viene mordendo parte della differenza che passa tra le corde maggiori e le altre minori e successive; ma è sempre altresì vero, che ciò effettuandosi e

praticamente e razionalmente con legge geometrica questa non porge mai il mezzo di poter toccare rigorosamente lo zero sinchè la corda sarà più corta dell'arco cui è sottoposta.

73. È dunque sempre stato e sarà sempre un tentativo che inchiude aperta ripugnanza quello di credere, che il procedere innanzi colle diminuzioni per legge geometrica possa condurre allo zero o alla evanescenza rigorosa.

74. Supponiamo che la differenza primitiva che esisteva tra il poligono ed il cerchio, sia espressa dall'unità; sia poi che questa differenza si consideri quella che passa tra la lunghezza della curva colla retta, sia che si riferisca alla superficie compresa da queste due differenti linee. Questa nostra supposizione potrà apparire ad alcuni ardita e suppositizia, perchè a noi è ignota tanto la lunghezza della curva, quanto la consecutiva superficie che essa comprende. Tuttavia ci sia concessa questa ipotesi, almeno sotto l'aspetto che a noi non si può ricusare, cioè, di considerare o di esprimere in via ipotetica per l'unità questa differenza, giacchè qualunque essa siasi è una reale differenza, ancor che per noi tenga il luogo di un unità di valore incognito. Supponiamo ancora, per favoreggiar più che si può l'opinione o il pensamento di Euclide, supponiamo, dico, che al duplicare i lati del primitivo poligono inscritto si piglino $\frac{9}{10}$ della differenza che esisteva tra il dato poligono inscritto, e la circonferenza, supposizione esagerata, ma favorevole all'intenzione di Euclide. Egli è chiaro, che con le successive duplicazioni dei lati dei nuovi poligoni si farà lo stesso sopra le successive residue differenze; per cui averanno le diminuzioni di questa differenza espresse da questa convergentissima serie: $\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} +$ ecc., all'infinito.

75. A buon conto questa serie ci presenta sott'occhio una diminuzione rapidissima di tale differenza. Usando di argomento analogico ci pare che spinta questa diminuzione all'infinito debba somministrare il seguente finale risultamento:

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \text{ecc. ecc.} \frac{9}{\infty}$$; usando della ∞ per indicare l'infinito.

76. Intanto se in questa serie l'ultimo termine $\frac{9}{\infty}$ appare presentare il geometrico verace risultamento della serie delle diminuzioni protratte all'infinito, sotto di un'altro aspetto questo termine ci si presenta niente meno che impossibile, o almeno presenta l'aspetto di una inverificabile esistenza tanto pratica che teorica; perchè la esistenza di esso considerata come derivante dalla serie in discorso suppone finita e verificata tutta la esistenza dei termini della serie la quale sendo infinita si presenta anco nell'istesso tempo interminabile, inesauribile o impossibile a tutta verificarsi; e perciò lascia credere che l'esistenza di questo terminè faccia sì, che la serie sia e non sia infinita e che sia terminato ciò, che per esser infinito non può essere terminato.

Noi qui abbiamo ricavate e rimarchiamo queste induzioni con titubanza e con incertezza; ed acciò si conosca come questo contegno non si tenga noi per insipienza ma derivi dall'intrinseca oscura natura dell'oggetto che veniamo esaminando, sia osservato che, dopo il primo termine della serie, o dopo aver preso $\frac{9}{10}$ della differenza in discorso, noi abbiam ridotto il residuo della differenza ad $\frac{1}{10}$. Ma sia

notato, che questo $\frac{1}{10}$ si risolve nella seguente serie:

$\frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} +$ ecc. all' infinito; e volendo in questa ultima serie far valere la supposizione qui sopra ammessa, cioè che sia protratta all'infinito, allora l'ultimo termine di essa sarà $\frac{9}{\infty}$, come nella prima serie.

E siccome tutti i termini della serie, e tutte le espressioni numeriche esprimenti le successive differenze dei termini possono tutti indistintamente essere sviluppati in serie procedenti all'infinito e tutti incipienti da $\frac{9}{10}$ di ciò che valgono o che esprimono; così tutte vanno a finire all'infinito in $\frac{9}{\infty}$: quantità infinitamente piccola, e sempre identica in tutte le serie.

Quest' ultimo risultamento figlio della supposizione, che la serie infinita sia esaurita, presenta anch'esso in generale il supremo minimo valor possibile; e intanto non è cosa per sè evidente che di $\frac{9}{\infty}$ sono minori $\frac{8}{\infty}$; minori $\frac{7}{\infty}$ minori $\frac{6}{\infty}$ ecc. ecc.?

Ora dimandiamo noi, qual guadagno c'è a partire dall'unità, piuttosto che a partire

dal $\frac{1}{10}$, dal $\frac{1}{100}$, dal $\frac{1}{1000}$ dell' unità ecc. ecc.? certa-

mente nessuno; perchè tutti questi diversi valori primitivi la finiscono in uno identico finale risultamento. Intanto i termini delle diverse serie hanno tutti diverse ragioni o rapporti tra di loro; dunque anco la ragione del penultimo termine di ogni serie avrà bensì diversa ragione con quella dei termini dell'altra serie ma il penultimo di ogni serie avrà coll'ultimo (quando sia possibile) il rapporto identico che presentano tra di loro i termini della sua serie cui appartiene.

77. Più se tra tutti i termini di ogni serie esiste un rapporto sempre finito e costante, come vuole la legge, dunque anco dal penultimo all'ultimo vi sarà ragion finita costante, quindi un passo finito. Per qual motivo o ragione si potrà dunque quasi per salto passare dallo stato finito del penultimo, e con una diminuzione finita, la quale mai non assorbe tutta la entità del residuo, come mai si potrà di poi passare all'ultimo termine ch'è fuori della ragione o rapporto finito, e diventare infinitesimo? Ecco da quante dubitazioni ci troviamo assediati, da quante oscurità, da quante incongruenze!

Poi, dopo tutto questo, cosa abbiam noi in mano per darsi a credere d'esser in diritto di considerare questo infinitesimo finale delle serie come eguale allo zero? E finalmente come possiamo se non con insigne ipotesi considerare l'ultimo termine di una serie per affissarsi nel quale si suppone terminato l'infinito?

78. Tutte queste riflessioni acquistano ancora maggior peso e forza se ci facciamo a considerare la sterminata latitudine che aver possono i diversi valori finiti che attribuir si possono alla differenza delle grandezze che prendiamo in considerazione; li quali valori possono essere in confronto indefinitamente gli uni maggiori degli altri; per lo che anco una indefinita diminuzione pare che possa condurre appena

ad una sola piccolezza suprema dell'ordine finito. Un poligono piccolissimo può essere inscritto in un circolo piccolissimo, ed un poligono simile ma immenso può esser inscritto in un circolo grandissimo, come sarebbe un orbe celeste.

Ora la differenza del primo poligono al di lui circolo sarà tenue, benchè inassegnabile; e la differenza tra il gran poligono e l'orbe celeste sarà grandissima benchè parimenti inassegnabile.

Una egual legge di diminuzione, come può dunque ridurre all'eguaglianza i supremi residui operando identicamente sopra ambidue?

79. Dunque è per essere interminabile la infinita divisibilità, che il continuo pone in tutte le grandezze finite, senza alcun riguardo al loro intrinseco valore, e per tutte le addotte ragioni appare chiaro, che il metodo antico, col quale i geometri intendono di portare ad esaurimento una qualunque grandezza finita, pigliando successivamente e con legge geometrica le di lei parti, non sia metodo di rigore, ma bensì unicamente metodo appena di indefinita approssimazione.

80. Non vorrei però che con soverchia facilità il lettore si inducesse a pensare, che parlando noi in questa maniera del metodo antico intendessimo di screditare il principio antico, cioè: = che due grandezze le quali differiscono tra di loro solamente che per una differenza minor di ogni data o proposta, queste due grandezze sono eguali =; imperciocchè si deve riflettere, che il principio di cui si ragiona, può esser considerato sotto due ben diversi aspetti. Uno è quello nel quale si può credere che noi ci ponessimo a considerare avverato il principio, quasi sia fattibile in pratica o in dottrina di rinvenire questa grandezza minor di ogni data o proposta, o come sia possibile il provare che questa minor di ogni data sia effetti-

vamente eguale allo zero; l'altro aspetto e ben assai diverso è quello nel quale si ritiene in via ipotetica, o per pura ipotesi, la esistenza di questa grandezza minor di ogni proposta, e con altra pari e larga ipotesi la si ritenga eguale allo zero.

81. Il principio antico adunque considerato sotto il primo aspetto riesce un concetto assurdo impossibile, come abbiamo diffusamente provato sin qui; considerato poi sotto il secondo aspetto, cioè ammesso tutto ciò che contiene in via ipotetica, non presenta in faccia della filosofia altra difficoltà che quella di ogni altra ipotesi. Quindi è che si può avere per vero e per evidente quando sia considerato in questo stato tutto ipotetico.

Ma quando di questo principio, ammesso ipoteticamente per vero passiamo a considerarne la di lui pratica utilità, questa si manifesta assolutamente nulla in ogni concreto caso; perciocchè questa razionale ipotetica soggettiva nozione della grandezza minor di ogni data, è sempre infinitemente lontana dal reale verace stato della grandezza stessa, e quindi dalla base del reale dimostrativo. Per questo, quando in ogni particolare concreta dimostrazione, sia pur anco al tutto razionale ideale, nel dimostrar la quale si abbia bisogno di questa grandezza minor di ogni data ; e si abbia bisogno che questa sia uguale a zero, ben si vede, che tutta la dimostrazione si appoggia a queste due premesse, le quali non debbon essere in ogni concreto caso ipotetiche, ma bensì necessariamente reali per render reale la dimostrazione. Ora le ragioni irrefragabili fin qui da noi arrecate comprovando, che in niun caso concreto e pratico si può rinvenire l'esistenza reale della minor di ogni proposta grandezza, e molto meno la dimostrazione che questa poi sia uguale allo zero, ci fanno apertamente comprendere, che niun profitto si può da noi ricavare dall' enunciato antico

principio, vero ed evidente solo in via ipotetica ed ipoteticamente considerato.

82. I geometri antichi si sono accorti di questa verità, perciò si sono sempre data la briga di procacciarsi con geometriche speculazioni questa grandezza minor di ogni data, e parimenti di avere una dimostrazione che ella fosse uguale a zero. Ma dopo essersi lungamente affaticati circa questa ricerca essi non son pervenuti al bramato fine ed hanno lasciato o abbandonato la loro ricerca nelle oscure regioni dell' indeterminato e dell' indefinito. Han dovuto ricorrere alle diminuzioni fondate sopra leggi geometriche perchè con questo potessero spingere innanzi a lor beneplacito le diminuzioni, ma questa legge li tradiva; perciò alla fine han tentato con argomento apposito dedotto dall'assurdo di provare, che la minor di ogni data esister doveva e che era grandezza zero, ma l' argomento dall'assurdo buono in sè stesso, per il mal uso che ne fecero in questo caso, riusciva nelle loro mani inconcludente (come sarà provato in seguito); per la qual cosa essi non furono mai capaci di avere nè in pratica nè in dottrina avverate le basi del loro principio ipotetico, e quindi non ottennero nelle loro dimostrazioni verace, reale, rigorosa evidenza. Insomma come meglio sarà palese in seguito equivocarono confondendo l'ipotetico col reale, dando all'ultimo le prerogative esclusive del primo.

83. Per procurare di renderci sempre più famigliari questi ragionamenti, proviamo a cangiare il nostro metodo ed invece di proseguire la considerazione dell' impiccolimento di una grandezza finita; impiccolimento assoggettato a legge geometrica decrescente nel valore dei termini, facciamoci invece a considerare, se con aumenti fondati sopra legge simile si possa partendo dal finito aumentarlo sino al punto che diventi infinito. Il tentativo è affatto consimile e

potrà spargere non poca luce su quanto siamo sin ora venuti esponendo. Primamente pigliando le mosse dall'astratto o dalle considerazioni universali, vediamo se la nostra ragione possa intendere, che ponendo a lato od accrescendo una grandezza finita coll' aggiunta di altre grandezze pur esse sempre finite, questa data finita grandezza proposta divenir possa in forza di successivi continui aumenti infinita?

Ora per dire quello che appare affatto consono alla ragione ci sembra, che l'arrivare all'infinito sia cosa al tutto impossibile; poichè ad una grandezza finita e limitata unendone un altra pur finita e limitata, è lo stesso che dare alla prima maggior valore, ma in pari tempo è lo stesso che porre alla prima un limite finito benchè del primitivo più largo ed esteso; ora questo dilatar limiti ma porre sempre nuovi limiti, certamente che non armonizza coll'infinito.

84. Ma lasciando in disparte il puro astratto, e lasciando pure il parlare di aumenti progredienti in serie geometrica il che non è poco, e venendo poscia a più sensibile e pratico ragionamento domandiamoci, se è possibile coll'unione di quantità finite arrivare all'infinito?

La serie aritmetica dei numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. ecc., a qual limite finisce? A nessuno, ci si risponde. Anzi ci vien soggiunto esser questa serie riguardo a noi senza limite. In fatti per quanto non solo col fatto ma pur anco col pensiero si spinga innanzi questa serie non solo non si raggiunge questo limite, ma non possiamo ne men tampoco accorgerci di aver fatto un passo che vi ci abbia avvicinati, e appunto perchè questo limite non esiste, e si suol dire che questa serie va e procede all' infinito. Meglio però si direbbe che questa serie manca di fine. Ora finisca questa serie o non finisca mai, sì nell'uno che nell'altro caso basti sapere che non cangia di natura; cioè che i suoi termini

di lor natura essenzialmente finiti non cessano, nè mai cessar possono di essere finiti. Poi giova osservare che il primo termine di questa serie quanto il termine centesimo o millesimo o millionesimo sono nè più nè meno dell'ordine finito come l'unità che è il di lei primo termine; dunque nulla esiste nella serie che non sia finito. Arrogi ancora che secondo la comune opinione l'infinito è di natura diversa del finito, per cui così apparisce chiaro, che con qualsivoglia cumulo di finiti non si possa cangiar la natura del finito nell'infinito, come cosa affatto eterogenea all'idea o alla nozione di cumulo e di unione qualunque.

85. Ma ritornando in sul discorso della minor di ogni data grandezza o dell'infinitesima osserveremo, che il gran Galilei, allorchè riandava in suo animo queste considerazioni intorno al suo *indivisibile*, (il quale poi non era altro che la parte ideale infinitamente piccola, concepita in una grandezza finita qualunque), e quando pensava attentamente alla nozione dell'infinito, era solito proporsi queste dimande: quanti sono i numeri della serie aritmetica... 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ecc., ecc.? Tutti rispondono che sono infiniti. Quanti sono i quadrati corrispondenti a tutti i numeri di questa serie? Tutti rispondono, che sono tanti, quanti gli stessi numeri, perchè ogni numero ha il suo rispettivo quadrato. Quante sono le terze, le quarte, le quinte potenze ecc. dei numeri di questa medesima serie? Tutti rispondono, sono tanti, quanti sono i numeri della medesima, perchè ogni numero è suscettivo di tutte queste potenze. Infiniti dunque sono i numeri naturali o i numeri della serie 1. 2. 3. 4. 5. ecc., infiniti i quadrati, infiniti i cubi, le quarte potenze, ecc., ecc.; e intanto nei primi dieci numeri i quadrati sono tre soli, cioè l'uno, il quattro, il nove. Nei primi istessi dieci numeri, i cubi sono solamente due, cioè l'uno e l'otto; ed a mano mano che le potenze crescono, più e più rade sono le potenze alte in una data serie di numeri

naturali. Ma i numeri naturali sono infiniti, i quadrati infiniti, i cubi infiniti, e così via via di seguito; dunque nessuno di questi numeri è veramente infinito, perchè uno è continuamente maggiore dell'altro, ed anzi uno è incomparabilmente maggiore dell'altro.

86. Queste esorbitanze si fanno anco più manifeste se riflettiamo, che i quadrati 1. 4. 9. 16. 25. ecc. dei numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. ecc. possono essi esser ritenuti quali radici di altri quadrati; come pure i cubi 1. 8. 27. 64. ecc. dei numeri naturali 1. 2. 3. 4. ecc. posson esser ritenuti, come infatti lo sono radici di altri cubi; e così dicasi di tutte le altre superiori potenze indefinitamente.

Tutte queste dimostrative considerazioni, ponderate bene addentro presentano innanzi al nostro pensiero un campo cotanto vasto ed illimitato, che non vi si scorge verun confine, e nel quale ravvisiamo ed iscorgiamo una moltitudine indefinita di infiniti gli uni tutti diversi degli altri, e gli uni tutti maggiori degli altri. Ora chi mai fondandosi sopra ragionevole fondamento, chi mai oserebbe dichiarare alcuno di questi infiniti, veramente infinito? Non è egli aperta cosa, che quando l'animo volesse abbandonarsi a questa inconcludente maniera di pensare, cioè di considerar infiniti tutti i numeri e tutte le loro potenze relative, si troverebbe nell'identica posizione, nella quale si trova un uomo collocato in mezzo a vastissimo oceano, il quale dal suo luogo non iscorgendo verun confine del mare che lo circonda si permettesse ricavarne la illazione illegittima, che l'oceano manchi di confine, o meglio che sia infinito; e ciò perchè la potenza visiva è nell'impossibilità di scernere alcun confine, o alcuna limitazione? In fatti come al navigatore in mezzo all'oceano sfuggono tutti i confini delle acque, così nella regione del nostro pensiero, ed in quella delle nostre contemplazioni razionali si nasconde e si perde la

nozione del finito, e perciò solo illudendosi lo si considera quale infinito.

87. E per continuare ancora ad aggirarci intorno ad osservazioni tutte risguardanti l'infinito, osserviamo pure, che ponendo $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ec. ec., all'infinito, risulta con tutta facilità, che la unità numerica possa considerarsi come risultante da una infinità di parti diverse e tutte finite fino all'infinito, e perciò stando all'universale maniera di pensare, l'unità numerica si potrebbe appellare e ritenere come infinitamente grande, stante che infiniti finiti si ritengono formare l'infinito. Ora non è egli evidente cosa che due unità presenteranno per questo motivo due infiniti, tre ne daranno tre, e così via via di seguito; onde un numero composto di indefinite unità darà un infinito indefinitamente maggiore di un'altro? Se dunque queste induzioni, che discendono legittime dalle concesse posizioni, sono induzioni affatto prive di verità ed anzi offendono perfino il buon senso, non diventano adunque una prova, indiretta bensì, ma convincentissima, che queste maniere di idearsi, o di concepire lo infinito sono manchevoli al tutto, ed anco ripiene di oscurità ed apertamente inconcludenti?

Di qui si rende palese, che la serie delle diminuzioni proposte da Euclide e da Archimede le quali appunto si fondano sopra nozioni o concetti simili a questi, di poter cioè pervenire verso l'infinito, ed a questo supremo limite alla minore di ogni data, all'evanescenza ecc., queste serie di diminuzioni, diciamo, benchè in apparenza sostenute da un'imponente apparato di ragionamento, tuttavia sono ripiene di oscurità, e si presentano anco inconcludenti nelle ultime conseguenze che se ne ricavano. E in vero, potendo così fatte diminuzioni essere indistintamente praticate sopra gran-

dezze indefinitamente diverse, anzi le une incomparabilmente maggiori delle altre, e conducendo alla fin fine tutte al medesimo risultamento, o alla identica finale conclusione, non è manifesto, che sono in esse delle oscurità che non sappiamo rischiarare?

88. Volendo per altro procurare di spiegare l'origine e la genesi di queste oscurità, pare sia essa riposta nella seguente equivocazione, che da noi si commette allorquando tentiamo accostarci all'infinito od allo zero, adoperando l'aumento del finito o l'impiccolimento dello stesso; imperciocchè questa è maniera che ha fondo e pone radice nel finito, s'aggira sempre nel regno del finito, ed è sempre sostenuta dai soli mezzi e proprietà rispondenti alla natura delle grandezze finite; dal che ne conseguita per innegabile illazione, che anco dopo tutti gli sforzi che speculando faremo per procacciarsi la nozione dell'infinito o dell'evanescente, con questi mezzi inetti e tutti presi a prestito dal finito, questi nostri sforzi non ci guideranno ad una nozione corrispondente all'infinito; del quale sebbene non ne abbiamo veruna adequata cognizione, tuttavia comprendiamo che essa deve esser molto da più che dell'ordine e stato del finito. La qual ultima proprietà dell'infinito comparata appunto con le induzioni procedenti dal finito, e tutte tinte dalla stessa pece del finito, si manifesta in grande disarmonia anzi in tutta sconvenienza colla natura e proprietà del finito e sue derivazioni.

89. Sebbene il sin qui ragionato possa esser considerato in gran parte sufficiente a farci comprendere quale e quanta sia la filosofia che esiste in queste nozioni che i geometri tentano formarsi dell'infinito, e coi mezzi da essi proposti ed immaginati per arrivarvi, tuttavia si prega il benigno lettore a seguirci ancor per poco nell'intrapreso cammino, ed a ritornare nuovamente sopra questo oggetto cotanto delicato e superiore alle forze umane.

Ripigliamo in considerazione lo scompartimento indefinito o meglio infinito dell' unità numerica, scompartimento che alla buona si ritiene come espresso dall'equazione esposta al num. 87. Più siaci permesso indicare la grandezza detta e ritenuta minor di ogni data o proposta col segno, adesso generalmente convenuto, per indicare la grandezza infinitamente piccola, il qual segno è $\frac{1}{\infty}$; e per indicare lo infinito siaci dato usare del segno ∞, sicchè si dica $\frac{1}{\infty}$ grandezza minor di ogni data, ∞ e grandezza maggior di ogni data.

Ciò presupposto, supponiamo una grandezza qualunque data e finita in diminuzione; anzi facciamo che già sia sottoposta a diminuzione la stessa unità numerica, giacchè il ragionamento è lo stesso, e la conclusione è la medesima. Per maggiormente rendere le nostre considerazioni adatte ed appropriate alla maniera degli antichi, piglieremo nell'incominciamento ed in seguito nelle nostre diminuzioni la regola proposta da Euclide, e poco più poco meno in massima comune ad Archimede e ad altri. Col primo passo adunque di diminuzione dell'unità, noi ne piglieremo la metà e qualche cosa di più, e così faremo sempre col primo, col secondo, e con tutti i successivi residui.

Ciò inteso, incominceremo ad esporre la serie degli impicciolimenti dell' unità col prenderne di essa $\frac{2}{3}$ parti; poi un'altra serie col prenderne $\frac{3}{4}$ per primo passo; poi $\frac{4}{5}$; poi $\frac{5}{6}$ ecc. come segue:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} \text{ ecc. ecc. } + \frac{2}{\infty}\text{; poi}$$

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} \text{ ecc. ecc.} \qquad + \frac{3}{\infty}\text{ ; poi}$$

$$1 = \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} \text{ ecc. ecc.} \qquad + \frac{4}{\infty}\text{ ; poi}$$

$$1 = \frac{5}{6} + \frac{5}{36} + \frac{5}{216} \text{ ecc. ecc.} \qquad + \frac{5}{\infty}\text{ ; poi}$$

$$1 = \frac{\infty - 1}{\infty} + \frac{\infty - 1}{\infty^2} + \frac{\infty - 1}{\infty^3} \text{ ecc. ecc.} + \frac{\infty - 1}{\infty^\infty}.$$

Tutte queste serie rappresentanti diversi modi di scompartimenti della stessa unità, e tutti fondati su la legge euclidea, scompartimenti conformi pienamente anco alle nozioni di Archimede, non che dei moderni geometri, tutte queste serie, diciamo, dalla prima all'ultima tendono con grandissima celerità a presentare un esaurimento per parti del valore dell'unità, e ad avvicinare all'esattezza le presenti equazioni.

Ora quale di queste serie, deve secondo la più ovvia significazione arrivare più presto alla consunzione dell'unità? Certamente che tutti dobbiamo convenire, esser quella che procede a passi più grandi, vale a dire, quella nella quale i termini presentano parti più grandi dell'unità medesima.

Ammessa questa semplice ed apertissima massima si vede con tutta facilità, che nell'ultima serie, fino dal primo termine, si piglia tutta la unità, meno unicamente la parte di essa che si ritiene minor di ogni data o proposta. Tutte queste serie governate da una stessa legge geometrica, progettata ed usata da Euclide contengono tutte dei termini esprimenti da principio parti dell'unità continuamente maggiori, incominciando dall'ultima e venendo sino alla prima; dunque è di tutta evidenza, che le successive alla prima hanno più rapido progresso verso la consunzione dell'unità. Tuttavia stando al modo di parlare degli antichi e dei moderni, ed

alle dottrine universalmente professate, tutte queste serie e perfino l'ultima vanno all'infinito; il che vuol dire, che contengono tutte un'infinito numero di termini aventi nella loro riunione lo scopo di consumare e rappresentare a forza di successive continue diminuzioni tutto il valore dell' unità. Dunque, se tutte solamente spinte all' infinito raggiungono l'impiccolimento della unità, impiccolimento voluto perchè l' ultimo residuo sia minor di ogni data, non è chiaro che nulla significa e nulla ottiene la loro diversa forza di impiccolire la unità? Dunque si viene ad ammettere, che sia lo stesso prenderne poca parte, o gran parte dell' unità, e che procedere a passi di gigante, o spiccar voli d' aquila si arrivi nè più presto, nè più tardi alla minor di ogni data, di quello si faccia da chi procede lentamente a passi di lumaca o strisciando come rettile sul nudo terreno.

E qui non vorrei che il lettore si desse a credere, che ragionando a questo modo si proceda un poco troppo alla buona e si faccia mal governo della legge euclidea, perchè chi la pensasse così, si ingannerebbe a partito. E in vero, ponga di grazia attenzione al teorema euclideo antico, e dicami, se annunciato com' è dal suo autore in modo pienamente generale e con espressioni al tutto indeterminate ed astratte, non debba abbracciare ed effettivamente abbracci, non solo le serie accennate, ma anco infinite altre consimili? Se adunque l' estensione illimitata del teorema si estende, ed abbraccia tutte le serie di diminuzione per quantunque tra di loro diverse e differenti nella loro capacità a diminuire l' unità, e se per questa differenza delle progressive diverse diminuzioni ci troviamo condotti in mezzo a delle incongruenze ed in mezzo alle oscurità, per qual motivo non si vorranno rifondere delle gravi dubitazioni sul principio in discorso, o sul contenuto del teorema, segnatamente quale ci viene proposto?

90. Io invito i filosofi pensatori ed i geometri a rischiarare tutti questi dubbii ed a sbandire queste incongruenze.

Nell' ultima serie l'equazione $1 = \frac{\infty - 1}{\infty} = 1 - \frac{1}{\infty}$ ci da per posizione ipotetica arbitraria l' unità eguale a sè stessa meno una grandezza minor di ogni data o proposta; e stando al principio antico, si ha l'unità rigorosamente eguale all' unità, perchè queste due grandezze o queste due unità non differiscono tra di loro che per una minore di ogni data.

Ma si dirà, che in quest'ultima serie il valor del primo termine presenta l'unità intiera, meno una parte inassegnabile, che è zero perciocchè questa serie suppone quello che si tenta rinvenire con le altre; io convengo che in questa tutto è supposto, e che a rigor del teorema, questa sarebbe esclusa; e l'averla qui voluta riportare non fu per una svista, ma sibbene per far conoscere e porre sott'occhio, che tutte le altre serie abbracciate dal teorema non arrivano mai a questo supremo valore, ma per volontaria posizione siamo sempre astretti a supporlo. In fatti in questa ultima serie tutto è supposizione, ma supposizione non contraddicente ad alcuno principio, laddove nelle altre serie non si sa ove rinvenire questa minor di ogni data, o di ogni assegnabile. Esse solamente ci fanno conoscere, che tutti i valori dei termini delle diverse serie sono fra loro diversi, e che diversi sono anco tutti gli ultimi. Eppure gli ultimi dovrebbero essere tutti perfettamente eguali alla minor di ogni data, e quindi eguali fra di loro. E perchè? perchè ove ci accostiamo al valore minor d'ogni data e al valore evanescente, o meglio infinitamente piccolo, ci accostiamo ad una nozione per noi incomprensibile, e vi ci si accostiamo con mezzi inetti, e con serie che non sono abbastanza appropriate.

Miglior partito adunque fia quello di supporre ipoteticamente questa suprema entità, giacchè rinvenirla per veruna via non si può. La minor di ogni data, o di ogni assegnabile sia dunque d'ora innanzi del tutto supposta.

91. E qui sia notato, come la rettitudine del principio ipotetico di cui parliamo per poter esser sostenuto in faccia alla ragione, deve esser enunciato in modo, che la minor di ogni data (la quale in seguito chiameremo per brevità col nome di inassegnabile) vi sia supposta intieramente, e non vi sia posta come oggetto da rinvenirsi, e nè tampoco da potersi rinvenire, tanto con metodo alcuno pratico, quanto con metodo speculativo, poichè a rinvenire, od a potere rinvenire questa inassegnabile non esiste alcuna maniera escogitabile.

Dalla necessità nella quale ci troviamo di dover supporre questo principio o questa base antica e di doverlo porre come oggetto puramente ipotetico ne viene, che come tale non può mai esser applicato a veruna dimostrazione reale concreta, se prima della applicazione non ci siamo in via di realtà, e non di ipotesi procacciata questa inassegnabile; altrimenti ogni dimostrazione non può mai passare dallo stato ipotetico al concreto reale, senza che concreta e reale non sia la minor d'ogni data.

Nè si pensi che le dimostrazioni geometriche, tanto aritmetiche che lineari o superficiali, ecc., siano dimostrazioni astratte generiche in modo che non possano, e non debbano esser considerate come concrete, lo che sarebbe un'altissimo inganno; giacchè siano pur esse, e generali ed astrattissime, tuttavia le loro speciali proprietà sono sempre quantità e grandezze particolari concrete quantunque ideali, e puramente ideali e razionali: imperciocchè sotto la denominazione concreta sono comprese tutte le dimostrazioni di qualsivoglia proposizione, problema, lemma o teorema, senza

alcuna eccezione; sendo che ogni proposizione sotto qualunque nome presenta delle verità singolari concrete.

92. Così v. g. nei ragionamenti relativi alle proposizioni dimostrate da Euclide, da Archimede e da altri, ed in massima a tutte quelle che hanno direttamente o indirettamente appoggio nell'antico principio della inassegnabile, sia poi che risguardino il rapporto della retta con la curva od altro, si comprende, che il suddetto principio non può esser applicato se non in via ipotetica quando non sia dimostrato esistere questa inassegnabile in via concreta e pratica; onde insino a tanto, che il detto principio è ipotetico, ipotetica ed inconcludente in concreto caso riesce ogni dimostrazione particolare. Perciò quando noi veggiamo gli antichi in queste loro indagini e ricerche far uso dell'ipotetico principio per istabilire e determinare delle concrete proprietà possiam sempre ritenere, che in verità non fanno altro, che abusare dello stesso principio ed illudersi.

Questo irragionevole procedimento di dimostrazione non conviene però attribuirlo agli antichi, perchè essi furono anzi i primi a cercare di evitare questa incongruenza logica, in quanto che credettero poterlo rinvenire con la via delle diminuzioni e quindi di procacciarsi con queste una inassegnabile teoretica e concreta in pari tempo. Il sin qui detto però manifesta apertamente, come non riuscirono nell'intento di procacciarsi questa minor di ogni data; e perciò si rende manifesto, come le loro dimostrazioni peccassero non in rigor di logico discorso, ma bensì in difetto di sufficienti ed appropriate basi.

Altro difetto si appalesa pure in molte dimostrazioni antiche e segnatamente in quelle nelle quali essi si accinsero a discoprire il rapporto che passa tra la retta e la curva, poichè qui, oltre la difficoltà di rinvenire la inassegnabile, s'incontrarono anco in un'altra, di supporre cioè un rapporto

tra grandezze non solo eterogenee ma di natura affatto diversa.

93. Nè basta a tôr di mezzo tanta e sì grande sconvenienza di idee, che rende incerti ed oscuri questi pensamenti degli antichi, il dire, che quando essi comparavano la retta alla curva, non ponevano direttamente in comparazione la retta alla curva, ma bensì lo spazio compreso dalle rette, con lo spazio contenuto dalle curve; e siccome lo spazio è simile a sè stesso, ovvero è tutto omogeneo e di una stessa natura, così la comparazione può aver luogo sotto questo riguardo. Perchè primamente non è vero che gli antichi intendessero di comparare spazio con spazio, atteso che Euclide ed Archimede parlano, e si occupano molto del rapporto tra il diametro v. g. ed il circolo, il che vuol dire espressamente, che tanto in questo caso, come nella ricerca delle proprietà di altre curve per parte specialmente di Archimede, essi avevano di mira ed effettivamente comparavano linee con linee, cioè rette con curve.

Poi, lo spazio che posson chiudere e che effettivamente chiudono le linee rette, è spazio per noi appieno noto, mentre all'invece lo spazio che posson chiudere ed effettivamente chiudono le curve, è spazio per noi ignoto nella sua precisa quantità. Dunque sebbene lo spazio sia tutto omogeneo a sè stesso, e perciò di natura sua sempre comparabile ad un'altro spazio, tuttavia ciò non può mai avverarsi di uno spazio noto con un altro spazio ignoto. Allorquando dunque gli antichi geometri tentano comparare lo spazio chiuso dalle rette con quello compreso dalle curve, ragionano male per il motivo, che manca sempre ad essi il verace e positivo fondamento della comparazione, giacchè questo fondamento è appunto riposto necessariamente nella piena cognizione dei due spazii che tra di loro si pongono in comparazione.

94. In questo luogo si presenta il bisogno di sciogliere

un' altro dubbio, o meglio, rimane da assolvere gli antichi geometri da una taccia, che indirettamente loro si farebbe con il discorso tenuto nel paragrafo precedente, di ritenere cioè, che essi comparassero lo spazio chiuso da rette con quello chiuso da curve; perchè, a dire la verità, essi non meritano questa taccia. Ed in vero essi comparavano spazii chiusi da linee rette o da poligoni, con altri spazii parimenti chiusi da linee rette o da poligoni, onde tali spazii erano sempre appieno noti e perciò effettivamente comparabili; perchè essi assiepavano le curve, dentro e fuori con delle linee rette o con dei poligoni, e commisurando gli spazii degli inscritti con quelli dei circoscritti si sforzavano dedurne lo spazio compreso dalla curva, pensando giustamente che lo spazio compreso o chiuso dalla curva giacesse tra questi noti spazii dei poligoni, e mediasse tra i limiti degli stessi loro spazii. Ma si deve osservare, che in questa loro maniera di accostarsi alla cognizione del quantitativo dello spazio chiuso dalla curva si appalesa un' altro difetto del metodo antico, ancor esso capace a far vedere, che essi si ponevano sopra una via la quale non era sicuramente via di rigore, e che perciò non poteva mai guidarli a rigorosa determinazione dello spazio curvilineo.

95. E in vero, si deve considerare, che questo loro metodo di cercare, cioè di conoscere lo spazio chiuso da una curva, coll'avvicinarlo agli spazii noti dei poligoni interni ed esterni, non riusciva ad altro che ad un metodo di approssimazione; imperciocchè anco nella più favorevole ipotesi, in quella cioè, che il valor dello spazio compreso dal poligono interno riesca poco diverso dallo spazio del poligono esterno, e quindi si abbiano in questo caso due spazii nel loro valore assai vicini all'eguaglianza, tuttavia il darsi a credere di abbattersi per questo nello spazio misurato dalla curva, e ciò col prenderne un valor medio, o uno spazio medio tra i due spazii noti

dei poligoni, questo è metodo che assolutamente manca di verace rigore; difatti niuno può dire, nè stabilire, che la curva chiusa in mezzo dai due poligoni interno uno ed esterno l'altro, occupi precisamente il corso di mezzo tra i due poligoni che la comprendono, e mancando di questa necessaria cognizione o condizione, manchiamo di ogni rigor dimostrativo in tale sorta di ricerche.

Di più ci convien pensare, che le periferie dei poligoni stanno tra di loro come i quadrati dei loro diametri (ciò che elegantemente vediamo dimostrato da Euclide, prop. 1.ª lib. 10, de'suoi preziosi elementi), la qual circostanza o verità ci fa conoscere, che il pigliarne una media tra le superficie dei due poligoni, non è metodo geometrico adatto a rinvenire rigorosamente nemmeno il valore del poligono medio, il quale abbia precisamente una periferia media o equidistante dai limiti o poligoni di comparazione. Dunque il voler tentare di cogliere il valor della periferia curvilinea (e qui si tratta di coglierlo con rigore) col far uso di un mezzo che non è capace nè atto a determinare con rigore neppure la periferia media di un poligono rettilineo, appalesa un procedimento di dimostrazione assai lontano dal pieno verace rigore dimostrativo, ed anche in sè stesso difettoso.

Finalmente convien pensare, che tanto nell' antica matematica, quanto nella moderna, la natura della curva non è mai stata nemmeno definita, e forse non lo può essere con precisione, e che non la si distingue dalla retta se non perchè procede innanzi o si distende la curva nel di lei corso fuori dell'andamento della retta, qualunque poi sia il grado del di lei discostamento che segue al di fuori della retta medesima. Euclide parlando della linea circolare dice nella 15.ª definizione: = il cerchio è una figura piana contenuta da una linea che si chiama circonferenza, alla quale quante linee rette pervengono tirate da un punto che è dentro la

figura sono tutte fra loro eguali =. In tutto il lib. 3.° degli Elementi ove tratta dei cerchj, non dà niuna definizione della linea circolare o curvilinea. Lo stesso dicasi del lib. 10.° e 13.° degli stessi Elementi.

96. Essendoci proposti in questo capo di tener ragionamento dell'infinito matematico, potrà apparire, che con queste ultime considerazioni ce ne siamo scostati; tuttavia sguardando per entro alla natura di queste speculazioni, le quali tendono a far conoscere metodi di indefinita o infinita approssimazione, e mirano a discoprire i rapporti della retta con la curva, rapporti che non si possono ben precisare per la infinita distanza ove son riposti, facilmente si conoscerà, che continuamente ci siamo aggirati intorno a nozioni risguardanti l'infinito.

Il continuo dà vita all'infinita divisibilità delle grandezze; questa divisibilità tende direttamente a guidarci ai supremi costitutivi della grandezza medesima; ma questi costitutivi come quelli che dipendono dall'infinita divisibilità si presentano a noi come collocati ad infinita distanza. I mezzi, e pratici e razionali che sono in nostro potere, non valgono a condurci a questa ultima distanza; perchè la stessa infinita divisibilità che traduce l'animo nostro su una via interminabile, lo abbandona in sull'intrapreso cammino, e con in mano mezzi insufficienti a tutto percorrerlo. Quale è adunque la nozione che noi ci possiamo procurare dell'infinito, della minor di ogni data e della infinitamente piccola grandezza? Chi mai può additarci con precisione quale essa sia? Questa nozione è per noi come in fondo ad un'abisso profondissimo del quale siamo impossibilitati a scandagliarne tutta la profondità e tutta la sua estensione. Che cosa ci rimane adunque a fare? Senza rispondere a quest'ultima dimanda, vediamo cosa fa la nostra intelligenza irrequieta e mal sofferente rispetto a questo insuperabile ostacolo. Essa si libra sulle ali del suo

pensiero, e sorvola, o almeno suppone di aver sorvolato questo insuperabile abisso, e trasportatasi al di là di esso, almeno in via ipotetica, la nostra intelligente attività, dimanda a sè stessa, quale idea mi sarei io formata della infinita divisibilità e dell'infinito, se avessi potuto arrivare a questi oggetti cotanto lontani? Ma anco dopo sì ardita supposizione, può essa arrivare poi a formarsi un'idea di queste inaccessibili nozioni? No certamente. Che fa ella dunque? Postasi una volta in sulla via delle ipotesi, in via parimenti ipotetica, e più che essa sa immaginare al vero consentanea, ne deduce per approssimazione quelle induzioni che scenderebbero rigorose e legittime quando avesse di queste inaccessibili nozioni un'idea verace ed adequata. Questo è l'unico mezzo che sia in di lei mano; questa è l'unica via che resta aperta alla nostra attività dopo i più arditi sforzi che ha saputo tentare.

L'infinito si ammetta, come meglio si può conoscerlo, e lo si ritenga in via ipotetica; la minor di ogni data si ammetta in via ipotetica, e quale alla meglio si può concepire. In via ipotetica la si ritenga anco eguale allo zero, in confronto della grandezza finita.

E così entrato l'animo, seguendo la sua irrequieta intelligente attività, nel mondo delle ipotesi, spazii a suo talento liberamente per esso. Noi ritorneremo in progresso sopra la considerazione della filosofia che si ritrova in queste insigni ipotesi.

97. Se qualcheduno non avesse presenti i principii e le dottrine usate da Archimede nelle sue ammirabili opere a noi pervenute, potrà forse dubitare che il nostro dire risguardi più presto le dottrine di Euclide anzi che quelle di Archimede. Perciò crediamo ben fatto di qui arrecare un cenno dei principii di questo sommo, e con sufficiente latitudine, a fine di poter far conoscere, che li ragionamenti da noi ado-

perati, comprendono tanto le dottrine euclidee quanto quelle di Archimede.

98. Archimede adunque nella sua prima proposizione dice: = La linea retta è la più corta di tutte quelle che si posson condurre a due estremità =.

99. Nella proposizione terza scrive: = Due quantità ineguali essendo date, è possibile di ritrovare due rette ineguali delle quali la ragione della più grande alla più piccola sia minore della ragione della più grande quantità alla più piccola =.

100. Nella proposizione quarta, pone: = Due quantità ineguali ed un circolo essendo dati, è possibile di inscrivere un poligono in questo circolo, e di circoscriverne un' altro di maniera, che la ragione del lato del poligono circoscritto al lato del poligono inscritto sia minore della ragione della più grande quantità alla più piccola =.

Nella proposizione quinta, soggiunge: = Due quantità ineguali ed un settore essendo dati, è possibile di circoscrivere un poligono a questo settore, e di inscrivergliene un altro di modo che la ragione del lato del poligono inscritto sia minore della ragione della più grande quantità alla più piccola =.

101. Proposizione sesta: = Un circolo e due quantità ineguali essendo date, circoscrivere a questo circolo un poligono e inscrivergliene un' altro, di maniera che la ragione del poligono circoscritto al poligono inscritto sia minore della ragione dalla più grande quantità alla più piccola =.

Proposizione settima: = Bisogna dimostrare che dati, un circolo ed un settore e una superficie, si può circoscrivere a questo circolo, a questo settore un poligono di modo che la somma dei segmenti del poligono circoscritto sia minore della superficie data. Mi sarà permesso di applicare al settore ciò che ho detto del circolo =.

PRINCIPII.

102. Principio primo: = Due linee che sono in un piano, e che hanno le medesime estremità, sono ineguali quando l'una e l'altra sono concave dalla medesima parte, e che una è compresa tutta intiera dall'altra, e dalla retta che ha le medesime estremità di quest'altra; ovvero quando una non è compresa che in parte, e che il resto è commune; la linea compresa è la più corta =.

Principio secondo: = Quando due superficie hanno lo stesso limite in un piano, la superficie piana è la più corta =.

Principio terzo: = Due superficie che hanno i medesimi limiti in un piano sono ineguali quando esse sono l'una e l'altra concave dalla medesima parte, e che l'una è compresa tutta intiera dall'altra e dal piano che ha i medesimi limiti di quest'altra; ovvero quando una non è compresa che in parte, e che il resto sia commune, la superficie compresa è la più piccola =.

103. Peyrard nella sua pregiatissima versione fatta in lingua francese di tutte le opere d'Archimede, dice: = Egli è col mezzo di questi tre principii (de' quali nessuno sino ad Archimede aveva fatto uso) che questo geometra di Siracusa fece fare alla geometria degli avanzamenti dei quali la antichità rimase sorpresa e stupefatta, e che anco al presente riescono di ammirazione. Senza questi tre principii gli sarebbe stato impossibile fare alcuna scoperta sublime, a meno che non avesse ricorso alla considerazione dell'infinito: vale a dire, a meno che esso non avesse considerato una curva come l'unione di un'infinità di linee rette, ed un solido di rivoluzione, come un poliedro terminato da una infinità di superficie piane, o come essendo un'unione di un'infinità di tronchi di coni =.

Ma gli antichi erano alieni dall' ammettere simili supposizioni, e anco ai nostri tempi si incomincia a non voler più ammettere consimili considerazioni almeno negli elementi delle matematiche. Archimede non si è data briga di dimostrare i tre principii dei quali ha fatto uso, perchè è impossibile il dimostrarli, quando non si voglia adoperare la considerazione dell'infinito.

Eutochio e molti altri geometri lo han tentato invano.

Facendo uso della considerazione dell' infinito ci contentiamo di dire: circoscriviamo al circolo un poligono regolare di un' infinità di lati; questo poligono sarà eguale ad un triangolo rettangolo di cui uno dei lati dell'angolo retto sarà eguale al raggio, e di cui l' altro sarà eguale al contorno di questo poligono. Ma un poligono regolare di un'infinità di lati circoscritto ad un cerchio è eguale a questo cerchio; dunque il cerchio è eguale al triangolo. Questa dimostrazione è semplice e facile. Ma è essa senza replica? soddisfa al nostro intendimento? No certamente. Questa seconda maniera è fondata sopra questo principio: = Due quantità che non differiscono che infinitamente poco una dall'altra, sono eguali fra di loro =. Il nostro intendimento mal si presta a questo principio, e gli riesce impossibile riconoscere, che due cose siano eguali, intanto che una è più grande dell' altra. Ella vede che un circolo non potrebbe esser eguale ad un poligono che gli è inscritto, o circoscritto =.

104. Meditando intentamente sopra le proposizioni ed i principii qui ricordati veniamo facilmente a conoscere, che le proposizioni sono tutte dirette a preparare la via a poter considerare eguali tra di loro quelle grandezze, la differenza delle quali può sempre esser ridotta ad essere minore di ogni data o proposta, come appunto dice potersi sempre fare di tutte quelle che egli si pone a considerare nelle sue proposizioni medesime, le quali non avendo mai alcun valore

concreto e fisso, ma anzi avendone uno sempre all'in tutto indeterminato, si prestano perciò a tutti i contingibili stati dei diversi valori della grandezza, e quindi a poter stabilire, che di qualunque proposta grandezza la quale presenti una data differenza comparata che sia ad un'altra minore se ne possono sempre assegnare due altre, delle quali la differenza o la ragione loro sia minore. Per lo che si appalesa manifestamente, che tutte queste proposizioni conducono e si appoggiano nè più nè meno, nelle dottrine euclidee, al principio ricordato num. 46, cioè che due grandezze sono tra di loro eguali quando non differiscono che di una quantità minore di ogni data.

105. I principii poi si appoggiano tutti sopra la proposizione prima, cioè che la linea retta è la più breve di tutte quelle che si possono condurre a congiungere due punti, o due limiti dati. Egli è dunque fuor d'ogni dubitazione, che anco le dottrine fondamentali di Archimede intieramente si rifondono sopra i pensamenti degli altri e segnatamente di Euclide; quindi è cosa per sè manifesta, che le osservazioni fatte sinora, e tendenti a dimostrare il valor dei principii di quest'ultimo, coi debiti riguardi sono pienamente applicabili ai fondamentali principii del siracusano. Questo sommo geometra però si presenta più riserbato e circospetto nell'annunziare queste sue prodrome nozioni, perchè usa della parola è *possibile,* laddove Euclide parla più positivamente e dice si può, quasi alluda ad una realtà di fatto, forse anco in pratica effettivamente eseguibile.

Il tenue guadagno però che si appalesa nelle posizioni di Archimede svanisce completamente ogni qual volta si viene a qualche concreta dimostrazione, poichè in allora la voce è *possibile* deve tramutarsi in un bel si può reale ed effettivo, altrimenti la dimostrazione non può mai esser rigorosa, ed in vera logica fondata.

106. Il celebre storico delle matematiche, Montucla, quando riferisce il metodo tenuto dai geometri moderni (benchè tal metodo si ritrova in molta parte anco in Euclide), quello cioè di considerare il circolo e le altre curve, non che la superficie ed i solidi, il primo come un aggregato di lati rettilinei infinitamente piccoli, le seconde come risultanti da linee paralelle, e li terzi da piani, o superficie sottilissime, dice: = È un introdurre negli elementi di una scienza, della quale i principii debbon essere infinitamente chiari, una nozione oscura, o per lo meno sottoposta a mille quistioni metafisiche più o men fondate. Queste espressioni di infinitamente piccoli, di poligoni risultanti da una infinità di lati, ecc. ecc., non sono che maniere abbreviate di ragionare, inventate per evitare un lungo ragionamento, necessario però se si vuol convincere forzatamente uno spirito cavilloso =.

107. Questi pensamenti del citato celebre storico si presentano assai poco consoni alla verace filosofia, perchè tenderebbero a far credere, che gli infinitesimi ed il loro uso servano solamente ad abbreviare il ragionamento, come pure i calcoli degl' infinitesimi non giovino che allo stesso scopo della speditezza dimostrativa, insinuando epressamente il pensiero, che con lungo e penoso ragionamento si possa sempre dimostrare, e forse con più di rigore tutte le proposizioni e tutti i problemi, che si dimostrano coi principii degli infinitesimi, o col calcolo detto differenziale. Ora questo pensamento di Montucla è un vero abbaglio, e nel progresso di questa filosofia matematica si vedrà quanto un tal pensiero sia lontano dal vero.

108. Ma ritornando col nostro dire ai geometri antichi convien confessare, che le dimostrazioni loro fondate sopra gli accennati principii (prescindendo dal difetto sopra ricordato, e che sarà più manifesto in progresso) e segnatamente quelle dell' incomparabile Archimede sono bellissime

e commendevolissime, anzi ammirabili per esattezza di induzioni, per la perspicacia di ingegno con cui sono guidate a compimento. La ammirazione dei dotti è stata portata a sì alto grado, che diversi di essi e di grande fama hanno pensato, che il siracusano abbia dato queste dimostrazioni geometriche sotto di un' aspetto diverso da quello dal quale egli era stato guidato al loro ritrovamento; anzi ritengono che altrettanto debba ritenersi anco per riguardo a molte dimostrazioni di altri grandi geometri.

Roberto Simson, chiaro traduttore dei due libri di Apollonio, che trattano dei luoghi piani, è di parere, che gli antichi conoscessero l' analisi algebrica, e che di questa si siano serviti nel fare le loro grandiose scoperte (e ciò specialmente intorno le sezioni coniche) e che essi abbiano soppressa al pubblico e tacciuta allo stesso quest' arte onnipotente per dare del maraviglioso ai loro trovati. E tale suo parere lo pone in bocca ai geometri del suo tempo scrivendo: = Recentiores postquam veterum in theorematum et problematum demonstrationibus et constructionibus perspecuitatem et elegantiam cognoverunt, recte quidem concluserunt, artem analyticam magnopere ab iis excultam et promotam fuisse; veteres autem artem hanc sedulo occuluisse recentiorum multi non inepte omnino asseruerunt =. Glascuae 1749.

109. Franciscus Schooten in tractatu suo de *concinnandis demonstrationibus*, Amstelodami, anno 1661, impresso de geometris veteribus ita scribit: = Id unice studuisse videntur, quo sua inventa, eorumque demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum quo ea ipsa invenerint, ac demonstrationibus munierint, prorsus supprimerent et absconderent.

Et Petrus Schooten frater Francisci suam sententiam sic exprimit: = Neque Franciscus dubitabat quin pleraque

omnia quæ væteribus tantum gloriæ peperissent analyseos ope et beneficio reperta essent: sed quæ illi, ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio et suppresso, vulgari tantum syntheseos forma exibuissent. Sed cum veterum dissimulatione factum videret hunc analyticæ methodi præstantem usum non modo a multis ignorari et negligi, sed ipsam ejus certitudinem ac evidentiam a nonnullis suspectam haberi, atque adeo soli synthesi miserando labore inhærercetur, consultum judicavit =.

Nonio è parimenti di questo parere, come si conosce da quanto scrive: = Quam bene foret si qui in scientiis mathematicis scripserunt auctores, scripta reliquissent inventa sua eadem methodo. et per eosdem discursus, quibus ipsi in ea primum inciderunt... neque putandum est plurimas Euclidis et Archimedis propositiones fuisse ab iis ea via inventas qua nobis illi ipsas tradiderunt =.

110. Qual che sia il peso che meritano queste opinioni di uomini per il loro vasto e profondo saper matematico assai rispettabili, quello che è certo si è, che esse confermano l'alta opinione che questi dotti avevano della sagacità e profondità del sapere degli antichi geometri. Ciò che qui merita di esser precipuamente notato si è, che la filosofia dei principii adoperati è una e sempre la stessa, sia poi che per questi loro trovati abbiano fatto uso della sintesi geometrica o dell'analisi algebrica. Nel progresso si vedrà che la filosofia degli antichi non era però gran fatto diversa in molte parti da quella dei principii nuovi, sopra dei quali si fonda il calcolo differenziale o calcolo sublime, eccetto che i principii nuovi, suppongono intieramente la infinitesima, e sono appoggiati a più precise e determinate nozioni.

111. Si deve ancora notare, che Archimede nelle sue dimostrazioni ha fatto uso del metodo delle *esaustioni* e dei *limiti*, il qual metodo poi venne dai posteri illustrato, adoperato

e tenuto in grande estimazione; e l'ultimo specialmente è divenuto per lungo tempo ed è anco di presente quasi metodo di *moda* per una gran parte di rinomatissimi geometri. Noi ne tratteremo in progresso di quest'opera, ed assai diffusamente.

112. Per anticipare qui un motto di prova che Archimede sia il verace inventore di questi due metodi, osserveremo, che quando egli inscriveva e circoscriveva dei poligoni ai circoli e moltiplicava i lati di questi poligoni indefinitamente, veniva a stringere ed a serrare questi ultimi addosso ai circoli, e ad accostare le rispettive superficie dei poligoni cotanto a quelle che eran chiuse o contenute dai circoli, che apertamente mirava a due cose; cioè con una si riduceva a considerare il circolo qual limite del poligono esterno che continuamente si accostava al circolo diminuendo di periferia e di superficie a mano che i suoi lati andavano crescendo, e lo stesso circolo qual limite anco del poligono interno il quale pure col moltiplicare i suoi lati, s'accostava al circolo tanto nella sua periferia quanto nella sua superficie, senza però che nè l'interno, nè l'esterno potessero mai pareggiare rigorosamente il circolo medesimo. Ecco adunque come in teorica ed in pratica dava vita o creava questo *metodo dei limiti.* Con la seconda presentava una nuova risorsa di comparare le grandezze tra di loro quando la loro preesistente differenza finita era sottoposta all'esaurimento o meglio alla consunzione; nel qual'ultimo punto di veduta intellettuale consiste appunto il metodo appellato di *esaustione.*

113. Sino a che però gli antichi considerarono le grandezze minori di tutte le date, e sino a che Archimede col metodo dei limiti supponeva la grandezza o differenza finita impiccolita al punto da esser divenuta minor di ogni data, o assegnabile, era sempre possibile il concepire, che risalendo da questo supremo stato, ritornando su tutti i passi

che servito avevano all'impiccolimento in discorso, era, dico, possibile ritornare precisamente alla grandezza finita che era stata sottoposta all'impiccolimento di cui si parla.

Ma quando nel metodo delle esaustioni: questo residuo di grandezza se lo voglia considerare di un valore evanescente e rigorosamente nullo, appare che manchi pienamente il poter da questo stato di *nullità* incominciare il primo passo per ritornare risalendo a ricomporre la grandezza finita.

Questi due metodi però, non che gli elevati concetti sopra dei quali si fondavano, contenevano sublimi nozioni, perchè mostravano la grandezza come risolubile in infinite parti insino a quelle che riuscivano minori di tutte le assegnate, quindi si veniva con questo modo ad ammettere nella grandezza finita il carattere o la qualità di essere cioè un risultamento, o un cumulo indefinito di supremi elementi generatori di essa.

Queste alte speculazioni promovevano non poco la scienza geometrica, ma nelle mani degli antichi non erano che lampi di luce passeggera, ed alli quali non si diede tutta quella estensione di dottrina che acquistarono in seguito.

CAPO QUARTO

Commensurabilità ed incommensurabilità delle grandezze geometriche, ovvero della loro simetria o asimetria.

114. Prima di metter fine al discorso della filosofia della matematica antica, porremo qui un cenno delle dottrine sopra delle quali i geometri antichi hanno fondata la commensurabilità e la incommensurabilità delle grandezze, indicando essi anco la prima col nome di *simetria*, e la seconda con quello di *asimetria*.

Si ricordano qui succintamente queste loro dottrine, non già perchè risguardino unicamente queste sopra accennate relative proprietà delle grandezze, ma specialmente perchè in ultimo risultamento esse sono dottrine che vanno spesse fiate a toccare l'infinito e ad urtare nella nozione di questo incomprensibile concetto, e cosi quasi a far parte dei ragionamenti trattati nel capo precedente.

Queste dottrine le troviamo in Euclide, e precisamente nel libro decimo de'suoi Elementi. Questo grande geometra in una delle definizioni a questo suo libro, scrive: = Commensurabili si chiamano le grandezze, le quali da una istessa o medesima misura sono misurate =. E nella seconda definizione dice: = Incommensurabili si chiamano quelle grandezze delle quali non si trova misura commune =.

115. La prima definizione è chiara per sè stessa, ed evidente e felicemente espressa.

La seconda dà luogo a doppio significato; perchè dire, che non *si trova misura commune,* si riferisce tanto al fatto

di non rinvenirla, quanto alla possibilità di non poterla rinvenire. In fatti una misura commune potrebbe esistere, e noi non essere capaci coi nostri metodi che conosciamo di ritrovarla, o di discoprirla; e potrebbe anco essere, che a certe grandezze, per lor natura risguardate, fosse assolutamente ripugnante. Quest'ultima maniera appunto di non esistere per alcune grandezze geometriche commune misura, pare che sia quella intesa e contemplata da Euclide in questo suo libro.

116. Onde accostarsi al merito filosofico di queste due proposizioni, conviene incominciare dal porre attenzione, che tanto la simetria, quanto la asimetria delle grandezze sono delle qualità o proprietà non intrinseche alle grandezze medesime, ma sibbene delle qualità o proprietà relative ad esse ed al nostro intendimento; imperciocchè sì l'una che l'altra di queste qualità, non esprimono qualche cosa al di là di una semplice relazione estrinseca delle grandezze istesse, relazione estrinseca, che hanno cioè ambedue con questa commune misura.

E per restar noi appieno convinti di ciò, non abbiamo se non a pensare, che vi sieno o si possano imaginare delle grandezze geometriche le quali non possono esser misurate da una data o scelta misura, o da una terza grandezza, mentre le grandezze medesime posson essere esattamente misurate da un'altra misura o grandezza misurante.

117. Però queste proprietà simetriche o asimetriche delle grandezze ricordate nelle surriferite definizioni sono poco consentanee alle dottrine anteriormente ricordate dal medesimo Euclide. Perchè primamente la commune misura è lasciata in queste due definizioni affatto indeterminata e quindi considerata in modo che pare possa avere qualsivoglia valor grande, piccolo, od ordinario. Ciò presupposto sia notato, che Euclide aveva insegnato a ridurre qualsivoglia grandezza, (esprimente qualunque differenza tra due altre grandezze

diverse) a sì piccola entità da riescire minore di ogni data o proposta. Ora una proposta grandezza acciò possa essere considerata qual commune misura di altre grandezze, conviene, che non abbia un valor maggiore della grandezza più piccola, che deve esser misurata, ma fa d'uopo all'invece che lo abbia o eguale, o minore. E siccome quanto più piccolo si imagina esser il quanto della misura, essa tanto più facilmente può prestarsi a misurare esattamente anco le tenui particelle della grandezza che deve esser misurata, così ne viene, che quando la misura fosse scelta incomparabilmente minore della grandezza da misurarsi, allora meglio si adatterebbe al fine prefisso, di misurare cioè esattamente tutta la grandezza proposta che intendiamo di misurare, e ciò specialmente allorquando (come nelle definizioni di Euclide) le grandezze proposte da misurarsi possono esser tra di loro indeterminatamente di valor diverso; nella qual condizione tutti li casi contingibili costituenti questa loro diversità comprender possono anco le più piccole particelle della diversità delle grandezze commensurabili. Ora ciò premesso di leggeri si conosce, che scelta a caso, o per volontaria determinazione una misura piccolissima, questa messa che sia alla prova, sia teoricamente sia praticamente in su le grandezze da misurarsi, essa o misurerà esattamente ambedue le proposte grandezze, o non misurerà esattamente le stesse. Nel primo caso, questa sarà misura commune, e perciò potremo stabilire, che le due diverse grandezze proposte sono simetriche. Nel secondo caso converrà appigliarsi ad una misura commune di valore anco più piccolo, e così proseguendo tentone, provare successivamente queste sempre più minute misure communi. Si dice provar tentone, perchè un metodo diretto non si conosceva, nè si conosce attualmente in matematica; e non si saprebbe come nemmeno possa essere conosciuto insino a tanto che si lasci indeterminato il valore

della differenza delle grandezze che si voglion misurare. Che poi in forza del valore indeterminato di queste diverse grandezze noi ci troviamo in necessità di andar tentone in questa faccenda, se lo comprende palesamente dal metodo insegnato e tenuto anco dallo stesso Euclide; imperciocchè egli per trovare la commune misura di due proposte diverse grandezze adopera la più piccola di esse per misurare la più grande, e se avviene che quella non misuri esattamente l'ultima, in allora adopera il civanzo che rimane della tentata divisione o misura, il quale è sempre minore di essa, e questo civanzo, dico, lo adopera per misurare le due grandezze proposte, e così egli prosegue. Dunque con questo metodo pratico egli tenta di conoscere questa commune misura, il qual metodo è precisamente quello detto di andar tentone.

Ma ritornando al nostro scopo principale, cioè alla considerazione, se filosoficamente parlando, due o più grandezze abbiano o possano avere una commune misura, noi comprenderemo, che mano mano si va innanzi con questo procedimento tenuto ed insegnato da Euclide, noi ci siamo posti su la via di indefinite prove rispondenti all'indefinita piccolezza che viene assumendo la misura commune per vedere se in alcuno di questi successivi sempre più piccoli stati sia capace di misurare esattamente le proposte grandezze.

Ora essendo con tal maniera noi entrati in su una serie di sempre provati e decrescenti valori della misura ci accorgiamo di esserci nè più nè meno posti in su la via medesima delle diminuzioni proposte da Euclide per ridurre una grandezza finita ad essere minor di ogni assegnata; perciò comprendiamo, che può nascere il caso che non si trovi mai piccola misura che sia capace a misurare rigorosamente le due o più proposte grandezze avanti che essa non sia di valore minor di ogni data od assegnata. Ma pervenuti una volta che siamo a questo supremo stato di impiccolimento

nella misura, ben si vede che una misura minor di ogni data grandezza deve, per forza di posizione, prestarsi a misurare qualsivoglia grandezza finita proposta, quale che ne sia la di lei entità. Altrimenti quando dopo aver tentata questa misura non riuscisse la commisurazione rigorosa delle grandezze, si avvererebbe, che di questa minor di ogni data, ne esisterebbe un civanzo ancor più piccolo di essa, il che implicherebbe assoluta ripugnanza di posizione ammessa.

Questo giusto ragionamento, che alla fin fine non è altro, che l'espressione di legittime induzioni procedenti dai principii professati da Euclide, fa comprendere apertamente, che nelle dottrine di questo grande geometra regnano sconvenienze di idee; poichè esso pone nel decimo libro la definizione seconda destinata a stabilire che si diano delle grandezze incommensurabili o asimetriche.

Anzi per far vedere come tale sconvenienza di idee regni nel suo insegnamento, si riporti qui quello che dice nel teorema 2.°, proposizione 2.ª del medesimo libro 10.° degli Elementi, nel quale scrive: = Se proposte due grandezze disuguali e tratta sempre la minor dalla maggiore, la rimanente non misuri quella che le va innanzi, le grandezze saranno incommensurabili =.

Nel teorema 1.°, prop. 1.ª dice: = Proposte due grandezze disuguali se dalla più grande si tragga una parte maggiore della metà, e da quello che rimane, similmente si tragga una parte maggiore della metà, e ciò si faccia sempre, alla fine rimarrà una certa grandezza la quale di ogni minor grandezza proposta sarà minore =.

118. Che che però ne sia di questa assoluta asimetria che da Euclide par si voglia in questo libro riconoscere, ci basti l'aver notato, che difficilmente si può asserire che esista, e certamente, che non può esser dimostrata. Il fatto si è ancora, che ragionando sui principii di Euclide questa asi-

metria relativa può esistere come è quella della diagonale al lato del quadrato, però questa asimetria particolare non serve di alcuna prova per l'esistenza di un'asimetria assoluta; ma piuttosto serve a provare, che si possono scegliere anco a beneplacito delle grandezze le quali siano asimetriche in comparazione di altre.

In onta di queste osservazioni non si sa comprendere come Comandino celebre commentatore di Euclide, dopo anco aver ornato il testo del greco geometra di bellissime cognizioni abbia potuto dichiarare nell'edizione eseguita in Urbino, 1575, che: = Le grandezze commensurabili sono tali di loro natura e non per posizione degli uomini =, (quasi che gli uomini possano trasportarsi fuori del loro interno modo di vedere e di conoscere, e con tal passo, a noi impossibile, rendersi capaci a contemplare le grandezze nella loro natura, e indipendentemente dalla forma nostra intellettuale); ed indi soggiunga: = Se la natura fa il diametro del quadrato asimetrico al suo lato, non lo fa per caso, ma per le ragioni che sono in esso =. Ove non si sa comprendere quali ragioni possano esistere le quali per noi siano qualche cosa di più del non trovare simetriche queste due grandezze. È forse dimostrata da qualcheduno questa asimetria assoluta di queste due quantità? Chi può asserire che essa non dipenda dalle nozioni che noi abbiamo del quadrato, e dalla nostra maniera di considerarlo costituito, e dal nostro modo di trattarlo?

119. = I pitagorici (prosiegue Comandino) furono i primi che siano venuti in considerazione della simetria o commensurabilità per la cognizione dei numeri; conciosiachè l'unità sia misura comune di tutti i numeri, e nelle grandezze la misura trovar non si possa =. Ma Comandino doveva pensare, che le grandezze numeriche sono sempre determinate nei loro elementi, anzi non sono altro che un cumulo più

o men grande di questi omogenei elementi detti unità, mentre le altre grandezze geometriche, come le lineari, le superficiali, le solide, ecc., sono da noi considerate e prese astrattamente e senza alcun riguardo alle unità elementari omogenee che possono esser concorse a formarle. Per questo i numeri intieri sono tutti commensurabili dall'unità, la quale per nostra arbitraria posizione è sempre parte aliquota perfetta di ogni numero.

Tutta questa singolare simetria dei numeri svanisce però quando non siano ristretti alla condizione di esser intieri, perchè quando si voglia pensare alle unità frazionarie che posson esser concorse a formare un numero, allora tutto cangia di aspetto.

Ora in tutte le grandezze geometriche astratte e concrete, noi siamo all'oscuro circa la loro formazione o composizione, e non sappiamo nulla oltre il loro carattere del continuo, loro appropriato, il quale le rende infinitamente divisibili; perciò il dire e pronunciare di loro che non hanno questa comune misura, ella è questa una proposizione, che per verun conto non può esser provata nè resa chiara, e perciò rimane sempre una gratuita sentenza che può esser contradetta.

Siccome però la ricerca della simetria risguarda una proprietà al tutto relativa, ma fondata nella costitutiva formazione della grandezza, formazione da Euclide sempre lasciata nella regione degli enti indeterminati, perciò è facile l'accorgersi, che la nostra ricerca s' aggira sopra elementi indeterminati, e non può mai condurci a determinata positiva asserzione, o conclusione risguardante la esistenza della simetria, o asimetria.

Quando adunque noi cerchiamo una commune misura di due proposte diverse grandezze, noi cerchiamo sapere, se le stesse risultino o no di un dato e determinato numero di unità

elementari perfettamente tutte eguali tra di loro, e concorse in diversa quantità a costituire le due scelte o proposte grandezze. In questa ricerca adunque quest'unità vi è supposta e solo resta a sapersi o pure a supporsi il di lei valore; perchè insino a tanto che il di lei valore restasse indeterminato, niuno può pronunciare un giudizio intorno alla di lei qualità commisurante. Tale grado di determinazione deve dunque precedere in ogni concreta ricerca, anco relativamente alle grandezze medesime, quantunque si cerchi la misura anco tentone o per via di prove.

Considerando l'asimetria sotto questo punto di veduta razionale, non si sa comprendere, come essa divenir possa impossibile neanco relativamente; e tutte le volte che ci piaccia considerare ogni cosa sotto di un'aspetto indeterminato parimenti non si scorge, come possa dirsi impossibile una relativa simetria delle grandezze.

Quello però che apparisce chiaro intorno a questa relativa proprietà si è, che se una grandezza v. g. composta da cento eguali parti, può esser esattamente misurata da ognuna di esse, questa misura non varrà a commensurare esattamente un'altra grandezza composta di cento parti, più una mezza di queste parti. Intanto ognuno intende, che pigliando per unità elementare la metà parte di queste particelle, questa metà misurerà esattamente le due grandezze.

120. Tutto questo meglio si intende ritornando ai numeri, perchè ognuno d'essi essendo l'aggregato di un concreto numero di unità tutte tra loro omogenee ed eguali ne viene, che ogni numero è necessariamente commensurabile dall'unità. Ma questa simetria dei numeri svanisce quando li supponiamo risultanti da unità intiere e da frazioni di esse; e molto più se queste frazioni si ritengano o si voglian considerare in una maniera indeterminata; poichè in tal caso potendo esprimere o rappresentare qualsivoglia particella dell' unità,

ne viene, che tal frazione aggirandosi in un campo infinito di frazionarii valori avrà in moltissimi casi la sua simetria perfetta e ne mancherà in moltissimi altri.

121. Da queste considerazioni siam guidati quasi per mano a conoscere, quale sia la nozione che noi possiamo formarci della simetria e dell' asimetria, tanto dei numeri che delle altre grandezze. In pari tempo si comprende, che quando la formazione tanto dei numeri quanto delle grandezze derivar si voglia dai loro supremi elementi generatori, ognuno di questi diviene necessariamente comune misura, e risospingono l'idea dell'asimetria tra i concetti inamissibili.

122. Non si può dunque convenire in tutto ciò che dice Euclide, e meno poi col seguente parere di Comandino, il quale riportando la opinione dei pitagorici, scrive: = Ma la grandezza divisa in infinito non lascia particella alcuna la quale perchè sia minor di tutte non si possa segare; anzi quella segata infinitamente fa infinite particelle, ciascuna delle quali infinitamente si segherà. E la grandezza in quanto si divide è partecipe del principio infinito, e in quanto appartiene al tutto è partecipe del termine. Ma il numero in quanto si divide è partecipe del termine, e in quanto appartiene al tutto è partecipe dell'infinito. Perchè dunque bisogna che le misure siano minori delle cose che sono misurate, ed ogni numero è misurato, è necessario che la comune misura sia minore di tutti. E nel numero si trova la comune misura per esser terminato, come fu detto, ma nelle grandezze non si trova.

E perciò non è di tutte le grandezze una certa misura comune; il che intendendo i pitagorici, trovarono nelle grandezze la misura come meglio fu possibile. E che nelle grandezze non fosse questa comune misura, pare che la deducessero dalla infinita loro divisibilità, la quale essi la provavano col dividere un triangolo equilatero con una linea

paralella alla base; poichè così spartito rimaneva un triangolo parimenti equilatero, e facendo lo stesso su questo secondo, ancora rimaneva un triangolo equilatero; e siccome così facendo non si perviene mai alla cima del triangolo, perchè nella ipotesi che si pervenisse alla cima, ne seguirebbe che due lati del triangolo fossero eguali al rimanente, il che è impossibile; dunque credevano, con questo, aver dimostrato che le grandezze erano infinitamente divisibili, quindi ben differenti dalla natura del numero divisibile per mezzo dell'unità =.

123. L'idea dei pitagorici: = Che la grandezza divisa in infinito non lascia particella alcuna la quale perchè sia minor di tutte non si possa segare, anzi quella segata fa infinite particelle delle quali ciascuna infinitamente si segherà =, è un'idea cotanto sublime, che nulla di più elevato si è potuto imaginare dai filosofi. In fatti questa idea contiene non solo la possibilità dell'infinita divisibilità, ma la porge bella e fatta in idea, e non contenta di questo inchiude anco un giudizio assai rimarcabile, quello cioè, che le parti tenuissime risultanti da questa infinita divisione, non perdano la proprietà di essere esse medesime novellamente sempre divisibili in infinito; e ciò per la ragione, che niuna piccolezza può privarle di questa infinita divisibilità, o ciò che significa lo stesso, perchè la grandezza in ogni stato e valore conserva intiera la proprietà essenziale del *continuo*.

124. Ora, come meglio sarà manifesto in progresso, in questi concetti sono contenute ed espresse le dottrine di Newton e specialmente di Leibnitz, le quali appunto ammettono le infinitamente piccole quantità, e queste pure sempre divisibili in altre anco infinitamente più piccole, e così sempre in infinitesime di successivi decrescenti ordini. Così che la grande e la sublime veduta intellettuale di quest' ultimo era di già sparsa e rilucente nella filosofia della scuola pita-

gorica. Questa insigne scuola antica ha anticipato anco molti altri sublimissimi concetti risguardanti le leggi cosmologiche e le sublimi meccaniche.

Noi per altro riandando gli insegnamenti di questa scuola veniamo a provar meraviglia, come dopo aver insegnato dottrine sì alte ed elevate non abbia saputo rinvenire in esse la comune misura di tutte le grandezze geometriche, la quale spontanea si scorge esistere in queste infinitesime particelle, e ciò appunto per la ammirabile ed incomprensibile loro tenuità, e consecutiva attitudine o capacità a misurare qualsivoglia possibile grandezza. Ma essi andarono illusi da un sofisma, ed il sofisma consisteva nella infinita divisibilità del triangolo, dalla quale ne ricavavano inesattamente la illazione, che se la divisione del triangolo avesse potuto aver fine ne sarebbe derivato, che due lati divenivano eguali al terzo, il che apertamente ripugna; non badando essi in questo loro ragionamento, che la infinita divisibilità del triangolo dipendeva dalla infinita divisibilità de' suoi lati per la quale si potevan condurre infinite paralelle alla base, e non dipendeva già dal sognato assurdo, cioè che un lato del triangolo sarebbe eguale agli altri due; in fatti finita che fosse per ipotesi la divisione del triangolo e pervenuti con essa alla di lui consunzione, o come suol dirsi arrivati al vertice del triangolo, il triangolo più non è, perchè giunti ad un punto unico che ne segna il vertice; quindi non esistendo più il triangolo diventa un puro sogno anco la ripugnanza posta in campo dai pitagorici.

Ponendo peraltro in comparazione i pensamenti di questa pitagorica famosa scuola con le dottrine insegnate dagli altri geometri è facile il comprendere che, vi sono messa slanci sublimi accompagnati e frammisti a numeriche trivialità; poichè si fa spesso uno scambio sconvenevole delle grandezze numeriche con le grandezze geometriche, mentre in fondo

sono tutte grandezze astratte e geometriche. Così v. g. intanto che ritengono, che le unità numeriche sono dotate della proprietà del continuo, pare che nelle pratiche ricerche perdano di vista questa solenne proprietà. Per ravvicinare però alcun poco le sparse idee qui ricordate intorno la simetria od asimetria, diremo, che la simetria ha luogo per tutte le grandezze che si considerano come risultanti o ingenerate da principii costitutivi omogenei. Per quanto poi concerne la asimetria, pensando a questa in concorso delle elevate nozioni che a noi suggerisce e manifesta la proprietà del continuo, noi conosciamo di non esser capaci a pronunciare un fondato giudizio circa l'esistenza assoluta dell'asimetria; difatti quando a noi fosse dato di sollevare il velo che ci ricopre i primitivi generatori delle grandezze, noi vedremmo avverata la simetria di tutte le grandezze; ma nella impossibilità in cui siamo di conoscere pienamente questi primi generatori, noi dobbiamo sospendere il giudizio su queste relative qualità delle grandezze.

CAPO QUINTO

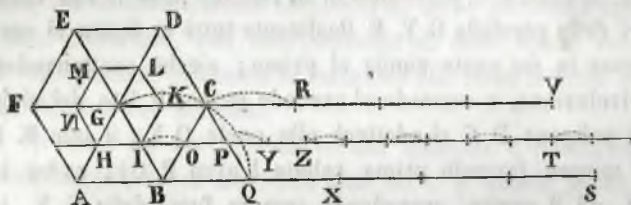
Riassunto delle nozioni che precedettero la scoperta del calcolo sublime.

125. Dal sin qui detto si può conoscere, quale e quanta fosse la filosofia delle matematiche, tanto in mano di Euclide, che di Archimede, dei pitagorici e d'altri; dopo questi sommi filosofi non appare alcuno che siasi tanto alto elevato da cangiare e perfezionare le loro dottrine sino alla venuta di Galileo Galilei. Questo sommo filosofo e matematico, che alle matematiche riuniva dottrine profonde in filosofia comune e specialmente in fisica, in meccanica, in astronomia, si accorse che era omai tempo di vincere e superare quella ripugnanza che gli antichi geometri manifestavano per la nozione dell'infinito, e del consecutivo infinitamente piccolo, in quanto discendeva dall'infinita divisibilità fondata nella proprietà del continuo. A lui piacque di denominare quest'ultimo stato infinitamente piccolo della grandezza col nome di *indivisibile.* E colta opportuna occasione ne'suoi discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed ai movimenti locali, nella prima giornata ove espone i suoi pensamenti in dialoghi, nei quali sono interlocutori *Salviati*, *Sagredo e Simplicio* si accinse a dimostrare, come per legge del continuo da tutti ammessa senza veruna restrizione, la nostra intelligenza veniva guidata ad ammettere non quella sola indeterminata grandezza che gli antichi appellavano minore di ogni data od assegnata, ma sibbene la mente nostra veniva forzata da legittima indu-

zione a riconoscere una grandezza *indivisibile* o infinitamente piccola.

Nessuno proverà meraviglia che noi ci fermiamo a Galilei, come ad un'epoca intermedia tra le dottrine dell'antica filosofia e quelle della moderna analisi infinitesimale, perchè le dottrine di questo gran scrittore sono quelle le quali più apertamente di tutte le altre fissano le basi della nuova analisi sublime, e riescono come un'anello intermedio il quale lega l'antica colla moderna filosofia; ed è a credersi che probabilmente senza le scoperte sublimi di Galilei, si sarebbe anco protratta la scoperta della nuova analisi superiore.

E perchè ognuno comprenda quanto sia fondata nella verità questa nostra asserzione, riporteremo qui alcuni tratti contenenti le peregrine vedute di Galilei, dalle quali sarà palese quanto abbia meritato dalla scienza geometrica, e quanto abbia preparata la scoperta dell'analisi sublime.

Nelle sue dimostrazioni intorno a due scienze nuove s'accinge a dimostrare, come la infinita divisibilità conduca all'*indivisibile* nella seguente maniera:

(Salviati). Intendiamo un poligono equilatero ed equiangolo di quanti lati esser si voglia descritto intorno al centro G, e sia per ora un esagono A B C D E F, simile al quale e ad esso concentrico, ne descriveremo un'altro minore H I K L M N; e del maggiore si prolunghi un lato A B indeterminatamente verso S; e del minore il rispondente lato H I sia verso la medesima parte similmente prodotto, segnando

la linea H T, paralella alla A S, e pel centro passi l'altra G V alle medesime equidistante.

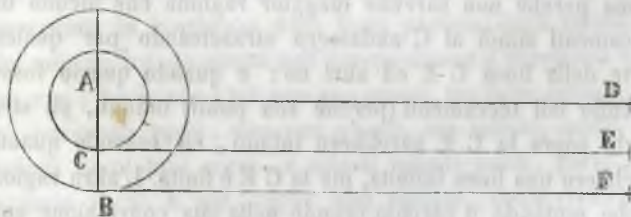
Fatto questo, il maggior poligono rivolgasi sopra la linea A S, portando seco l'altro poligono minore; è chiaro, che stando fisso il punto B, termine del lato A B mentre si comincia la rivoluzione, l'angolo A si solleverà, e il punto C si abbasserà, descrivendo l'arco C Q, sinchè il lato B C si adatti alla linea a sè stesso eguale B Q: ma in tal conversione l'angolo I del minor poligono si eleverà sopra la linea I T, per essere la I B obliqua sopra la A S: nè prima tornerà il punto I su la paralella I T, se non quando il punto C sarà pervenuto in Q, allora l'I sarà caduto in O dopo di aver descritto l'arco I O fuori della linea H T; ed allora il lato I K sarà passato in O P. Ma il centro G frattanto avrà camminato fuori della linea G V su la quale non sarà tornato se non dopo aver descritto l'arco G C. Fatto questo primo passo, il poligono maggiore sarà trasferito a posare col lato B C su la linea B Q. Il lato I K del minore sopra la linea O P, avendo saltato tutta la parte I O senza toccarla. Il centro G pervenuto in C, facendo tutto il suo corso fuori della paralella G V. E finalmente tutta la figura si sarà rimessa in un posto simile al primo; sicchè continuandosi la rivoluzione, e venendo al secondo passo, il lato del maggior poligono D C si adatterà alla parte Q X; il lato K L del minore (avendo prima saltato l'arco P O), cadrà in Y Z, ed il centro, procedendo sempre fuori della G V, in essa cadrà solamente in R dopo il gran salto C R. Ed in ultimo finita una intiera conversione, il maggior poligono avrà calcate sopra la sua A S sei linee eguali al suo perimetro senza veruna interposizione, il poligono minore avrà parimenti impresse sei linee eguali all'ambito suo, ma discontinuate dall'interposizione di cinque archi sotto i quali restano le corde, parti della paralella H T non tocche dal poligono;

e finalmente il centro G non è convenuto mai con la parallella G V, salvo che in sei punti.

Di qui potete comprendere, come lo spazio passato dal minor poligono è quasi eguale al passato dal maggiore, cioè la linea H T alla A S, della quale è solamente minore, quanto è la corda di un di questi archi; intendendo però la linea H T insieme con gli spazii dei cinque archi.

Ora questo, che vi ho esposto e dichiarato nell'esempio di questi esagoni, vorrei che intendeste accadere di tutti gli altri poligoni di quanti lati esser si vogliano, purchè siano simili, concentrici e congiunti: e che alla conversione del maggiore s'intenda rigirarsi anco l'altro, quanto si voglia minore; e che intendeste, dico, le linee da esso passate essere prossimamente eguali, computando nello spazio passato, dal minore gl'intervalli sotto gli archetti non tocchi da parte veruna del perimetro di esso minor poligono.

Passa adunque il gran poligono di mille lati, e misura conseguentemente una linea retta eguale al suo ambito, e nell'istesso tempo il piccolo passa una prossimamente egual linea, ma interrottamente composta di mille particelle eguali a' suoi mille lati, coll' interposizione di mille spazii vacui, che tali possiam chiamarli in relazione alle mille lineette toccate dai lati del poligono.

Il detto fin qui non ha veruna difficoltà o dubitazione. Ma ditemi, se intorno un centro qual sia v. g. questo punto A,

noi descriveremo due cerchj concentrici, ed insieme uniti, e

che dai punti C e B dei loro semidiametri siano tirate le tangenti C E, B F, e ad esse pel centro A la paralella A D; intendendo girato il cerchio maggiore sopra la linea B F (posta eguale alla di lui circonferenza, come parimenti le altre due C E, A D) compita che abbia una rivoluzione, che avrà fatto il minor cerchio, e che il centro? Questo sicuramente avrà scorsa e toccata tutta la linea A D, e la circonferenza di quello avrà con li suoi toccamenti misurata tutta la C E; facendo lo stesso che fecero i poligoni di sopra; in questo solamente differenti che la linea H T (fig. 1.ª) non fu tocca in tutte le sue parti dal perimetro del minor poligono, ma ne furon lasciate tante intatte, coll'interposizione di vacui saltati, quante furono le parti tocche dai lati; ma qui ne' cerchj mai non si separa la circonferenza del minor cerchio dalla linea C E, sì che alcuna sua parte non venga tocca, nè mai quella che tocca della circonferenza è manco del toccato nella retta. Or come dunque può senza salti scorrere il cerchio minore una linea tanto maggiore della sua circonferenza?

126. *(Sagredo)*. Andava pensando, se si potesse dire, che siccome il centro del cerchio, esso solo strascicato sopra A D la tocca tutta essendo anco un punto solo, così potessero i punti della circonferenza minore, tirati dal moto della maggiore andare strascicandosi per qualche particella della linea C E.

127. *(Salviati)*. Questo non può essere per due ragioni; prima perchè non sarebbe maggior ragione che alcuno dei toccamenti simili al C andassero strascicando per qualche parte della linea C E ed altri no: e quando questo fosse, essendo tali toccamenti (perchè son punti) infiniti, gli strascichi sopra la C E sarebbero infiniti, ed essendo quanti, farebbero una linea infinita, ma la C E è finita. L'altra ragione è, che mutando il cerchio grande nella sua conversione continuamente contatto, non può non mutarlo parimenti il minor

cerchio, non si potendo da altro punto che dal punto B tirare una linea retta sino al centro A, e che passasse per il punto C, sicchè mutando contatto la circonferenza grande, lo muta ancora la piccola, nè punto alcuno della piccola tocca più di un punto della sua retta C E, oltre che anco nella conversione dei poligoni nessun punto del perimetro del minore si adattava a più di un punto della linea, che dal medesimo perimetro veniva misurata, come si può facilmente intendere, considerando la linea I K esser paralella alla B C, onde sin che la B C non si schiaccia sopra la B Q, la I K resta sollevata sopra la I P, nè prima la calca, se non nel medesimo istante, che la B C si unisce alla B Q, ed allora tutta insieme la I K si unisce colla O P, e poi immediatamente se gli eleva sopra.

128. *(Sagredo).* Il negozio è veramente intrigato, nè a me sovviene scioglimento alcuno, però, diteci quello che a noi conviene.

129. *(Salviati).* Io ricorrerei alla considerazione dei poligoni sopra considerati, l'effetto dei quali è intelligibile, e di già compreso, e direi, che siccome nei poligoni di cento mila lati alla linea passata e misurata del perimetro maggiore, cioè dai cento mila suoi lati continuamente distesi, è eguale la misurata dai cento mila del minore, ma coll'interposizione di cento mila spazii vacui traposti: così, direi nei cerchj (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata dagli infiniti lati del cerchio grande continuamente disposti, essere pareggiata in lunghezza dalla linea passata dagli infiniti lati del minore, ma da questi coll'interposizione d'altrettanti vacui tra essi; e siccome i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gli interposti vacui, non son quanti, ma infiniti, quelli cioè infiniti punti tutti pieni, e questi infiniti punti, parte pieni e parte vacui. E qui voglio che notiate, come risolvendo e dividendo una linea in parti quante, e per conseguenza

numerate non è possibile disporle in una estensione maggiore di quella che occupava mentre stavano continuate e congiunte, senza l'interposizione d'altrettanti spazii vacui, ma imaginandola risoluta in parti non quante, cioè ne' suoi infiniti indivisibili, la possiamo concepire distratta in immenso senza l'interposizione di spazii quanti vacui, ma sibbene di infiniti indivisibili vacui.

130. *(Simplicio).* Molte difficoltà sento nascermi dagli avuti discorsi, delle quali veramente io non saprei liberarmi. E per una, mi si para avanti questa, che se le circonferenze dei due cerchj sono eguali alle due rette C E, B F, questa continuamente presa, e quella coll'interposizione d'infiniti punti vacui, la A D descritta dal centro, che è un punto solo, in qual maniera si potrà chiamare ad esso eguale contenendone infiniti? Inoltre quel comporre la linea di punti, il divisibile di indivisibili, il quanto di non quanti, mi pajono scogli assai duri da passargli.

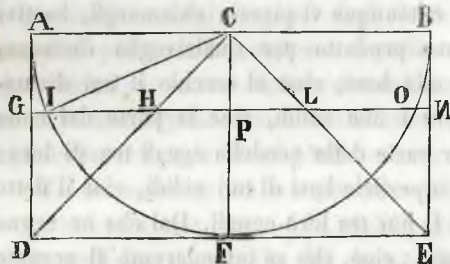
131. *(Salviati).* Ci sono veramente codeste e delle altre: ma ricordiamoci che siamo tra gli infiniti e gli indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, e questi per la loro piccolezza; con tutto ciò vediamo, che l'umano discorso non vuole rimanersi, dall' aggirarsegli attorno, dal che pigliando io ancora qualche libertà, produrrei alcuna mia fantasticheria, se non concludente necessariamente, almeno per la novità apportatrice di qualche meraviglia....

132. *(Sagredo).* Fateci dunque partecipi di quelle considerazioni che il corso dei nostri ragionamenti vi suggerisce...

(Salviati). Così si faccia, poichè tale è il vostro gusto; e cominciando dal primo, che fu, come si possa mai capire, che un sol punto sia eguale ad una linea, vedendo di non ci poter far altro per ora, proverò di quietare, o almeno temperare una improbabilità con un'altra simile, o maggiore,

come talvolta una meraviglia si attutisce con un miracolo. E questo sarà col mostrarvi due superficie eguali, ed insieme due corpi pure eguali, e sopra le medesime dette superficie come basi loro collocati, andarsi continuamente, ed egualmente, e queste e quelli nel medesimo tempo diminuendo, restando sempre tra di loro eguali i loro residui, e finalmente andare sì le superficie, come i solidi a terminare le loro perpetue egualità precedenti, l'uno dei solidi con una delle superficie in una lunghissima linea, e l'altro solido coll'altra superficie in un sol punto; cioè questi in un sol punto, e quelli in infiniti.

133. *(Sagredo).* Ammirabile proposta veramente mi par codesta, però sentiamone la esplicazione e la dimostrazione.

(Salviati). È necessario farne la figura, perchè la prova è pura geometria. Per tanto intendasi il mezzo cerchio A F B, il cui centro C, ed intorno ad esso il paralellogrammo rettangolo A D E B, e dal centro ai punti D E siano tirate le rette C D, C E. Figurandoci poi il semidiametro C F perpendicolare a una delle due A B, D E immobile, intendiamo intorno a quello aggirarsi tutta questa figura; è manifesto che dal rettangolo A D E B verrà descritto un cilindro, dal semicircolo A F B una mezza sfera, e dal triangolo C D E un cono. Inteso questo, voglio, che ci immaginiamo esser levato via l'emisferio, lasciando però il cono e quello che rimarrà del cilindro, il quale della figura che riterrà simile a una scodella, chiameremo pure scodella; della quale e del

cono prima dimostreremo, che sono eguali; e poi un piano tirato paralello al cerchio, che è base della scodella, il cui diametro è la linea D E e il centro F, dimostreremo tal piano, che passasse v. g. per la linea G N segando la scodella nei punti G I, O N, ed il cono nei punti H L tagliare la parte del cono C H L eguale sempre alla parte della scodella, il cui profilo ci rappresentano i triangoli G A I, B O N, e di più si proverà la base ancora del medesimo cono, cioè il cerchio il cui diametro H L essere eguale a quella circolar superficie, che è base della parte della scodella, che è come se dicessimo un nastro di larghezza, quanta è la linea G I (notate intanto, che cosa sono le definizioni dei matematici, che sono una imposizione di nomi, o vogliam dire abbreviazioni di parlare, ordinate ed introdotte per levar lo stento tedioso, che voi ed io sentiamo di presente per non aver convenuto insieme di chiamar v. g. questa superficie nastro circolare, e quel solido acutissimo della scodella vasojo rotondo); or comunque vi piaccia chiamargli, bastivi intendere, che il piano prodotto per qualsivoglia distanza, purchè sia paralello alla base, cioè al cerchio il cui diametro D E taglia sempre i due solidi, cioè la parte del cono C H L, e la superior parte della scodella eguali tra di loro; e parimente le due superficie basi di tali solidi, cioè il detto nastro e il cerchio H L pur tra loro eguali. Dal che ne segue la meraviglia accennata; cioè, che se intenderemo il segante piano successivamente innalzato verso la linea A B, sempre le parti dei solidi tagliate sono eguali, come anco le superficie, che son basi loro, pur sempre sono eguali, e finalmente alzando e alzando, tanto li due solidi (sempre eguali), quanto le lor basi (superficie pur sempre eguali) vanno a terminare l'una copia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto: che tali sono l'orlo supremo della scodella e la cuspide del cono.

134. Or mentre che nella diminuzione dei due solidi si va sin all' ultimo mantenendo tra essi la egualità, ben par conveniente il dire, che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l' uno infinitamente maggior dell'altro; par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto; e questo che accade nei solidi, accade parimenti nelle superficie basi loro, che esse ancora conservando nella comune diminuzione la egualità vanno in fine ad incontrare nel momento della loro ultima diminuzione, quella per suo termine la circonferenza di un cerchio, e questa un sol punto. Li quali perchè non si debban chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze eguali? E notate appresso; che quando ben fossero tali vasi capaci degli immensi emisferi celesti, tanto gli orli loro supremi, e le punte dei contenuti coni servando sempre tra di loro l'egualità, anderebbero a terminare quelli in circonferenze eguali a quelle dei cerchj massimi degli orbi celesti, e questi in semplici punti, onde conforme a quello che tali speculazioni ne persuadono, anco tutte le circonferenze de'cerchj quanto si voglian disuguali, posson chiamarsi tra di loro eguali e ciascheduno eguale a un punto solo =.

135. In appresso, a compimento della supposizione fatta e da noi riportata num. 125, della eguaglianza del solido della scodella, con quella del cono, egli ne adduce in parte la dimostrazione, e ci invita a vederne l' altra parte nella 12.ª prop. del lib. 2 *De centro gravitatis solidorum*, del sig. Luca Valerio, che egli chiama il nuovo Archimede della sua età.

136. Per quanto poi concerne le ultime induzioni enunciate nei num. 133 e 134, cioè che due cose eguali ma di forma diversa, sottoposte a continue e successive eguali diminuzioni, una la finisca in un sol punto geometrico, e

l'altra in infiniti, o in una circonferenza, che si considera contenerne infiniti, ognuno conosce, che con sicurezza si può pronunciare, che queste illazioni non reggono per verun conto al verace rigor di ragione; perchè insino a tanto che il cono e la scodella hanno un valor finito, ed anco insino a tanto che abbiano un valor finito qualsivoglia, è sempre vero, che tutta la superficie dell'orlo della scodella è eguale alla superficie che presenta il cono, come parimenti il solido della scodella è eguale sempre al solido del cono.

Ma quando si passa a conchiuderne, che il solido e la superficie della scodella v. g. la finiscono in un cerchio, e la superficie ed il solido del cono in un sol punto, questa conchiusione non procede legittima dalle premesse, ma invece è un verace equivoco; in fatti è impossibile che la superficie ed il solido del cono vadino a terminare in un punto solo, perchè il punto è zero superficie, e zero solidità; così parimente è impossibile, che la superficie della scodella e la di lei solidità possano finirla in una circonferenza la quale è sempre zero superficie e zero solidità. Chi volesse ragionare dello stato delle grandezze antecedenti alla loro consunzione, da ciò che presentano dopo consumate, se ne ricaverebbero le più mostruose ed assurde induzioni. L'equivoco adunque che si ravvisa in questo dire del Galilei, è la supposizione che egli fa, che il cono la finisca in un punto mentre allora non esiste più, e non si riduce in un punto; ma ha cessato di esistere, atteso che il punto anzi che rappresentare l'ultima parte suprema del cono non fa altro che segnare il luogo del suo fine, o la sua piena nullità.

Dalla maniera però con la quale Galilei tratta queste dottrine, e ne ricava queste ultime illazioni si conosce, che da esse non andava illuso, ma le metteva innanzi più pre-

sto per far comprendere la massima circospezione con la quale ci convien procedere in parlando dell'infinito e dell'indivisibile che per altro motivo.

Noi però, che ci siamo proposti di esporre la filosofia di questi altissimi concetti anzi che intrattenerci a chiarire queste difficoltà, osserveremo, che per altro in queste profonde considerazioni di Galilei, vi si trova abbastanza dichiarato il famoso metodo delle evanescenze, metodo cotanto vagheggiato qualche tempo dopo da Newton, e da molti altri geometri, e l'averlo qui rinvenuto esposto con singolare semplicità e mirabile dottrina come vediamo fatto dal filosofo di Firenze, questo è tutto frutto del profondo studio che egli aveva fatto delle opere di Archimede.

137. Nei numeri precedenti 125 e seguenti abbiamo veduto, come rimanga indeterminato ciò che Galilei dice del punto C, centro tanto dei cerchi, che dei poligoni; atteso che non si sa comprendere come il punto C non abbia fatta insieme coi poligoni e coi cerchj, anch'esso la sua rivoluzione. E quando si voglia ammettere nel centro C una conversione simigliante a quella dei cerchj e dei poligoni, ci troviamo imbrogliati a poter concepire altrettanto convenire ad un punto geometrico, che non ha veruna dimensione. Che cosa ci resta dunque a pensare? Unicamente possiam ritenere che questo centro deve essersi successivamente trovato presente a tutti i punti che sappiamo concepire o ideare esistenti nella linea G V (fig. 1.ª num. 125.); ovvero nella A D (fig. 2.ª) del medesimo paragrafo; giacchè nulla di più si può dire.

138. Galilei nel filosofare su queste dottrine, si propone nel medesimo dialogo, e poco dopo il già ricordato di lui, la seguente difficoltà; se il divisibile si può considerare come ingenerato dagli *indivisibili*, ne segue, che lo indivisibile potrebbe esser diviso; difatti ammettendo che l'indivisibile

possa dar vita al divisibile o al finito, se una linea v. g. fosse composta da un numero impari di indivisibili, potendo questa esser sempre bipartita, ne seguirebbe, che anco l'indivisibile che occupa il punto di mezzo rimanesse spartito per metà.

Parimenti si propone quest'altra e non tenue difficoltà: posto che ogni grandezza finita si possa ritenere come composta o risultante da infiniti indivisibili, ne conseguita che avremo un'infinito maggior di un altro, e ciò nè più nè meno, che una grandezza finita è maggiore di un'altra parimenti finita. Le quali cose ognun intende quanto siano poco consentanee a ragione.

139. Venendo poi alla soluzione che egli sapeva dare alle propostesi difficoltà, dice: in quanto alla prima, invito il lettore a riflettere, che questa difficoltà si fonda sopra una falsa ipotesi, cioè sopra la ipotesi, che sia pari o dispari il numero degli indivisibili componenti una grandezza lineare, mentre nè un numero pari, nè un numero dispari di indivisibili compongono la grandezza lineare, come nè anco qualsivoglia altro numero finito quale che ne sia il modo nostro di imaginarselo, ma bensì infiniti indivisibili ci vogliono o sono richiesti a formarla; onde si vede, che la difficoltà non ha alcun valore, o alcuna significazione. A dir vero questa sua risposta alla prima difficoltà appare giusta e persuadente.

Confessa poi candidamente di non saper rispondere alla seconda difficoltà, cioè che una linea considerata come risultante da infiniti indivisibili, allor quando essa viene comparata ad un'altra di gran lunga maggiore, perchè allora la seconda appare che contenga un'infinito maggior di quello della prima. Ora questo darsi degli infiniti indefinitamente maggiori dell'infinito appare concetto da non poter esser capito nè ammesso; per il che unicamente fa osservare quanto segue: = Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto

finito intorno agli infiniti e dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate, il che penso, che sia inconveniente, perchè stimo, che questi attributi di maggioranza, minoranza ed egualità non convengano agli infiniti, de'quali non si può dire, uno esser maggiore, o minore, o eguale all'altro; per prova di che già mi sovviene un sifatto discorso, il quale per più chiara esplicazione proporrò per interrogazioni al signor Simplicio che ha mossa la difficoltà=. E qui per non allungare il discorso, diremo che si fa a richiamare a memoria con le sue interrogazioni le dottrine esposte già al num. 85, cioè che li quadrati che sono nella serie dei numeri detti naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ecc. sono tanti quanti sono i numeri naturali, i cubi sono tanti quanti sono i numeri naturali, cioè questi e quelli sempre infiniti; (lo stesso dicasi delle quarte, quinte e tutte le successive potenze;) e intanto noi vediamo, che i numeri naturali sono più che i loro quadrati, assai più che i loro cubi, ed assai più ancora delle maggiori potenze più alte. Che dunque si ha a dire? Che a pensare? Ed egli risponde: =Io credo, che ad altra decisione si possa venire, se non che a dire, infiniti essere tutti i numeri naturali, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, nè la moltitudine dei quadrati esser minore di quella di tutti i numeri nè questa maggior di quella; ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale, maggiore e minore non aver luogo negli infiniti, ma solo nelle quantità terminate. E però quando il signor Simplicio, mi propone più linee (o grandezze) disuguali; e mi domanda come possa essere, che nelle maggiori non siano più punti, che nelle minori, io gli rispondo, che ve ne sono nè più nè manco, nè altrettanti, ma in ciascheduna infiniti. O veramente se, io gli rispondessi i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati, in un'altra maggiore, quanti tutti i numeri; in quella piccolina, quanti sono i numeri cubi, non potrei

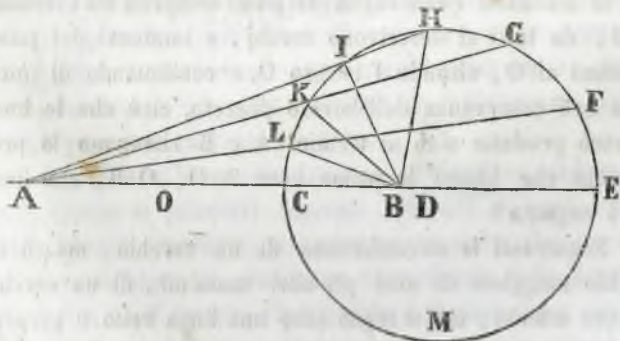
io avergli dato soddisfazione col porre più in una che nell'altra; eppure in ciascheduna infiniti = ?

E venendo a questa infinità di indivisibili non quanti, cioè non finiti, ma di valore infinitamente piccolo, gli pare che la prova diretta di questa infinità si desuma in modo aperto ed evidente dalla natura del *continuo*, dalla quale deriva la infinita divisibilità, che vale niente meno che dire, che le grandezze siano divisibili in sempre divisibili, e per questa divisibilità si debba necessariamente ammettere, che la composizione delle grandezze sia risultante da infiniti indivisibili; atteso che una divisione che si può proseguire perpetuamente suppone che le parti siano infinite, giacchè altrimente la suddivisione sarebbe terminabile, e l'esser le parti infinite si tira in conseguenza l'esser non quante (cioè non finite); perchè quanti infiniti far debbano una estensione infinita.

Onde però alcuno non rimanga in dubbio intorno la verace significazione di queste sue dottrine, egli avverte, che non convien credere che la divisione condur possa all'indivisibile, poichè colui che si appoggiasse a tale operazione si ingannerebbe all'ingrosso, perchè egli soggiunge: = con un tal progresso nemmeno alla divisione di tutte le parti quante si perverebbe in eterno; ma degli indivisibili, tanto è lontano il poter giungere per cotale strada al cercato termine, che piuttosto altri se ne discosta, e mentre pensa col continuar la divisione, e col moltiplicar la moltitudine delle parti di avvicinarsi all'infinità, credo che sempre più se ne allontani; e la mia ragione è questa. Nel discorso avuto poco fa concludemmo, che nel numero infinito bisognava che tanti fossero i quadrati, o i cubi, quanti tutti i numeri, poichè e questi e quelli, tanti sono, quante le radici loro, e radici son tutti i numeri. Vedemmo appresso quanto maggiori numeri si pigliavano, tanto più radi si trovavano in essi i lor

quadrati, e più radi ancora i lor cubi; dunque è manifesto, che a quanto maggiori numeri noi trapassiamo, tanto più ci discostiamo dal numero infinito = E poco stante conchiude esser tanto vero che noi non possiamo discorrere dell'infinito con le nozioni del finito, che dovriano anzi farci accorti, quanto gravemente si erri, mentre altri voglia discorrere intorno agli infiniti con quei medesimi attributi, che noi usiamo per li finiti, le nature dei quali non hanno veruna convenienza tra di loro.

E per prova di questa sconvenienza ed assoluta diversità di natura che passa tra il finito e l'infinito arreca la seguente prova che a parer suo equivale ad una dimostrazione. Egli dunque scrive = In proposito di che non voglio tacervi un mirabile accidente, che pur ora mi sovviene, esplicante l'infinita differenza, anzi ripugnanza o contrarietà di natura, che incontrerebbe una quantità terminata nel trapassare alla infinità.

Seguiamo questa linea retta A B di qualsivoglia lunghezza; e preso in lei qualsivoglia punto C, che in parti diseguali la divida: dico, che partendosi copie di linee dai termini A e B, che ritenendo fra loro la medesima proporzione che

hanno le parti A C, B C, vadano a concorrere insieme, i

punti dei loro concorsi andranno tutti nella circonferenza di un medesimo cerchio; come per esempio, partendosi le A L, B L dai punti A e B, ed avendo tra di loro la medesima proporzione che hanno le parti A C, B C, e andando a concorrere nel punto L, e ritenendo la stessa proporzione altre due A K, B K concorrendo in K, altre A I, B I e A H, B H, A G, B G ec., dico che i punti dei concorsi I, K, L, H, G, F, ec., cascano tutti nella circonferenza di uno stesso cerchio, talchè se ci immagineremo il punto C muoversi continuamente con tal legge, che le linee da esso prodotte fino ai termini fissi A B, mantengono sempre la proporzione medesima, che hanno le prime parti A C e C B, tal punto C descriverà la circonferenza di un cerchio, come appresso vi dimostrerò.

Ed il cerchio in cotal modo descritto sarà sempre maggiore, e maggiore infinitamente, secondo che il punto C sarà più vicino al punto di mezzo, che sia O, e minore sarà quel cerchio che dal punto più vicino all'estremità B sarà descritto; in maniera che dai punti infiniti che pigliar si possono nella linea O B, si descriveranno cerchj (movendogli coll'esplicata legge) di qualsivoglia grandezza, minori della luce dell'occhio di una pulce, e maggiori dell'equinoziale del primo mobile. Ora se alzandosi qualsivoglia dei punti compresi tra i termini O B, da tutti si descrivono cerchj, e immensi dai punti prossimi all'O, alzando l'istesso O, e continuando di muoverlo coll'osservanza dell'istesso decreto, cioè che le linee da esso prodotte sino ai termini A e B ritengono la proporzione che hanno le prime linee A O, O B, che linea verrà segnata?

Segnerassi la circonferenza di un cerchio, ma di un cerchio maggiore di tutti gli altri massimi, di un cerchio dunque infinito; ma si segna anco una linea retta e perpendicolare sopra la A B eretta dal punto O, e prodotta in infinito senza mai tornare a riunire il suo termine ultimo col

suo primo, come ben tornavano le altre; imperciocchè la segnata per lo moto limitato del punto C dopo segnato il mezzo cerchio superiore C H E, continuava di segnare l'inferiore E M C riunendo insieme i suoi estremi termini nel punto C. Ma il punto O mossosi per segnar, come tutti gli altri della linea A B, (perchè punti presi nell'altra parte O A descriveranno essi ancora lor cerchj, ed i massimi i punti prossimi all' O) il suo cerchio per farlo massimo di tutti, e per conseguenza infinito non può più ritornare nel suo primo termine, ed insomma descrive una linea retta infinita per circonferenza del suo infinito cerchio. Considerate ora, qual differenza sia da un cerchio finito a un'infinito; poichè questo muta talmente l'essere, che totalmente perde l'essere e il poter essere; che già ben chiaramente comprendiamo non si poter dare un cerchio infinito; il che si tira poi in conseguenza, nè meno poter essere una sfera infinita..... Ora che diremo di cotali metamorfosi nel passare dal finito all'infinito =?

141. Ho qui voluto arrecare questi passi del gran Galilei per far conoscere, quanto la filosofia dell' infinito abbia guadagnato nelle sue mani; in fatti egli coi suoi ragionamenti ha sostituito alla grandezza indeterminata degli antichi, voglio dire, alla minor di ogni data od assegnata, lo indivisibile il quale riesce assai meglio determinato, perchè presenta almeno un preciso valore di infinitamente piccolo in comparazione del quanto finito.

Arrogi che la nozione del suo indivisibile traduce l'animo insino ai primitivi supremi elementi ai quali, speculando quanto possiamo, si arriva a supporre che sia composta e risultante la grandezza finita dotata della proprietà del continuo. E benchè l'indivisibile o l'infinitesimo, conservi ancor forma e carattere di grandezza, venendo considerato qual generatore della grandezza medesima, tuttavia non ne

esprimendo e non ne rappresentando che uno di questi altissimi primi principii della grandezza ci pone innanzi e ci disvela la grandissima, o meglio, la infinita grandezza della ragione che passa tra esso e la grandezza finita cui si suppone appartenere.

Più sia qui rimarcato, che il fiorentino nell'ammettere questo indivisibile, protesta apertamente esser esso di tal natura da non potersi rinvenire con alcuna pratica o mentale geometrica operazione; il che serve mirabilmente ad illuminarci intorno all'inutilità dei tentativi e vecchi e nuovi che si fanno dai geometri, su le tracce di Euclide e d'Archimede, per procacciarsi la minor di ogni data, o lo stesso indivisibile.

Più ci rende avvertiti, a non considerare l'indivisibile come grandezza cui ripugni una nuova divisibilità, come è manifesto dal suo dire riportato ai num. 138, 139, 140, nel quale egli sempre evita di pronunciare il suo parere intorno a questo delicato punto della filosofia matematica, e ciò lo fa con un discorso, dal quale si rileva, che l'oggetto della divisibilità dell'indivisibile rimaneva per lui un punto da non toccarsi.

Galilei, come s'è veduto, per tradurre il nostro pensiero in queste incomprensibili regioni dell'infinito e dell'indivisibile non ha bisogno d'altra nozione, o meglio, d'altra ipotesi, fuor di quella che si erano già dichiaratamente permessa i geometri che l'avevan preceduto, voglio dire la ipotesi, che fa considerare il cerchio come un poligono d'infiniti lati.

142. Devesi pur anco tener presente un'altra importante verità, quella cioè, che alle grandezze infinite non sono applicabili gli attributi, che noi diamo di maggiore e minore, o di più e meno alle grandezze finite; la qual dottrina quando sia sufficientemente fondata serve ad illuminarci non

poco ed a farci comprendere quale e quanto sia l' appoggio filosofico, che regna in quelle parti delle matematiche, nelle quali si tratta, e si pone a calcolo l'infinito, e l'infinitesimo, nè più nè manco che si faccia colla grandezza finita.

143. E allorquando le speculazioni di Galilei incontrano in difficoltà alle quali direttamente non sapeva dare adequata soddisfacente risposta, egli con singolar prudenza ci invita ad osservare, come esse si introducano nell'animo nostro in causa dell'incomprensibilità che hanno per noi l' infinito e l'infinitesimo. Donde si vede chiaro, che tali difficoltà derivano più dalla nostra limitata maniera di considerare queste trascendenti grandezze, che dalla lor natura, la quale come incomprensibile, può esserci oscura, ma non mai condurre a delle assurdità.

Difatti ognuno facilmente intende, che quando noi nei nostri ragionamenti ammettiamo ipotesi insussistenti od assurde, benchè alle volte in apparenza verosimili, queste sempre traducono il ragionamento ad urtare in difficoltà insuperabili, ed anco in assurdità aperte.

Ci duole l'animo che un tanto filosofo e geometra qual'era Galilei non abbia più di proposito, e più diffusamente esercitata la sua profonda sagacità sopra il concetto dell'infinito; concetto intorno al quale egli non s' è aggirato, se non per incidenza, ed al solo fine di procacciarsi principii opportuni a fondare e promuovere nuove e sublimi dimostrazioni meccaniche.

Cavalieri che ben conosceva l'alta importanza di queste nuove dottrine di Galilei lo esortava con sue lettere ad occuparsi più di proposito ad estendere e rischiarare le sue dottrine degli indivisibili, imaginando che la grandissima di lui perspicacia, avrebbe, per quanto è concesso all'umano ingegno, appianata e chiarita questa parte elevata del saper matematico.

144. Esaminando però attentamente quello, che Galilei ci ha lasciato intorno la dottrina del suo indivisibile, e dell'infinito, e molto più osservandone la felice applicazione, che egli ne ha fatta ai problemi nuovi risoluti nelle sue meccaniche, noi dobbiamo confessare, che ci ha posto in mano quanto basta a ben fissare le idee, ed a ben conoscere la filosofia degli indivisibili; imperciocchè nelle sue meccaniche dimostrazioni, tanto teoriche che pratiche, ove tratta del moto accelerato e ritardato, della gravità terrestre e della caduta dei gravi, ove parla ed espone il colpo di percossa dei corpi duri o rigidi, comparato a quello dei fluidi, egli ha dato tutta la desiderabile estensione e perfezione alla dottrina degli indivisibili. Col suo filosofico concetto dell'indivisibile, ha veduto e discoperto pel primo il famoso principio delle *velocità virtuali* cotanto pregiato ed accarezzato dai geometri che l'hanno adottato per base delle loro meccaniche analitiche; e Lagrange nella sua non mai abbastanza lodata opera che ha per titolo: *Meccanica Analitica*, gliene rende tutta la lode ed il merito, come al verace ed unico discopritore di questo principio, ed insieme apprezzandone pienamente l'alta importanza lo assume per base fondamentale di tutta la sua meravigliosa meccanica.

Nè si potrebbe credere che Galilei siasi, quasi per caso, abbattuto nella scoperta di questo celebre principio, poichè si vede, che vi fu anzi condotto dalla sua nozione dell'indivisibile; ed a persuaderci di questo basta considerare, che gli istanti infinitamente piccoli del tempo sono precisamente i suoi indivisibili applicati a questa soggettiva grandezza della durata; e le velocità virtuali che costituiscono il principio in discorso, non sono, che le prime infinitesime velocità, che egli considerava come i primi altissimi principii generatori del moto finito. Queste prime velocità virtuali incipienti, anzi costituenti i primi principii del moto, e che ac-

crescentisi ed accumulantisi in ognuno degli istanti infiniti indivisibili del tempo presentano in un dato tempo finito un momento di moto finito, e di qualsivoglia valore, non sono nozioni o specolazioni accidentali e quasi casuali.

Che anzi l'animo di lui era sì ampiamente informato di questi alti concetti, che spiegava felicemente come il colpo di percossa dei corpi duri fosse indefinitamente maggiore di qualsivoglia altro di semplice pressione. Di vero, considerando egli il tempo finito a modo di grandezza geometrica dotata intrinsecamente della proprietà del continuo, e perciò divisibile in indefinite particelle di tempo finito, ognuna delle quali poi considerava risultanti da infiniti indivisibili istanti, ne veniva, che ad ogni particella finita corrispondesse un momento finito di moto, ed essendo queste particelle indefinite in ogni tempo finito, ne derivava, che quando i loro rispettivi momenti finiti di moto si unissero in somma, allora il momento di moto sarebbe indefinitamente grande, quindi indefinitamente maggiore del sempre ordinario di pressione.

E siccome non basta che un corpo abbia un momento di moto grandissimo, per produrre un colpo di percossa corrispondente a tanto moto, ma si richiede ancora che lo scarichi, o lo comunichi ad un altro tutto insieme e di un colpo solo, così si intende che solo un corpo duro o rigido può comunicare simultaneamente tutto questo moto indefinitamente grande di percossa, come vediamo farsi dal martello, che cade sopra una lama di ferro, o sopra la stessa incudine, che imprime in essa una depressione, effetto della sua caduta, laddove sopra la stessa incudine se fosse innalzata e sopra vi pesasse tutta la famosa torre di Babele, certamente che non basterebbe a imprimervi una sensibile depressione.

Sopra queste dottrine appoggiato spiega felicemente

perchè un corpo duro cadente da una grande altezza scarichi impetuosamente tutto il momento di percossa abbattendosi in un altro corpo duro ed irremovibile, mentre cadendo un corpo fluido dalla medesima o qualsivoglia altra altezza questo non essendo duro, non iscarica il moto preconcetto che successivamente, cioè, velo per velo o parte per parte di ognuna delle sue fluide falde, e quindi il moto di percossa dei fluidi è sempre indefinitamente minore di quello dei corpi rigidi, posti in circostanze eguali.

Con queste dottrine si è aperta la via alla soluzione di moltissimi problemi meccanici, che gli hanno procacciato in faccia ai dotti fama immortale.

Ma ciò che più ci interessa di osservare in questa filosofia delle matematiche si è, che con le sue dottrine apriva la via e preparava la scoperta del calcolo sublime, detto calcolo infinitesimale, giacchè i suoi indivisibili erano precisamente le infinitesime parti delle quali riteneva risultanti tutte le finite grandezze, e che egli non già per qualche operazione, giacchè nessuna operazione nè effettiva nè razionale poteva somministrarle, ma sibbene per pura mentale supposizione concepiva, come nel numero si ammettono e si concepiscono le unità finite quali generatrici di esso.

Questi indivisibili, mutato il solo nome, sono poi le differenziali razionali ed al tutto soggettive, che furono dichiaratamente ammesse ed adoperate da Leibnitz, e le infinitamente piccole o le flussioni usate da Newton, ambidue scopritori del calcolo sublime o infinitesimale.

E benchè Galilei non abbia dichiaratamente insegnato come le supreme particelle soggettive delle grandezze finite, da esso appellate indivisibili, possano in questo loro stato ritenere tutte le proprietà della grandezza finita, pure l'averli considerati quali generatori, od elementi primi della grandezza dava apertamente a divedere, che essi avevano

tutte le proprietà, che eran proprie della grandezza; proprietà, che per ammissione di principio esister debbono tutte intiere anco nelle parti componenti. E sotto questo riguardo quando nella soluzione dei problemi veniva riunendo questi generatori indivisibili delle grandezze egli presentava in via pratica delle veraci integrazioni entro limiti prefissi e così abbozzava anco la parte più importante del calcolo infinitesimale, qual'è quella appellata *calcolo sommatorio,* o *calcolo integrale.*

145. Non vorrei esser ritenuto per troppo corrivo nell'asserire altrettanto, perchè se alcuno la pensasse così, lo inviterei a riflettere, che avendo esso ritenuto gli indivisibili forniti e dotati delle proprietà della grandezza finita, che riuniti poi in numero infinito, si consideravano capaci di costituirla e rappresentarla, con questi pensamenti stabiliva apertamente, il grande principio, che nella cognizione delle proprietà dei singoli indivisibili, stava riposta la cognizione della grandezza finita, e per questo si vedeva aperta la via a risalire dalla cognizione dell'indivisibile a quella della grandezza finita, il che era pure integrale.

E di questa partecipazione delle proprietà che gli indivisibili avevano comuni con le grandezze, finite egli veniva insegnando, come in ogni istante indivisibile del tempo, e nelle stesse velocità virtuali fossero espresse e rappresentate le proprietà e le leggi consecutive delle forze centrali che reggono i grandi movimenti del globo terraqueo, e riteneva, che egualmente esprimessero quelle consimili che regolano i movimenti di tutti i corpi del sistema mondiale nei loro orbi celesti.

Ma ritornando in su la considerazione della filosofia da esso spiegata riguardo all'infinito, egli ci dice, che prescindendo anco dall'esperienza, benchè concludentissima, non è difficile col semplice discorso penetrare queste verità, poi-

chè la velocità v. g. essendo aumentabile e menomabile in infinito, qual ragione persuaderà che un mobile partendosi da una tardità infinita, che tale è la quiete, entri immediatamente in dieci gradi di velocità, in quattro, in due, in uno, in un mezzo, in un decimo, in un centesimo ecc., ed in somma in tutte le minori velocità in infinito?

La velocità del sasso ascendente consumandosi tutta nella sua salita, non può pervenire allo stato di quiete prima che sia passato per tutti i gradi di tardità, i quali benchè infiniti, gli può tutti percorrere in un dato tempo finito, perchè non vi dimora qualche tempo per ognuno, ma vi passa senza dimorarvi oltre ad un istante; e perchè in ogni tempo quanto ancor che piccolissimo sono infiniti istanti, così essi sono bastanti a rispondere agli infiniti gradi di velocità perduta.

146. Questi e molt'altri giusti ed elevati pensamenti (che qui per brevità sorpassiamo), esposti in maniera chiara e convincente ed accompagnati da induzioni importanti costituiscono un titolo di eterna gloria pel filosofo fiorentino. Egli introdusse nella matematica la nozione dell'indivisibile o della quantità infinitamente piccola, quella dell'infinito, ma non cumulativo o come risultante da somma di finiti; le prime tracce di integrazione dedotte dalla natura degli indivisibili; la ragione, che unica può condurre a considerare l'infinitamente piccola grandezza come nulla, posta che sia a petto della grandezza finita; le velocità virtuali, quali primi infinitesimi elementi generatori del moto finito e la infinita loro accumulazione sino alla produzione del moto finito; il colpo di percossa, momento di moto, che egli chiama infinito, comparato che venga con quello di pressione; tutto venne scoperto, chiarito, dimostrato da questo grande filosofo e queste sue dottrine sono poi alla fin fine quelle che abbracciate ed usate dai successori gli condussero ai nuovi grandissimi discoprimenti dell'analisi infinitesimale.

Poco fa si è detto, che egli insegnava, e pel primo, il gran principio, che la quantità infinitamente piccola comparata che fosse alla grandezza finita poteva considerarsi quale zero, in punto al di lei potere che aveva per alterare lo stato della finità; perchè dunque alcuno non creda esser noi corrivi a credere che esistano nei pensamenti del sommo Galilei dei sublimi trovati, che egli non avesse veramente discoperti, riporteremo qui le sue parole medesime dalle quali apertamente fia manifesto, aver egli pel primo ammesso, anzi per quanto è dato all'uomo anco dimostrato il gran principio del calcolo differenziale divenuto in seguito cotanto famoso, cioè, che due o più grandezze finite, le quali non differiscono tra di loro, che per uno indivisibile, o per una parte loro infinitamente piccola, queste grandezze sono fra loro eguali. Egli dunque prova tale principio come segue: = si dà soddisfazione alla parte (cioè all'interlocutore Sagredo) col dirgli, che non solamente uno, o due indivisibili, ma nè dieci, nè cento, nè mille compongono una grandezza divisibile e quanta, ma sibbene infiniti =; dunque nè uno, nè due, nè cento possono produrre una differenza finita che sia capace ad alterare in più o in meno la egualianza di grandezze finite.

147. Siccome nessuno, per quanto è a nostra notizia, ha pienamente esposti questi pensamenti matematici dell'incomparabile filosofo fiorentino, così ci gode l'animo di attribuirli al verace loro inventore; imperciocchè questa è filosofia tutta sua, e perciò è tutto suo il merito di aver create e poste le basi luminose dell'analisi sublime, come meglio si vedrà in seguito di questo scritto.

148. Cavalieri in quel medesimo tempo, discopriva anch'esso e con la forza del suo ingegno il suo metodo degli indivisibili. Convenendo nell'idea del Galilei, che nella natura dello indivisibile fosse espressa l'indole ed il carattere della

grandezza finita, della quale l'indivisibile si considerava come un'elemento o parte costitutiva. Questo gran filosofo di Milano concepì il felicissimo pensiero di farsi ad esaminare ed indagare le proprietà delle grandezze geometriche ricavandole o deducendole dalle proprietà delle loro parti indivisibili.

Fondandosi sopra questo pensamento creava la sua nuova *Geometria degli indivisibili.*

Esaminando li principii sopra dei quali egli poggiava, a considerare ed a formarsi il concetto de' suoi indivisibili, appare, che li ammettesse quali parti costitutive elementari delle grandezze finite, da potersi pigliare in quel numero indefinito che ci aggrada, ma sempre sufficiente alle soluzioni dei singoli problemi.

Camminando su le tracce dell'indefinito credeva evitare lo infinito, e le difficoltà ad esso inerenti, come parimenti pensava che ammettendo l'indivisibile solamente quale indefinitamente piccolo, e non quale infinitamente piccolo, così potesse cansare le difficoltà che si promovevano verso quest'ultimo concetto abbracciato dichiaratamente dal Galilei.

Cavalieri adunque si limitava a considerare la grandezza geometrica come un'aggregato di indefiniti indivisibili, ma questi però da potersi determinare secondo la proprietà del continuo, cioè con una latitudine senza confine o senza alcun limite; per cui egli poteva spingere questi suoi indivisibili sin dove gli piaceva, e poteva dar loro qualsivoglia parte del valore della grandezza.

Immaginati a questo modo i suoi indivisibili, se ne serviva nella sua geometria degli indivisibili, per iscandagliare le proprietà, tanto delle linee, quanto delle superficie, e dei solidi; ma nell'usare di questi indivisibili, egli consideravagli come pienamente investiti ed informati delle proprietà e qualità della grandezza finita qualunque, cui si consideravano appartenere.

Così egli veniva a considerare la linea come composta o formata da altrettanti indivisibili, o lineette cortissime, le une poste in seguito alle altre; le superficie come formate da indefinite linee rette paralelle le une a lato delle altre collocate; ed il solido come ingenerato da indefiniti piani sottilissimi, gli uni soprapposti agli altri. Ecco come egli stesso dispiega questi suoi concetti. = Manifestum est figuras planas ad instar telæ paralellis filis contextæ concipiendas esse: solida vero ad instar librorum qui paralellis foliis coacervantur. Cum vero in tela sint semper fila, et in libris semper folia numero finita, habent enim aliquam crassitiem, nobis in figuris planis lineæ, in solidis vero plana numero indefinita, ceu omnis crassitiei expertia supponenda sunt. (Exercitationes geometricæ paginis 3 e 4).

149. Questa maniera di immaginarsi la formazione e la composizione delle grandezze era poco diversa da quella ideata da Galilei.

Ma ove questi era bersagliato da molte difficoltà, che si rinfacciavano a queste sue nuove dottrine, Cavalieri sperava evitarle coll'assumere i suoi indivisibili solamente indefinitamente piccoli. Però poco stante, dopo più matura riflessione egli si accorgeva, che il suo concetto di grandezza indefinitamente piccola, toccava direttamente all'infinitamente piccola, o all'indivisibile galileano; e quindi le difficoltà promosse contro quest' ultimo militavano anco contro le sue indefinitamente piccole grandezze. D'altra parte non vedendosi aperta una via a risolverle, si studiava eluderne la forza facendo osservare, che egli dichiaratamente non poneva la infinità degli indivisibili, nè la loro entità infinitamente piccola, ma unicamente si permetteva la supposizione dell'infinita divisibilità, voluta dalla proprietà del continuo, e la consecutiva piccolezza de'suoi indivisibili, piccolezza indefinita.

Tuttavia dopo tutte queste sagaci osservazioni l' alto suo ingegno e la di lui profonda penetrazione, lo rendevano convinto, che tanto e tanto era su la stessa via dal Galilei battuta e seguita, perchè alla fin fine la infinita divisibilità procedente dalla proprietà del continuo dava di capo direttamente nell' infinito, giacchè la divisibilità infinita derivava persino la di lei possibilità dalla nozione dell'infinito. Per la qual cosa posta in disparte la sua restrizione poc' anzi ricordata, egli nell' introduzione, che fece precedere al settimo libro della sua celebre *Geometria degli indivisibili*, confessa apertamente, che le sue dottrine si trovavano sottoposte a tutte le obbjezioni che si movevano contro gli indivisibili infinitesimi di Galilei. Onde scrive: = Haud quidem me latet circa continui compositionem, nec non circa infinitum, plurima a philosophis disputari, quæ meis principiis obesse non paucis fortasse videbuntur; propterea nempe hæsitantes ii quod omnium linearum, seu omnium planorum conceptus cimeriis veluti obscurior tenebris inapprehnsibilis videatur. Vel quod in continuis ex indivisibilibus compositionem mea sententia prolabatur. Vel tandem quod unum infinitum alio majus dari posse pro firmissimo geometriæ fundamento sternere auserim, circa quæ millibus quæ passim in scholiis circomferuntur argumentis, ne Achillea quidem arma resistere posse existimantur. His tamen ego per ea quæ lib. 2, prop. 1 ac illius scholio precipue declarata sunt satisfieri posse dijudicavi: quod conceptum enim omnium linearum, seu omnium planorum efformandum facile hoc per negationem nos consequi posse existimavi; ita nempe ut nulla linearum, seu planorum excludi intelligatur. Quoad continui autem compositionem manifestum est ex præostensis ad ipsum ex indivisibilibus componendum, nos minime cogi, solum enim continua sequi indivisibilium proportionem, et e converso probare intentum fuit, quod quidem cum utraque positione stare potest.

Tandem vero dicta indivisibilium aggregata non ita pertractavimus ut infinitatis rationem, propter infinitas lineas, sua plana, subire videntur, sed quatenus finitatis quandam conditionem et naturam sortiuntur, ut propterea et augeri et diminui possiut, ut ibidem ostensum fuit, si ipsa pro ut diffinita sunt accipiantur. Sed his nihilominus forte obstrepent philosophi reclamabuntque geometræ, qui purissimos veritatis latices ex clarissimis haurire fontibus consuescunt, sic objicientes; hic dicendi modus adhuc videtur suboscurus, durior quam par est evadit hic omnium linearum, seu omnium planorum conceptus; quapropter hunc tuæ geometriæ ceu Gordium nodum aut auferas, aut saltem frangas, nisi dissolvas.

Fregissem quidem fateor, o geometre, vel omnino a prioribus libris sustulissem, nisi indignum facinus mihi visum fuisset, nova hæc Geometriæ veluti mysteria sapientissimis abscondere viris, ut his fundamentis quibus tot conclusionum, ab aliis quoque ostensarum veritates adeo mire concordant, alicujus industria melius forte concinnatis, hujusce nodi exloptatam illis dissolutionem aliquando præstare possint.

150. E nello scoglio della prima proposizione del lib. 2.°, soggiunge: = Posset forte quis dubitare circa hanc demonstrationem non recte percipiens quomodo indefinitæ numero lineæ, vel plana, quales esse existimari possunt, quæ a me vocantur, omnes lineas vel omnia plana, talium vel talium figurarum possint ad invicem comparari. Propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicujus figuræ, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adæquatur spatio ab iisdem lineis occupato, cum illi congruat; et quoniam illud spatium terminis comprehenditur, ideo et earum magnitudo est terminis iisdem comprehensa; qua propter illi potest fieri additio, vel substractio, licet numerum earun-

dem ignoremus, quod sufficere dico, ut illa sint ad invicem comparabilia. Vel enim continuum nihil aliud est præter ipsa indivisibilia, vel aliquid aliud, si nihil est præter indivisibilia, profecto si eorum congeries nequit comparari, neque spatium sive continuum erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, præter ipsa indivisibilia: si vero continuum est aliquid aliud præter ipsa indivisibilia: fatheri æquum est hoc aliquid aliud interjacere ipsa indivisibilia; habemus ergo continuum disseparabile in quædam, quæ continuum componunt numero adhuc indefinita; inter quælibet enim duo indivisibilia æquum est interjacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid aliud in ipso continuo præter indivisibilia; qua enim ratione tolleretur a medio duarum, a mediis quoque cæterarum tolleretur.

Hoc cum ita sit, comparare nequibimus ipsa continua sive spatia ad invicem, cum ea quæ colliguntur et simul collecta comparantur, scilicet, quæ continuum componunt, sint numero indefinita, absurdum est autem dicere continua terminis comprehensa non esse ad invicem comparabilia; ergo absurdum est dicere congeriem omnium linearum seu planorum, duarum quarumlibet figurarum non esse ad invicem comparabilem, non obstante, quod quæ colliguntur et illam congeriem componunt sint numero indefinita; veluti hoc non obstat in continuo, sive ergo continuum ex indivisibilibus componatur, sive non, indivisibilium congeries sunt ad invicem comparabiles et proportionem habent. Non inutile autem mihi videtur esse animadvertere pro hujus confirmatione, hoc pro vero supposito, quamplurima quæ ab Euclide, Archimede, et aliis ostensa sunt a me pariter fuisse demonstrata, measque conclusiones ad unguem cum illorum conclusionibus concordare; quod evidens signum esse potest, me in principiis vera assumpsisse, licet sciam, et ex falsis principiis sophystice vera aliquando deduci posse; quod tamen

in tot et tot conclusionibus methodo geometrica demonstratis mihi accidisse absurdum putarem. Hoc tamen addo, non tamquam præfatæ veritatis legitimum fondamentum, sed ut non negligendum, immo summe expendendum illius argumentum, quod sequentia percurrenti continuo magis ac magis elucescet. ≐

151. Da questo suo dettato si comprende, che considerava il solido, come s'è detto, formato da una moltitudine infinita di piani o di superficie; la superficie risultante da una indefinita moltitudine di striscie, le une a lato delle altre collocate, ed in ciò fare come mai poteva credere di scostarsi dalle dottrine di Galilei, se non tramutando la parola infinito del fiorentino in quella di indefinito numero? E in vero ammettendo egli, come apertamente si rende palese dal suo dire, che i suoi indivisibili rappresentavano una figura composta qualunque, ma spartita o divisibile per li suoi elementi secondo la natura del continuo, troppo chiaramente faceva conoscere che i suoi indivisibili corrisponder dovevano al continuo, e quindi progredire per necessità di supposizione all' infinito. Le striscie v. g. che poste le une a lato delle altre formano la superficie, o erano esse poche e di una entità finita ed allora veniva a dire che varie piccole superficie date e finite, riunite che fossero formavano un'altra superficie più vasta, e non ingeneravano, ma supponevano la superficie, o queste striscie erano tenuissime e tante quante rispondono al continuo, ed in questo caso come mai si potevano ritenere capaci ad ingenerare una superficie finita con un numero finito?

Quindi non è meraviglia, se in fin dei conti, egli incontrasse nelle difficoltà, che eran promosse contro le dottrine di Galilei, e specialmente in quelle difficoltà che poneva in campo il geometra Guldino. Cavalieri che era di sottile e penetrante ingegno conobbe che la sua maniera di parlare

e di schermirsi non era soddisfacente; e per altra parte trovandosi innoltrato in un pelago senza bussola che gliene indicasse la via dell'uscita, si prevalse astutamente delle armi degli avversari per turar loro la bocca, dichiarando (nelle sue *Esercitazioni matematiche*, opera posteriore alla sua geometria degli indivisibili) che il suo metodo non era in sostanza diverso da quello dagli antichi conosciuto sotto il nome di *metodo delle esaustioni.* In fatti tutte queste superficie, tutte queste linee, delle quali egli prendeva in considerazione i rapporti o le ragioni tanto comparate tra di loro, come nelle loro somme, non erano che grandezze affatto simili ai piccolissimi paralellogrammi rispondenti ai latercoli dei poligoni inscritti e circoscritti alle curve usati dagli antichi, e considerati spinti a sì gran numero, che pochissimo riuscissero diversi dalla curva cui venivano applicati. Ma questo sotterfugio di Cavalieri benchè attissimo in faccia de' suoi oppositori ad attutire le difficoltà che mettevano in campo, tuttavia in sostanza era inetto a risolverle; imperciocchè Cavalieri con questa sua dichiarazione non faceva altro che chiudere la bocca agli avversari, assomigliando il suo all'antico metodo da lor ritenuto rigoroso, mentre questo antico metodo inchiudeva tutte le stesse difficoltà irresolute, perchè tali incertezze o difficoltà procedevano dallo spingersi, che facevasi col metodo delle esaustioni, nel campo dell'infinito per cercare colà di impadronirsi della suprema evanescenza della grandezza sottoposta a infinita diminuzione; evanescenza che niun mezzo, nè razionale nè pratico sapeva in verun modo procacciare, e perciò evanescenza che alla fin fine veniva pienamente supposta, e giammai provata.

152. Chi bramasse in via semplice e facile persuadersi, che la evanescenza nel metodo delle esaustioni è tutta supposta e non rinvenuta, basta che rifletta, che tra le figure rettilinee inscritte e circoscritte v. g. al circolo o ad altra

curva, passa sempre tra queste figure ed il circolo una differenza, e come questa è facile a ravvisarsi esser finita insino a che le figure inscritte e circoscritte sono di un numero finito di lati, così anco nella insigne ipotesi, che il numero dei lati delle figure inscritte e circoscritte fosse infinito (il che non si può arrivare ad ottenere), tuttavia anco in allora per necessità di metodo e di legge geometrica di approssimazione, non potrebbe che diventare tenuissima quanto si voglia, evanescente non mai.

Più, oltre a tutti questi saldissimi argomenti comprovanti la impossibilità di giungere all' evanescenza, avvi sempre quello ancor più ovvio, che nel caso di questa verace evanescenza si avvererebbe, che i poligoni rettilinei ed eternamente rettilinei si tramutassero in figura rigorosamente circolare, cioè la retta diverrebbe curva; il che quanto sia a ragion contrario di leggeri ognuno intende. Ma basti al presente questo motto anticipato sul metodo delle esaustioni, e qui unicamente sia posto per far comprendere come le difficoltà procedenti dalle nozioni dell'infinito sussistano anco in questo metodo cui aveva avuto ricorso Cavalieri

Qui però si deve osservare, che nell'esser egli ricorso al metodo delle esaustioni ha disconosciuto il pregio e la aggiustatezza di un principio solido e più persuasivo, che domina nella dottrina degli indivisibili, per andare mendicando la evidenza del suo ragionamento colà dove non si ritrovava. Ripiglieremo queste dottrine in seguito.

Intanto per meglio chiarire le idee che costituiscono il metodo degli indivisibili di Cavalieri osserveremo, che esso si appoggia a due diverse maniere. Una, ha in vista la comparazione delle figure geometriche tra di loro, comparazione desunta dalla ragione che regna tra gli elementi indivisibili dai quali queste figure si considerano risultanti o composte. Di questa maniera di ragionamento se ne occupa nel primo

libro ed in parte nel secondo della sua geometria, ove dimostra le proprietà dei parallelogrammi, dei triangoli, dei prismi, ecc., che sono posti e collocati sopra la stessa base, e che hanno la stessa altezza. Montucla, chiarissimo storico delle matematiche, espone questa prima maniera di ragionare del Cavalieri con la seguente proposizione: = Tutte le figure delle quali gli elementi crescono o decrescono similmente, incominciando dalla base alla sommità sono nel medesimo identico rapporto della figura uniforme della stessa base ed identica altezza. È facile conoscere la verità di questa proposizione =.

La seconda maniera o metodo degli indivisibili di questo nostro italiano, si occupa del rapporto che ha la somma della infinità delle linee o dei piani crescenti o decrescenti con la somma di un consimile numero di elementi omogenei a queste linee o a questi piani, ma tutti eguali tra di loro. Un esempio a parer del sullodato storico chiarisce meglio questo concetto.

153. Un cono secondo la dottrina di Cavalieri è composto di un numero indefinito di cerchi decrescenti dalla base alla sommità, intanto che il cilindro della stessa base e della medesima altezza è composto di una infinità di cerchj tutti eguali fra loro; si avrà dunque la ragione del cono al cilindro se si truova il rapporto e la ragione di tutti i cerchj decrescenti ed infiniti del cono, comparato al rapporto di tutti i cerchj eguali del cilindro, dei quali il numero è istessamente infinito. Nel cono questi circoli decrescono dalla base alla sommità come i quadrati dei termini di una serie che è in progressione aritmetica, in altri solidi, essi seguitano un'altra proporzione; nella conoide parabolica v. g. è quello dei termini di una progressione aritmetica. Lo scopo generale del metodo consiste nell'assegnare la ragione di questa somma di termini crescenti o decrescenti con quella

dei termini tutti eguali, dei quali è formata tutta la figura uniforme di una stessa base ed altezza, come è il cilindro.

154. Cavalieri adunque incomincia dall' esaminare qual sia il rapporto o la ragione della somma dei quadrati di tutte le linee che compongono il triangolo, con la somma dei quadrati di tutte quelle che compongono il parallelogrammo della stessa base e della stessa altezza, e dimostra, che la prima è la terza parte di quella della seconda; onde ne conchiude, che le piramidi, i coni, e tutte le figure omogenee decrescenti come questi quadrati formano la terza parte delle figure uniformi aventi la stessa base ed altezza.

Di qua passa ad esaminare le somme dei quadrati delle linee che compongono e riempono diverse altre figure, come il circolo ed i suoi segmenti, quelli delle sezioni coniche, ecc., egli applica in seguito questa sua dottrina a diversi problemi, e passa in rivista la più parte di quelli di Keplero, che risolve con molta eleganza e maestria. Intanto non sorpassiamo l'idea filosofica già prima da noi ricordata, che anco secondo l'esposizione che Montucla dà del metodo del Cavalieri, questi non evita l'infinito, e le difficoltà nelle quali incontrava anco Galilei col suo indivisibile infinitamente piccolo.

155. Wallis nella sua grand'opera intitolata: *Arithmetica infinitorum* si appoggia sopra queste due proposizioni: = Magnitudines quarum differentia probatur minor quavis assignabili, æquales esse. Quippe si inæquales, poterit eorum differentia, quamtumvis exigua, sic multiplicari, ut utramvis superet; sin ita non possit, nulla est.

Approximationes continuæ omnes in quibus appropinquatio sic continue fit, ut distantia tandem pervenerit quavis assignabili minor, censendæ sunt, si in infinitum forent continuandæ coire, differentia tandem in nihilum evanescente, seu (quod geometris tantundem est) in quavis assignabili minore =.

156. Postulatum. = Quarum magnitudinum inequalium excessus majoris supra minorem non possit esse tam parvus, quin possit ita multiplicari, ut utramvis superet, aliam quamvis ejusdem generis magnitudinem. Euclides definitione quinta; ibidem Archimedes = .

157. Questo grande geometra inglese benchè si appoggi intieramente alle dottrine degli antichi, è però un vero eclettico, perchè non si fa alcun riguardo di abbracciare i concetti dell'infinito, e degli indivisibili di Galilei; anzi dichiaratamente ammettendo queste nuove scoperte italiane ha sparso molta luce sopra gli stessi antichi principii; perchè egli ripone la grandezza minor di ogni assegnabile, non già nell'indefinito procedimento delle diminuzioni, ma la colloca là all'infinito di tali diminuzioni, e solamente colà dove è questo supremo limite crede di ritrovare la evanescente.

Con questo concetto soggettivo reso assai più preciso ed esatto, che non fosse per lo avanti, ha procurato di mettere in piena luce il fondamento sopra del quale stabilisce l'opinione di poter considerare eguali due grandezze che non differiscano tra di loro se non di una differenza che sia minor di ogni data o assegnabile. E venendo al motivo pel quale la inassegnabile si può considerare zero comparativamente, si studia rinvenirlo nella osservazione, che se tale non fosse comparativamente, in allora questa inassegnabile moltiplicata quanto fa di bisogno la si renderebbe maggior di qualsivoglia grandezza finita, e ritenendo poi ipoteticamente che altrettanto intervenire non possa della inassegnabile, si induce a poterla considerare come zero.

Questo schiarimento però, che egli crede aver dato all'antica dottrina relativo alla inassegnabile è più apparente che reale; imperciocchè, o questa inassegnabile, evanescente o zero, la si suppone per nostra volontaria ipotesi, o si ritiene poterla rinvenire con mentali geometriche speculazioni

o ragionamenti. Quando si supponga, come mentale supposizione nulla osta che si possa ammettere, anzi ammessa che sia, si ha diritto e dovere di ritenerla e considerarla come si è supposta; ma siccome Wallis la vuol considerare riposta e derivante dalle diminuzioni protratte fino all'infinito, questo non è consentaneo a ragione; e ciò perchè non si vede come sia possibile spingere le diminuzioni all'infinito, nè in via di fatto, nè in via di ragionamento, onde rimane sempre, che solo per solenne ipotesi si stabilisca e si dia vita a questa inassegnabile o evanescente, e vi vuole un' altra parimente solenne ipotesi per considerarla zero; onde si verifichi la proprietà di non poter divenire maggior d'ogni grandezza finita, quando venga moltiplicata quanto occorre.

Quello che non si sa comprendere si è, come Wallis pensatore assai avveduto, abbia potuto ammettere come una verità, che in fondo ad una serie protratta all'infinito, serie necessariamente geometrica (per poter riuscire senza fine) si potesse rinvenire evanescenza o zero, mentre dalle dottrine chiare e precise del Galilei, si vedeva, che solo all'indivisibile o infinitamente piccola grandezza si poteva arrivare con questo infinito procedimento.

158. Da queste poche considerazioni, che in seguito saranno ancora riprese in esame, si può comprendere, quale e quanta sia la filosofia che esiste nei principii di Wallis sopra ricordati, e quanto abbia avvantaggiato la filosofia degli antichi nelle sue mani. Convien in questo luogo osservare, che Keplero prima di Wallis aveva per parte sua adoperato e con successo le dottrine degli indivisibili di Galilei, cioè precisamente nel significato di grandezze infinitamente piccole, come si vede praticato da lui nella sua celebre opera denominata: *Sthereometria Doliorum.*

Poco tempo dopo Fermat, sagacissimo matematico, nella

ricerca dei *massimi* e dei *minimi* valori delle grandezze poste in equazione, insegnava quanto segue: = Supponiamo che un'ordinata y espressa col mezzo di una equazione in x, sia pervenuta al suo massimo; ne conseguita che supponendo in questa equazione l'ascissa x accresciuta o diminuita di una quantità infinitamente piccola espressa per e, questi due valori di y saranno eguali, per conseguenza se si uguaglino, e si levino i termini comuni, e che si divida per e quanto è possibile, ed alla fine si ommettano i termini affetti da e (perchè nulli in comparazione degli altri a cagione della piccolezza infinita di e) si avrà alla fine il valore di x al quale corrisponde la più grande ordinata =.

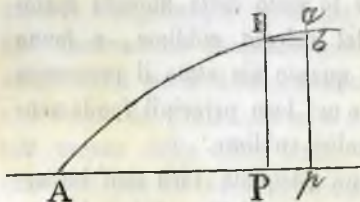
159. Prendiamo l'equazione del circolo, e facendo il raggio eguale ad a, l'ascissa = x, e l'ordinata = y, l'equazione è $2ax - xx = yy$. Supponiamo che non si sapesse qual sia in questa equazione la più grande ordinata. Ecco come si può arrivare a conoscerla. Si ponga in luogo di x la $x + e$, in forza di questa sostituzione la suddetta equazione diventa $2ax + 2ae - xx - 2xe - ee = 2ax - xx$. Togliendo i termini comuni si riduce ad $2ae - 2xe - ee = 0$. Supponiamo $ee = 0$, o meglio omettiamo ee, la quale divien nulla dal momento che $x + e = x$, e si avrà $2ae - 2xe = 0$; ovvero $2ae = 2xe$; o pure $a = x$. Ciò che si sa anco per la natura della curva circolare; cioè, che la più grande, o massima ordinata, è uguale al raggio.

160. Se l'equazione della curva fosse $y^3 = ax^2 - x^3$; e si cercasse qual sia il più gran prodotto di uno dei segmenti di una linea per il quadrato dell' altra, noi avremo in questo caso, usando della regola sopra accennata, $ax^2 - x^3 =$
$ax^2 - x^3 - 2axe + aee + 2axe - 3ex^2 - 3e^2x - e^3$.

Soppressi i termini comuni, ed ommessi quelli ove la e è quadrata o cuba, perchè sono infinitamente piccoli riguardo agli altri, resterà $2\,a\,e = 3\,x\,e$, ovvero $2\,a = 3\,x$, e finalmente $x = \frac{2}{3}\,a$. Ora si vede che il più gran prodotto è quello che si ha del quadrato di due terze parti della linea a per l'altra terza parte.

161. Barrow, geometra d'alto ingegno, considera il piccol triangolo formato dalla differenza di due ordinate infinitamente vicine, nel quale il lato della curva è infinitamente piccolo.

Egli cerca dunque coll' equazione della curva il rapporto che hanno li due lati b a, a B del triangolo B a b, quando la differenza delle ordinate è infinitamente piccola. Poscia, egli fa: come b a sta ad a B, così l'ordinata alla sottangente cercata. Se la curva v. g. è una parabola, dalla quale il parametro sia p, l'ascissa e l'ordinata x ed y l'equazione sarà $y\,y = p\,x$; l'ascissa accresciuta da P p sarà $x + e$, indicando e la P p, ed y diverrà $y +$, a chiamando a il rispettivo aumento a b dell'ordinata y. Così l'equazione diverrà $y\,y + 2\,a\,y + a\,a = p\,x + p\,e$. Togliendo da una parte e dall' altra $y\,y = p\,x$ si avrà $2\,y\,a + a\,a = p\,e$.

Ove P p essendo infinitamente piccola, come pure a b si potrà assolutamente trascurare a a; perciò l'equazione si ridurrà alla $2\,a\,y = p\,e$; dunque $a : e :: b\,a : B\,a$,

come p : 2y, ovvero p : 2 $\sqrt{p x}$. Ora ba : B a come l'ordinata alla sottangente, onde questa sottangente è uguale 2 x.

162. Questa regola di Barrow è simile a quella poco fa ricordata di Fermat; e sì l'una che l'altra sono simili alla regola che si è ritenuta dagli scopritori del calcolo differenziale, e segnatamente da Leibnitz; e l'unica diversità è riposta nella diversa maniera di denotare le quantità infinitamente piccole. Ciò che Barrow chiama per e ed a, nel calcolo differenziale si chiamano e si notano per d x, e per d y (le coordinate essendo x ed y). Esiste ancora tutta la rassomiglianza tra la maniera con la quale si prende la differenziale da Leibnitz, o la flussione di una grandezza o funzione di essa da Newton, e quella maniera che impiegava Barrow per trovare il rapporto delle lettere e ed a.

163. Insino a questo punto speculativo giungevano le dottrine della matematica, incominciando da Euclide, da Archimede, insino a Keplero, a Galilei, a Cavalieri, a Wallis, a Fermat, a Barrow ed a molt'altri grandi geometri. Queste dottrine disvelano apertamente lo stato della filosofia matematica sino alla scoperta del calcolo sublime, e fanno pienamente conoscere quale e quanto sia stato il progresso nelle cognizioni matematiche, o nei loro principii fondamentali, nel discoprimento dell'analisi sublime.

È impossibile formarsi un'adequata idea dell'importanza della nuova clamorosa scoperta dell'analisi sublime, se profondamente non meditiamo tutto quello che siam finora venuti esponendo; imperciocchè solo nel comparativo giudizio filosofico del vecchio sapere col nuovo sta riposta la cognizione dell'avanzamento che la filosofia ha fatto nella nuova scoperta.

Ma prima di entrare nella esposizione filosofica della nuova analisi superiore, siaci permesso un cenno intorno alla filosofia che regna nell'aritmetica e nell'algebra.

CAPITOLO QUINTO.

Dell' Aritmetica e dell'Algebra.

164. Per non interrompere il ragionamento ed il filo delle idee che siam venuti esponendo intorno alla filosofia matetica, non abbiam tenuto conto della aritmetica conosciuta sino dalla più remota antichità, e portata a perfezionamento quando ebbero incremento le nozioni generali, su le grandezze e su la loro divisibilità, non che sopra la loro comparazione. Dunque ragion vuole che diciamo qualche cosa della filosofia dell'aritmetica.

Similmente in questo frattempo e specialmente nell'ultimo passato secolo è stata quasi del tutto creata e perfezionata l'algebra, e fu adoperata a prestar ajuto alla sintesi matematica facendole prendere nuovi aumenti specialmente nella parte della geometria, e segnatamente in quella che tratta delle linee curve, o meglio della loro investigazione per mezzo delle rette. Onde diviene un verace dovere di ricordare almeno succintamente la filosofia anco di questa, ora grandiosa parte delle matematiche.

Noi però in quest'opera non ci occuperemo dell'origine e dei progressi di queste due parti, o rami delle matematiche.

Se alcuno desiderasse di essere su questi oggetti pienamente informato, troverà cognizioni preziose ed a dovizia nella storia delle matematiche di Montucla, nelle opere di Cossali e specialmente in quella che tratta espressamente dell' origine e progressi dell' algebra in Italia; ne troverà

nelle opere di fra Luca Valerio, in quelle del Libri, ed in molte accademiche memorie stampate specialmente tra le raccolte dell' Instituto di Bologna, dell' Accademia delle Scienze di Parigi, di Berlino, di Londra, di Pietroburgo, ecc.

165. Incominciando adunque a far parola dell'aritmetica, ci conviene in sulle prime ben distinguere le cose che questa scienza prende in considerazione nelle sue teoriche e pratiche applicazioni, dai simboli artificiali con li quali esprime i suoi concetti o pensamenti.

166. L'aritmetica, detta anco scienza dei numeri, risguarda specialmente le unità, e le loro unioni o combinazioni.

Ora l'unità aritmetica è un' ente arbitrario ed a niuno particolare valore o nozione ristretto. Questa si può e si deve avere per una verace grandezza geometrica, di suo genere, cioè per una verace grandezza ideale astrattissima e pienamente dotata, come le altre grandezze della insigne proprietà del continuo; quindi infinitamente divisibile ne più ne meno di qualsivoglia altra grandezza algoritmica, geometrica, ecc. ecc.

167. Nella filosofia matematica non occorre indagare per quali e quanti mezzi la nostra mente si formi o si procuri queste nozioni soggettive intorno l' unità numerica dotata appieno della proprietà del continuo, ed è pure inutile ricercare se la mente nostra arrivi a queste astrazioni incominciando dai dati empirici partendo cioè dalla cognizione delle unità reali ed esistenti, ovvero se essa, la mente, si fondi sopra pure idee ed anco queste soventi volte ipotetiche.

Quello che unicamente interessa la nostra filosofia si è la considerazione, che l'unità è una posizione o un'idea fondamentale necessaria, tanto nelle cose astratte quanto nelle empiriche.

Senza l'idea di un'unità tornerebbe impossibile ogni aritmetica, cioè ogni multiplo, submultiplo, ogni comparazione, ecc. L'unità arimetica fu scelta in modo astratto ed indeterminato e generale, acciò fosse sotto questa forma adattata e capace ad esprimere qualsivoglia cosa o entità tanto reale che ideale.

168. Questo stato di astrazione e di forma indeterminata attribuito all'unità numerica, la rende capacissima ed attissima ad abbracciare tutto il campo indefinito anzi infinito di qualsivoglia grandezza e di lei valore. E questo non è ancor tutto quello che ci vuole a procacciarci una compiuta nozione dell'unità numerica astratta, poichè convien pensare, che essa come verace grandezza astratta soggettiva, può rappresentare tutte le grandezze e tutte le cose in modo, che in esse conservi pienamente intatta la loro proprietà del continuo, che possono avere e che moltissime effettivamente hanno.

169. Ora si osservi, che ogni numero è formato di unità, esso è più o men grande secondo il numero delle unità concorse a formarlo; quindi col crescere delle unità aumenta il numero e scema col decrescere di esse, dunque quasi ogni filosofia del numero dipende dalla filosofia delle unità, come pure da essa o dalle sue unioni hanno origine i diversi rapporti numerici, ecc.

170. Non debbe mai esser sorpassato, che le unità concorrenti a dar vita ad un numero qualunque si suppongono e si ritengono tutte eguali tra di loro; ed i numeri non posson esser altramente considerati se non come gruppi più o men grandi di unità tutte perfettamente simili ed eguali nel loro astratto o concreto valore.

171. L'unità numerica sendo presa in astratto ed in modo indeterminato si può adoperare per esprimere od indicare tanto una linea che una superficie, un solido, un

tempo, uno spazio, una forza reale od ideale, ovvero qualsivoglia altro oggetto, ed in qualsivoglia stato sussistente, od ipotetico. In ogni concreta o ideale applicazione però si ritiene sempre inalterabile in tutto il corso del ragionamento.

In questo costante inalterato concetto o valore dell'unità sta riposta la possibilità e l'effettivo titolo di comparazione o della ragione di ogni numero considerato a petto di un'altro.

172. Il rapporto o la ragione delle quantità numeriche è la cosa più interessante tanto per ciò che risguarda l'applicazione dell'aritmetica alle scienze, quanto per quello concernente le arti ed il commercio. E siccome ogni giusta e fondata comparazione presuppone unità fissa ed inalterabile, perciò tutti i popoli, tutte le città, i regni, ecc., hanno dovuto sciegliere delle unità; e benchè tutti dessero all'unità quel valore che loro più piacque, tuttavia tutti li vediamo avere le loro unità di pesi, di misure, ecc.

Nell' unità numerica convien sempre distinguere la di lei piena attitudine ad esprimere ogni cosa, dal di lei intrinseco valore che ci piace di attribuirle; poichè l'ultimo è sempre al tutto arbitrario, il primo non è mai pienamente indeterminato ed arbitrario, perchè molti oggetti non possono esser espressi arbitrariamente per l'unità, ma secondo il loro modo o stato di esistere debbon essere rappresentati.

173. L'unità numerica astratta è dotata della proprietà del continuo; benchè questo stato tutto soggettivo di essa sia fabbrica della nostra attività intelligente, tuttavia non si può dimenticare che in origine almeno il tipo dell' unità, la nostra mente, lo ha avuto dai dati empirici. La nostra facoltà pensante rinviene nella propria *individualità* il tipo uno, lo ha negli altri oggetti esteriori materiali, come ha in essi ancora tipi di multipli, e submultipli.

La parte però dell'unità numerica che è tutta fabbrica soggettiva della nostra creatrice attività intelligente, ha delle prerogative, dalle quali gli oggetti reali o tipi reali ne difettano.

Ora sopra la qualità soggettiva è fondata la scienza aritmetica astratta; in questa tanto le unità che i consecutivi numeri sono pienamente dotati delle proprietà del continuo, per lo che la scienza aritmetica generale astratta spazia e si aggira in un campo infinito, quale si addice alla natura di tutte le grandezze rivestite ed informate della natura del continuo.

174. L' unità numerica per esser astratta indeterminata può adoperarsi ad indicare qualsivoglia grandezza o qualsivoglia cosa, o parte di essa, atteso che si accomoda e si appropria ad ogni valore; ma cosa accade a questa unità quando si adatta ad esprimere sì fatte individuali quantità? Avviene ad essa quello che accade a tutti i tipi o le nozioni astratte, le quali contraendosi al concreto, depongono, se così è lecito esprimersi, la forma indeterminata, o quella dell'ente puramente ideale soggettivo, ed invece assumono quello della grandezza reale concreta, non conservando altro di astratto che la proprietà del continuo, della quale mai non si sveste il tipo o l'unità.

Gli è per quest' ultima proprietà che quando le unità numeriche esprimono delle realità o dati empirici si considerano ancor essi quasi fossero o siano infinitamente divisibili; così il corpo dell' uomo indicato numericamente coll'unità ci si presenta come divisibile in decime, in centesime, in millesime parti, benchè il nostro corpo effettivamente non possa esser diviso in parti senza perire.

Lo stesso avviene di tutta la serie dei viventi, dei vegetabili, e di tutti gli altri consimili enti od oggetti.

175. Da queste osservazioni si comprende, che la natura

dei numeri essendo generale e soggettiva astratta riesce perciò anco al tutto estranea alla natura degli enti concreti, che essi son destinati a numerare; quindi i numeri contengono delle proprietà delle quali gli enti concreti non sono suscettibili. Questa disarmonia però ben addentro sguardata dipende dal confondere che noi facciamo alcuna volta promiscuamente l'oggettivo col soggettivo, mentre sono due cose eterogenee.

176. Conviene sempre ancora aver presente, che le unità numeriche quando si adoprano ad indicare oggetti concreti, esse vestono in qualche parte l'aspetto e le qualità degli oggetti numerati, e quando si usano per numerare cose astrattissime e generali, allora conservano intiera tutta la lor natura astratta soggettiva.

Così v. g. se dieci unità vengono adoperate ad esprimere dieci uomini; queste unità possono partecipare delle proprietà umane, ma quando i dieci uomini devono esser presi, o moltiplicati per dieci, allora quest'ultimo numero dieci, che esprime il numero delle volte che debbon esser replicati li dieci uomini; questo numero dieci, non depone ne anco apparentemente veruna delle sue proprietà generiche soggettive generali e astratte.

177. Questo secondo numero astratto, che nel numero antecedente fa le veci, o l'ufficio di moltiplicatore, presenta delle considerazioni che la filosofia non può sorpassare. Così le dieci unità esprimenti dieci uomini, non possono sotto di questo aspetto concreto far le veci di moltiplicatore, perchè chi dicesse, che dieci uomini moltiplicano dieci uomini, pronuncierebbe una proposizione senza alcun significato, atteso, che dieci uomini concreti non posson moltiplicare dieci uomini. All'invece lasciando concreto il numero dieci impiegato ad esprimere dieci uomini, e pigliando con forma intellettuale e con numero necessariamente astratto e

generale li dieci uomini, abbiamo il prodotto, cioè il cumulo di dieci volte dieci uomini, che appellasi cento uomini.

Quello che qui diciamo del numero astratto, e che nell'arrecato caso fa la funzione di moltiplicatore, si avvera per ogni altro numero che si adoperi a prendere multipli, o submultipli di dati oggetti, o di astratte grandezze.

178. Nel caso che siam qui venuti osservando di dieci uomini espressi per un numero rispondente a dieci unità, moltiplicato o diviso per l'altro soggettivo astratto, che abbiamo appellato moltiplicatore, conduce ad un risultamento, che si ritiene o si considera per reale e concreto, cioè somministra il numero degli uomini risultante dalla moltiplica dei dieci. Ma quando i due numeri che si moltiplicano o si dividono, siano ambidue astratti e non esprimano nè l'uno nè l'altro enti reali, cosa significa in tal caso v. g. una moltiplicazione o una divisione? Allora il prodotto della moltiplica, ovvero il quoto della divisione riesce un numero tutto astratto ed appieno geometrico o generale. In ogni caso per altro che il moltiplicando sia esprimente numero indicante cose o numero astratto, sempre è necessario, in ambidue queste circostanze, che il numero moltiplicatore sia astratto e mai non venga meno in questa sua proprietà generale e soggettiva. Perciò la nostra intelligenza non considera e non ravvisa in questo numero astratto, che fa le veci o esercita la proprietà di moltiplicatore, non ravvisa, se non la facoltà di prendere tante volte il moltiplicando, quante sono le unità dello stesso moltiplicatore: ovvero di prendere tante parti frazionarie del moltiplicando quanto vale il valor frazionario astratto del moltiplicatore.

179. In queste poche osservazioni sta riposta la filosofia dell'aritmetica. Abbracciando quindi la natura astratta del moltiplicatore tutto il vasto indefinito campo dei valori, di cui è suscettiva ogni grandezza geometrica rivestita della

proprietà del continuo, ne viene, che il moltiplicatore può essere composto di sì gran numero di unità da poter colla ripetizione indefinita del moltiplicando dar vita ad un numero quanto mai si voglia grande, e ne discende parimenti, che potendo esprimere qualsivoglia minimo valor frazionario dell' unità, così non pigliando esso moltiplicatore che una minima parte del moltiplicando, può perciò presentare qualsivoglia tenuissima grandezza.

180. Di qua si vede, che ci si presentano, per queste ragioni, d'innanzi come due campi indefiniti, dei quali l'unità par che ne occupi quasi il mezzo. In uno le grandezze numeriche possono presentare qualsivoglia grandissimo valore; nell' altro le grandezze numeriche ci presentano qualsivoglia tenuissima parte escogitabile, o possibile dell'unità.

181. Ricordate queste fondamentali verità sopra delle quali si aggira la scienza aritmetica, ci resta a far un cenno dei simboli dei quali gli uomini sono convenuti di adoperare per esprimere tutte le contingibili grandezze numeriche tanto intere che frazionarie di ogni maniera. Noi però dichiariamo, che nell'esporre questi simboli non abbiamo verun pensiero di toccare le dottrine conosciute, intorno ai numeri, intieri e rotti, risguardanti i rapporti, le potenze, i fatti numerici, le loro combinazioni, ecc.

Queste dottrine, che sono tutte espresse coi simboli numerici che accenneremo, ci svierebbero dal nostro scopo. Chi bramasse esserne istrutto può consultare le opere di Euclide, di Diofanto, di Eulero, di Bernoulli, di Paoli, di Gaus, di Legendre, e quelle di molt'altri.

182. Venendo dunque ai simboli universalmente, ora in uso per esprimere ogni grandezza numerica ed ogni parte di essa, diremo che dopo varii usi di lettere appo i Greci, e dopo speciali simboli usati dai Romani, universalmente si

convenne di adottare i simboli indiani, da essi adoperati ad esprimere ogni escogitabile grandezza. Che poi questi simboli, detti anco cifre, spettino agli Indiani, ce ne assicura il celebre geometra Delambre nella sua bellissima *Storia dell'astronomia antica*. Queste poche cifre, costituiscono certamente in fra tutte le altre che si sono inventate, la maniera più semplice e più adattata ad esprimere, almeno per indefinita approssimazione, ogni valore della grandezza numerica.

183. Gli Indiani adunque fecero uso di sole nove cifre significative, e dello zero. Le cifre significanti unità e numeri sono le seguenti: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9 e lo zero che segnarono 0. Queste nuove cifre, dette anco cifre arabiche, perchè tra noi portate a cognizione dagli Arabi, quando invasero le parti occidentali dell'antico impero Romano, sono divenute di universale uso.

284. Tali cifre da tutti pienamente intese, disposte in colonne diverse e secondo una direzione orizzontale ricevono un valor decuplo del loro intrinseco significato, di modo che la cifra, qualunque essa sia, collocata nella prima colonna a destra esprime le unità, la cifra posta nella seconda colonna da destra venendo a sinistra esprime le decine delle unità, quelle della terza colonna le centinaja o le decine delle decine, quelle della quarta le migliaja, e così prosiegui secondo l'indicazione posta in tutti i libri che trattano di aritmetica.

Il simbolo dello zero, oppure la 0 che lo rappresenta, benchè non significhi alcun valore, pure esso serve ad occupare il posto di una o più colonne e quindi a fare, che le cifre delle colonne, che così vengono retrospinte nelle colonne verso sinistra, abbiano quel maggior valore, che si addice alla colonna da esse occupata; secondo la regola innanzi accennata.

Tutti questi indefiniti valori delle cifre corrispondenti

a tutte le escogitabili colonne che possono occupare sono chiaramente esposte in tutti i buoni libri che trattano dell'aritmetica.

184. Accennato questo modo di numerazione, costituente in certa tal maniera la lingua simbolica dell'aritmetica, noteremo, ed in via storica, che la formazione di tutti i numeri intieri e frazionarii avviene e si verifica in due diversi modi. Quando un numero si unisce ad un altro per formare con la sua aggiunta al primo una somma, questa anticamente appellavasi numero formato per *extra susceptionem.* Quando il numero ingrossa in causa di moltiplicazione per sè stesso allora si denominava la somma quasi *per intus susceptionem.* Questa seconda maniera dà luogo ad un prodotto o somma, denominata anco potenza. Allor che la potenza presenta ingrandimento di grandezza, presuppone che il numero che moltiplica sè stesso abbia un valore maggior dell'unità.

185. Similmente può accadere, che da un dato numero si levino o da esso si stacchino delle unità, ed a questo modo si venga mordendo parte della sua grandezza. Può anco intervenire, che il numero impicciolisca per la elevazione a potenza, come si verifica ogni qualvolta sia esso una frazione dell' unità. In questo caso si considera questa diminuzione del numero derivante quasi *per intus decrementum.*

Ommettendo però queste al presente disusate maniere di esprimere tali diversi stati della grandezza numerica, sarà miglior partito il considerare, che ogni mutazione o variazione sopravvegnente alla grandezza numerica si opera sempre o per somma o per sottrazione; alli quali due modi inducenti mutazione di valore in queste grandezze, rispondono come mezzi compendiosi la moltiplica e la divisione.

186. Ciò che fa la moltiplica lo disfa la divisione, e quello che fa la potenza, lo disfa l'estrazione della radice;

la qual' ultima si ridurrebbe ad una semplice divisione, quando fosse noto il fattore o il numero che è stato elevato a potenza. Ma siccome i prodotti numerici, non che le potenze di queste grandezze, non conservano traccia veruna della loro formazione, perciò non si può far uso della semplice divisione. Fu dunque sentito bisogno ricorrere ad altra speculazione, per procacciarsi una regola di estrarre la radice dalle diverse potenze numeriche.

187. Per buona ventura quando l'aritmetica si accingeva alla difficile ricerca del metodo di estrarre le radici, la geometria e l'algebra venivano in di lei ajuto, e le presentavano dei tipi, i quali potevano prestare regole precise e sicure all'aritmetica per condursi francamente nell'estrazione delle radici delle diverse potenze.

L'algebra specialmente presentava passo per passo tutta la formazione del quadrato perfetto del monomio, del binomio, al qual'ultimo poteva ridurre sempre qualsivoglia polinomio. La geometria dal canto suo porgeva anch'essa una esatta idea della seconda potenza e della terza, cioè di un perfetto quadrato e di un perfetto cubo.

Queste due parti adunque della scienza geometrica venivano in sussidio dell' aritmetica. Tuttavia in questo luogo convien confessare, che ciò non riusciva difficile nè anco all'aritmetica quando nella formazione delle sue potenze usato avesse dei medesimi metodi dei quali usava la geometria e l'algebra ed avesse tenuto conto dei prodotti solamente indicati e non compenetrantisi in nuovi numeri.

188. Il tipo generale ed importante che queste due parti del saper matematico, l'algebra e la geometria, porgevano all'aritmetica, era il tipo di una potenza perfetta, cioè v. g., di un quadrato sempre compiuto di un monomio, binomio o polinomio. Da ciò è facile il comprendere, che ogni qual volta un numero non riusciva ad essere un quadrato per-

fetto, allora non se ne poteva mai assegnare con rigore la radice del numero di cui si tratta.

Così nella serie dei numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, non vi sono che tre numeri che si possano aver per quadrati; cioè l'uno, il quattro, il nove. Il primo però di questi quadrati, quello dell'unità, è piuttosto supposto potenza e radice che vero quadrato.

Allorchè gli aritmetici per alcune loro indagini si trovarono nel bisogno di considerare quali potenze seconde li numeri 2. 3. 5. 6. 7. 8, ecc., non essendo questi perfetti quadrati di alcun numero, si dovettero accontentare di cercare la radice unicamente per approssimazione.

189. Le difficoltà che si incontrano ad estrarre le radici e per le quali siamo costretti ad accontentarci di estrarre le radici dei numeri 2. 3. 5. 6. 7. 8, solo per approssimazione si accrescono assai quando noi abbiam bisogno di considerare questi ed altri consimili numeri, quali potenze più elevate del quadrato, come sono le terze, le quarte, ecc.

190. Indefiniti sono i numeri della serie naturale, indefiniti quelli che esprimono tutti li valori frazionarii dell'unità. Ora con quali mezzi si accinge l'aritmetico alla ricerca delle radici di tutti questi numeri, e di tutte queste frazioni, quando gli uni e le altre sono considerate quali potenze? Egli vi si accosta con in mano una regola unica tanto in teorica che in pratica; quella cioè che gli somministra l'algebra e la geometria per trovar la radice del quadrato perfetto o del cubo e con quest'unico mezzo s'attenta alla indagine di tante e sì difficili radici.

191. Forse nell'aritmetica più che in altra parte delle matematiche si appalesa la nostra impotenza ad esprimere tutte le indefinite maniere dei valori che aver possono li numeri sottoposti pienamente alla legge e alla natura del continuo. E tale difficoltà deriva specialmente dalla forma

sempre determinata e, diremo, anco limitata delle cifre numeriche sopra ricordate.

La qual forma difficilmente si presta a tutte rappresentare perfettamente le infinite svarietà dei valori che in forza della natura del continuo assumer possono le grandezze numeriche.

192. Un'altro e non lieve ostacolo, in cui incontriamo, nella ricerca delle radici dei diversi numeri, ritenuti o considerati quali potenze, consiste in questo, che i numeri quali da noi si adoprano ad indicare diversi valori, ci nascondono quasi sempre la loro origine o la loro generazione. Così v. g. il numero 9 è il quadrato del numero 3; ma può oltre questa derivazione della moltiplica del tre per sè stesso, essere stato prodotto da qualcheduna delle somme derivanti dalla spartizione del nove in unità intiere, o per mezzo di unità intiere e frazionarie, può essere un residuo, un quoziente o una radice di altre sue proprie potenze, ecc.

193. L'incertezza nella quale quasi sempre ci troviamo circa l'origine di un dato numero, fa, che quando lo vogliamo ritenere o considerare una potenza quadrata o cuba, allora non possiamo avere altro metodo di indagare la sua radice quadrata o cuba, se non quello che ci somministra il tipo generale che abbiamo dall'algebra o dalla geometria.

194. Questo tipo nella maggior parte dei numeri non è capace ad estrarre le radici, perchè la più parte dei numeri naturali non sono potenze esatte. Ciò non pertanto i geometri ai quali tornava soventi volte in acconcio di considerare tutti i numeri indistintamente quali potenze esatte, o approssimativamente esatte, si fecero a ricercare le radici dei numeri tutti con quella grande approssimazione che essi desideravano avere. E queste radici, rinvenute con lunghi e penosi calcoli, hanno dato origine ai logaritmi, una delle più

utili, felici e feconde idee che siano venute in mente ai matematici.

La determinazione appunto di queste radici, effettuata per mezzo dei logaritmi, riusciva a risparmio di operazioni lunghe e penose, e convertiva tutte le operazioni aritmetiche in semplici facilissime somme o sottrazioni. In fatti siccome l'algebra insegnava, che una quantità si elevava alla seconda potenza v. g. col duplicare il di lei esponente, e si innalzava al cubo col triplicarlo, ecc., si vede perciò, che le ricerche circa questo oggetto si riducevano a sapere, quale esponente si doveva apporre ad un numero scelto ad arbitrio, perchè doblato che fosse questo esponente presentasse il numero che si considerava qual seconda potenza e dimezzato la sua radice. Di qua è facile conoscere, di quanta utilità e speditezza riescano appunto le tavole logaritmiche, nelle quali sono preparati ed espressi in numeri e frazioni decimali di numeri tutti questi esponenti, che servono a tutte le operazioni numeriche.

195. Abbiam detto, che la geometria e l'algebra somministrarono le tracce e l'andamento di tutta la composizione di un quadrato perfetto di qualsivoglia grandezza, tanto espressa sotto forma monomia, quanto sotto forma binomia, o polinomia; ora riportiamo qui questi tipi, e per non dire dei monomii, che sono troppo facili e semplici, ricordiamo quello del binomio, (giacchè questo comprende ogni polinomio, poipoichè può sempre con facilità ogni polinomio esser espresso sotto forma di binomio).

Ognuno sa dalla geometria, che il quadrato della linea m a è m a c p; e tagliando la linea m a nel punto n, formandone così un binomio espresso dalle due linee m n, ed n a, si hanno parimenti le quattro seguenti parti m n z o + n a b z + z b c v + o z v p.

Questi quattro prodotti costituiscono, presi insieme, il quadrato m a c p. Queste stesse grandezze espresse sotto forma algebrica danno il quadrato $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$, facendo prima m n = a, e n a = b.

Questi tipi di quadrati perfetti, tanto della forma geometrica che algebrica, contengono e presentano sotto gli occhi le tracce della radice da cui derivano; perciò ci danno quasi in modo grafico espressa la regola che dobbiam seguitare nella ricerca delle loro radici. Di questa radice non ci occuperemo in questo luogo perchè tutti gli elementi geometrici ed algebrici ne parlano diffusamente.

196. Noi abbiam detto, che il quadrato della m a era m a c p, cioè un campo di superficie piana conterminata da quattro uguali linee, poste tra loro a squadra. Ora ogni uno conosce, che una linea, entità di sola lunghezza, non può originare una superficie, poichè questo si presenta un mero paradosso, un vero enigma. In fatti la linea, per posizione e condizione universalmente ammessa, non ha che la sola dimensione di lunghezza, mentre la superficie piana ne ha due, cioè lunghezza e larghezza; e siccome quest' ultima dimensione è affatto eterogenea alla prima, così non si potrà mai comprendere la possibilità di derivare il largo dal lungo. Convien dunque dire ed ammettere, che unicamente per pura supposizione si ritenga che il quadrato di una linea retta riesca una superficie rettilinea o piana.

È bensì vero che i contorni della superficie quadra m a c p sono linee rette, ma ciò nulla ha a che fare colla natura e proprietà della superficie, la qual' ultima è un ente atti-

nente più presto allo spazio, il quale è un essere assai diverso dalla pura dimensione di lunghezza.

Perchè dunque avviene che i geometri nei loro elementi, considerino che la moltiplicazione della linea m a per sè stessa o per la sua identica a c dia origine al quadrato m a c p? Ecco in qual maniera si può giustificare la formazione di questo quadrato; si deve pensare, che la nostra mente soggettivamente vi introduca bella e fatta la entità di superficie la quale entità in ogni senso di larghezza si ritiene disposta in un quadrato.

È dunque una pura ipotesi, che nel caso nostro si consideri che la potenza di una quantità di sola lunghezza dia origine e vita ad una quantità avente larghezza. E di vero, se la grandezza lineare fosse v. b. di quattro metri, e questa si voglia elevarla al quadrato moltiplicandola per sè stessa, ognuno intende, che il prodotto numerico di questa moltiplica riuscirebbe di sedici metri lineari o sedici metri di pura lunghezza. Se adunque li quattro metri di lunghezza danno secondo il dire dei geometri, sedici metri, non di lunghezza, ma di superficie, questo non può essere se non per nostra ipotetica convenzione, la quale in sostanza scambia li quattro metri lineari in quattro metri di superficie, per indi aver diritto a considerare il prodotto di sedici metri, come metri di superficie, anzi che metri lineari. Imperciocchè quando le cose non procedessero in questo modo è troppo facile il conoscere, che una grandezza accresciuta per moltiplicazione di sè stessa, non potrebbe diventare intieramente diversa, anco nella sua natura dalle parti moltiplicantisi. Più, stando alla esatta idea del quadrato o seconda potenza, di quattro metri lineari noi aver dobbiamo sedici metri lineari, li quali appunto sono rappresentati dalli quattro lati m a, a c, c p, p m, nell'ipotesi che ognuna di queste linee sia di quattro metri di lunghezza.

Ora a questa lunghezza di sedici metri nulla manca perchè sia una esatta potenza seconda di quattro metri lineari.

Convien dunque che per necessità si introduca o mentalmente si trasformino li quattro metri di quantità lunghezza in quattro metri di superficie, e tutto ciò come dato necessario bello e fatto, cioè conviene che invece delli quattro metri di lunghezza della linea m a espressa come segue |—|—|—|—| vi si pongano quattro metri di unità di superficie espressi come segue B

Presupposta questa base fondamentale di superficie, ed introdotta quale elemento esprimente la natura dei quattro metri che si innalzano al quadrato, di leggeri si comprende che, le quattro unità di superficie indicate B produr possano, anzi debbano presentare sedici metri di superficie, quali sono indicati nella figura C.

C

La filosofia non può comprendere come i geometri, senza nemmeno badare ad una tale incongruenza logica, del loro quadrato superficiale abbiano sempre detto ed insegnato, che il quadrato di una linea retta presentasse una superficie corrispondente nella sua grandezza al numero delle unità di pura lunghezza; giacchè il loro procedere, riusciva nulla meno, che a dire, che una grandezza omogenea aumentando mutava natura, e ciò in causa di semplice e puro aumento; il che apertamente ripugna.

197. Queste osservazioni debbon essere appropriate parola per parola, coi debiti riguardi, anco al predicato geo-

metrico risguardante la produzione o la generazione del cubo, o meglio del solido geometrico; il qual solido, stando alla maniera comunemente usata dai trattatori di elementi di geometria, si considera come la terza potenza di una data grandezza lineare; o come ad altri piace, si ritiene come il risultamento di una superficie quadrata moltiplicata per la linea esprimente uno de' suoi lati. Ma il fatto sta, che in tutta questa fabbrica geometrica del solido tutto è incongruenza, poichè come è detto la linea non può produr superficie, e la mostruosa moltiplica della linea con la superficie non può dare esistenza al solido.

Quando adunque si voglia avere la verace nozione della generazione del solido, fa duopo che la nostra mente presupponga bella e fatta l'unità solidale, e questa la ritenga o la immagini come sopprapposta all' unità di superficie, per così allora potere dar vita al solido, considerato quale prodotto di unità solidali primitive ed intieramente supposte, e non dedurla giammai da elementi eterogenei inetti, e del tutto incapaci a dar la produzione del solido medesimo.

Ho voluto accennare questo punto cardinale della filosofia di tali elementari grandezze geometriche per rendere avvertita la gioventù, che non si avvezzi ad ammettere troppo alla buona le assurde generazioni delle grandezze delle quali trattasi, cioè concernenti la generazione della superficie e quella del solido.

Tuttavia non si niega, che per singolare coincidenza di modo pratico di procedere nelle operazioni geometriche non si abbia anco l'espressione di una superficie, moltiplicando le unità in apparenza lineari, ed il solido, moltiplicando la superficie per le stesse unità in apparenza pure lineari. Intanto acciò queste moltipliche siano rese possibili e molto più, perchè abbiano un significato ragionevole, sempre abbisognano di tre supposizioni; cioè primo, che le unità li-

neari per poter esser moltiplicate debbon esser considerate come un numero concreto lineare e in pari tempo come numero astratto, per così poter avere la veste e la proprietà di moltiplicatore, nella quale il moltiplicatore è astratto e sempre al tutto soggettivo num.ri 176. 177. 178, ecc.

Secondo, che per avere dei prodotti di superficie vi sia introdotta da noi l'unità superficiale in luogo della lineare, e parimenti che la moltiplicazione delle unità superficiali sia fatta per un moltiplicatore di natura astratto e soggettivo. Terzo, che per avere il solido sia egualmente presupposta l'unità solidale, nella formazione del cubo, e similmente che le due moltipliche che si suppongono richieste alla formazione di un solido, siano ambedue l'effetto del numero moltiplicatore astratto soggettivo.

198. Per vie meglio rendersi sensibili queste patenti verità, si prega il lettore a riflettere, che il quadrato della linea retta non consisterebbe in altro, che nelle quattro semplici linee, conterminanti la superficie del quadrato C, n. 196, poste tra loro a squadra; ed il solido regolare chiuso entro linee rette, parimenti a squadra (quando non si abbia riguardo che alle linee che lo conterminano), esso non sarebbe che una specie di gabbia tutta vuota nel mezzo; e quando non si avesse riguardo che alle superficie rettilinee, che parimente lo contengono e lo chiudono, esso non sarebbe che una casetta tutta vuota nel mezzo. Ora ognuno comprende, che nell'un caso e nell'altro, non vi sarebbe nemmen l'ombra di solido nè reale nè ideale.

L'unità adunque solidale conviene che soggettivamente vi sia introdotta dalla nostra mente, e questa supposizione è quella sola che può dar vita al solido. Ad ogni modo però è fuor di dubbio, che con queste tacite supposizioni si ingenera mentalmente il solido, e non mai con modi al tutto antilogici posti in uso ed adoperati, senza veruna esplica-

zione, dai geometri, quando eseguiscono le accennate operazioni.

199. E giacchè il ragionamento ci ha condotti in su la considerazione delle potenze tanto lineari che superficiali, solidali, ecc., osserveremo, che siccome nella scienza numerica tanto astratta che concreta, l'unità si considera come ente uno inalterabile; così il quadrato la sua terza potenza, ecc., è sempre la stessa unità. Tutti i numeri maggiori o minori dell' unità provano variazioni in più ed in meno, elevandosi a potenze; l'unità all'invece non prova nè può provare cangiamento di sorta. Questo sempre si avvera anco delle unità concrete, cioè di lunghezza, di superficie solidali, ecc. ecc.

Cosa dunque significa la seconda, la terza, ed ogni successiva potenza dell' unità? Io non lo saprei dire; ed amerei anzi che qualchedun mi dicesse qual sia il vero suo significato.

200. E qui ci rimane da rischiarare un altro concetto, cioè ci resta di spiegare quello che s'intende esprimere quando si appella potenza di un numero esprimente qualche oggetto concreto, così v. g., cosa s'intenda significare quando si dice, che quattro piedi di superficie si considerano come potenza di due piedi di superficie.

Per comprendere alla meglio il significato di questo modo di dire ci convien pensare primamente, che la filosofia mal si presta a concedere, che quattro piedi di superficie sieno il quadrato di due piedi di superficie; imperciocchè due piedi di superficie non posson moltiplicare due piedi di superficie, perchè tale operazione manca di possibilità e persino di ogni significazione. E in vero, più uomini non posson moltiplicare altrettanti uomini, nè più piedi di superficie posson prendere o moltiplicare altri piedi di superficie e così prosegui. Parimenti non si comprende bene,

come li quattro piedi di superficie possan essere ingenerati o risultanti dalla moltiplica di due piedi di superficie moltiplicati per un numero due tutto astratto ed a niuna concreta significazione applicato, onde rimane sempre in certo modo necessario, che le due unità di superficie, nel concreto caso, depongano il loro significato, o meglio la loro concreta rappresentanza di superficie, e spogliate di questa, ritornino allo stato di numeri astratti, ed in questo modo esser ridotti ad una vera omogeneità in confronto del moltiplicatore sempre astratto e così esser atti a poter esser elevati a qualsivoglia potenza.

Di quà si ricava adunque, che le potenze matematiche sono proprie solo delle quantità astratte ed a niuna concreta significazione applicate. E siccome poi spesso accade, che i numeri esprimenti cose concrete in forza di variazioni divengano doppii, tripli, ed in qualsivoglia altra proporzione cangiati, così quando questi mutamenti espressi numericamente riescono come le potenze dei numeri esprimenti oggetti, si appellano potenze delle cose o degli oggetti dai numeri istessi significati.

Queste dottrine si comprenderanno anco più dichiaratamente ogni qual volta rifletteremo, che le unità esprimenti grandezze concrete, sendo ritenute invariabili, perciò si presentano incapaci da sè a dar vita ad altre realità di loro maggiori o minori, quali hannosi ad avere sempre le potenze dei numeri intieri o rotti.

201. Ho creduto di dover insistere alcun poco sopra queste nozioni fondamentali della scienza matematica, acciò la gioventù particolarmente, non vada delusa circa il loro vero significato, e perchè intenda profondamente il significato delle diverse operazioni pratiche adoperate nel calcolare le superficie, i solidi, ecc., e molto più acciò sappia sempre in ogni pratica operazione quale e quanta sia la filosofia

da cui è rischiarata e sostenuta; filosofia che tutta o quasi tutta manca nei trattati di matematica elementare.

Algebra.

202. I ragionamenti che siam venuti esponendo parlando delle grandezze numeriche sono pienamente applicabili alle grandezze algebriche e algoritmiche. Ben inteso però, che queste ultime hanno una maniera ed una rappresentazione assai più astratta, e quindi più indeterminata dei numeri. Poichè laddove la stessa unità numerica considerata anco suggettivamente, rappresenta nel suo stato unitario qualsivoglia cosa, tuttavia è almeno limitata a non esprimerne che una sola, laddove la cifra algebrica, una lettera v. g. qualunque, esprime in modo ancora più largo non solamente qualsivoglia cosa concreta, reale od ideale, ma la esprime in modo non limitato a qualsiasi numero o ripetizione di essa.

203. Nella scienza algebrica che nacque e pervenne a molta perfezione prima della scoperta del calcolo infinitesimale, le lettere dell'alfabeto tutte comprese, vengono adoperate ad indicare o ad esprimere qual più piaccia grandezza cognita, incognita, intiera o frazionaria, e tanto implicita che esplicita, ed in qualunque funzione contenuta; e tutta questa rappresentanza s'intende fatta nel modo più largo, generale, indeterminato che si possa imaginare: onde queste lettere, per l'uso dell'algebra dette cifre, si prestano mirabilmente ad ogni combinazione delle grandezze che valgono a poter rappresentare.

Già s'intende sempre, che le grandezze algebriche indicanti tutte le quantità finite cognite, incognite, intiere, frazionare, positive, negative, radicali, potenziali, od algoritmiche d'ogni maniera e di ogni funzione, sono sempre consi-

derate e ritenute come pienamente rivestite della soggettiva proprietà del continuo.

Parimenti s'intende, che tutte le operazioni algebriche sono in numero nè più nè meno di quelle dell'aritmetica, onde è per questo che il grande geometra Newton appellò il suo trattato d'algebra *aritmetica universale.*

204. L'algebra oltre a queste sue cifre dette anco espressioni analitiche, ha ancora un linguaggio tutto proprio il quale consiste in alcuni segni in essa adoperati. Questi segni servono in gran parte ad indicare lo stato relativo delle grandezze, ed in parte le operazioni e modificazioni che sopra le quantità o si sono o si suppongono fatte, o si ritengono ancora da farsi.

205. Questi segni costituiscono una verace lingua algebrica o analitica la quale si è ritenuta anco in tutta l'analisi superiore senza alcuna variazione. Questa lingua è laconica ed assai espressiva, perchè composta di pochi segni e questi appieno determinati. Eccone un sunto. Qualsivoglia unione, di quantità algebriche, algoritmiche e geometriche di ogni maniera, si esprime col segno $+$, detto segno *più;* onde se m viene unito a n, ovvero n unito ad m si scrive $m + n$ oppure $n + m$.

Ogni qual che si abbia ad indicare, che una grandezza deve essere o si considera sottratta da un altra, si appone alla grandezza prima il segno —, detto segno *meno;* onde per esprimere che n è sottratta o si ritiene sottratta da m si scrive $m - n$.

La moltiplica d'una grandezza per l'altra si esprime in uno di questi tre modi; $m \times n$, ovvero $m \, . \, n$, o pure $m\,n$. L'operazione opposta alla moltiplica o la divisione si segna nei seguenti due modi $m : n$ ed anco $\frac{m}{n}$. L'identità

del valore di due grandezze semplici o composte si espone come segue $m = n$, vale a dire m eguale a n. Se occorre esprimere m maggiore di n si scrive $m > n$, al contrario se sia $m < n$ si legge m minore di n.

Per esprimere le potenze delle quantità semplici o composte si pongono dei numeri o delle cifre a destra della quantità ed in alto verso la sommità di essa; così per indicare la seconda potenza di m si scrive m^2, o m m ovvero $m^1 \times m^1 = m^{1+1} = m^2$. Gli algebristi e tutti gli analisti, ritengono per reciproca convenzione che sia $m = m^1$; per questo abbiamo fatte sinonime tutte le eguaglianze qui riportate. Per assegnare la terza potenza di m si scrive m^3, ed m^4 per la quarta, e così via. E si pronunciano queste espressioni o queste potenze dal numero che portano in cima di loro ed al lato destro.

Per egual convenzione si esprimono le radici col segno $\sqrt{\ }$ posto innanzi alle grandezze o alle funzioni qualunque di esse; avvertendo di porre entro l'angolo del segno $\sqrt{\ }$ quel numero che corrisponde alla radice che si vuole indicare. Così per esporre, che dalla grandezza m deve esser estratta la radice quarta si scrive $\sqrt[4]{m}$; se si trattasse della sesta radice, si scrive $\sqrt[6]{m}$; se dalla ennesima si nota $\sqrt[n]{m}$; e così prosiegui. Evvi pure un' altra convenzione tra gli algebristi di ritenere che il segno $\sqrt{\ }$ sia lo stesso che $\sqrt[2]{\ }$.

206. Cerchiamo ora di conoscere la filosofia dei primi due segni, cioè del più $+$, e del meno $-$, che pure ne contengono non poca. E primamente osserviamo che ogni grandezza o entità geometrica ed analitica di qualsivoglia natura astratta e soggettiva, essa non comporta o non ri-

chiede verun segno; o meglio riteniamo che ogni grandezza non esige nè il *più* nè il *meno*, insino a tanto che essa si considera isolata o da sola; vale a dire sino a tanto che la si considera senza riguardo ad altre grandezze o quantità; imperciocchè sarebbe una sciempiaggine il domandare qual segno convenga ad una unità numerica, quale ad una linea, ad un superficie, ad un solido, o quale a qualunque altra grandezza algoritmica insino che essa si considera da sola o quale data e proposta grandezza.

L'entità di ogni grandezza è quella che è, ed il più o il meno, non possono esser ad essa applicati. Quando adunque si vogliano apporre alle grandezze l'uno o l'altro di questi segni, fa duopo, perchè abbiano qualche significato, che non si riferiscano direttamente alle grandezze o alla loro entità, ma sibbene al loro stato estrinseco e relativo o comparativo ad altre grandezze; poichè è cosa per sè stessa evidente che ogni ente, non è ente, che in un sol modo, e che questo modo non è nè positivo nè negativo, ma sibbene modo di ente esistente, e semplicemente esistente. Conviene dunque che questi segni si riferiscano unicamente alle diverse relazioni procedenti dal diverso modo di esistere o di agire delle grandezze.

207. Si incominci adunque a ben comprendere, che per poter premettere ad una grandezza il segno più o meno è necessario che con questo s' intenda indicare uno stato o modo comparativo o relativo ed affatto estrinseco alla grandezza medesima. Perciò quando gli algebristi, dicono, senza alcuna precedente esplicazione, che ogni grandezza qualunque ed espressa per qualsivoglia funzione, si ritiene che essa abbia davanti il segno +, e ciò anco allorquando essa non ha segno veruno davanti a sè stessa, gli algebristi, diciamo, pronunciano una proposizione che in faccia alla filosofia non ha, nè può avere, verun chiaro significato; ma anzi pronun-

ciano proposizione attissima a portare la confusione nella mente della gioventù; imperciocchè il più o il meno che si mette avanti ad una quantità non significa altro e assolutamente altro, che il di lei modo di essere o di agire diverso da quello di altra quantità a lei omogenea ed alla quale essa viene perciò posta in comparazione. E annunciando queste nozioni in modo più generale, diremo, che i segni più e meno esprimono (preposti alle grandezze) le loro diverse ed opposte maniere relative che hanno o si suppongono aver fra di loro.

208. Per altro non dimentichiamo mai, che questa estrinseca relazione o maniera di essere delle grandezze tra loro comparate non tocca nè altera in verun conto il loro quanto, o valore intrinseco di esse; e che nominando tanto $+ A$, quanto $- A$, non s'intende di avere alcun riguardo all'intrinseco valore della stessa A. Dobbiamo pure tener presente all'animo, che questa relazione esterna indicata con uno o coll'altro dei due segni $+$ oppure $-$, non può avere significazione precisa e chiara, se non tra quelle quantità o grandezze, le quali per simil natura posson venir tra di lor poste in comparazione, ovvero posson esser ritenute o supposte suscettive di sì fatto confronto; poichè quando ciò non fosse, o non si potessero considerare unentisi ad agire o ad essere allo stesso modo, nè si potessero ritenere in elisione, o sottraentisi, o se più piace, contradicentisi, allora ad esse non possono convenire nè il segno più, nè il segno meno.

209. Tra i modi estrinseci delle grandezze s'annovera pur quello il quale porta, che una data grandezza di natura perfettamente simile e di valore egualmente identico venga unita ad un'altra simile, in allora questa reciproca unione di stato, può e si vuole indicare per $A + A$, $A + B$, quando si esprima per A una grandezza, e per A l'altra eguale, o pure per A una grandezza e per B un'altra consimile. Avendo

già dichiarato che i segni più o meno non toccano il valore delle grandezze, si vede, che diventano opportunissimi ad indicare le unioni di tutte le grandezze di valore qualunque, come appunto s'è fatto quando abbiamo espressa l'unione di A + A; perchè ognun comprende, che in questa algebrica espressione rimane indeterminato il valore o il quanto della prima e della seconda A, e solo ci ha bastato la pura supposta condizione che A sia eguale ad A. Condizione per altro non richiesta dalla natura del segno, perchè qualunque volta le due grandezze di diverso valore si uniscano con questo loro relativo stato o modo si adopera nè più nè manco il segno più, e indistintamente si scrive tanto A + A, quanto A + B, quanto M + N, ecc. ecc.

Per semplificare più che possiamo le espressioni analitiche, usiamo scrivere 2 A invece di A + A; 3 A invece di A + A + A, come 2 B, anzi che B + B, ecc. Questi numeri che esprimono colle loro unità quante volte sia stata ripetuta una grandezza identica di valore, o come si usa dire, una stessa grandezza, questi numeri, dico, si appellano *coefficienti* o moltiplicatori della grandezza. Qui riesce cosa facile il comprendere, che non esistendo veruna condizione o restrizione la quale ponga un limite al valor del coefficiente, perciò esso può avere qualsivoglia valore numerico intiero o frazionario ed anco essere espresso in qual più piaccia forma di indeterminato valore, o come si usa dire, può essere espresso algebraicamente per qualsivoglia lettera dell'alfabetto.

I numeri adunque o le lettere considerate come coefficienti, o quali quantità indicanti quante volte sia presa una grandezza, alla quale vengono preposti, non dovrebbero di lor natura andar sottoposti a verun segno, perchè come coefficienti non fanno che il solo ufficio di semplici moltiplicatori; ed è perciò chiaro, che alli coefficienti riescono

all'in tutto estranee tutte le altre relazioni esterne, meno quell'unica di moltiplicatore, ed anco questa inalterabilmente unica e sempre conforme a sè stessa. Pure in onta che queste osservazioni siano innegabili, i geometri hanno voluto preporre li segni più e meno anco ai coefficienti; con questo contegno però i geometri non potendo cangiar la natura delle grandezze impiegate a questa funzione ed unico ufficio di coefficienti, si sono presi un'arbitrio che noi ci dobbiamo ingegnare di spiegare, acciò si possa filosoficamente determinare cosa significhino questi segni che si son voluti preporre a questo genere di quantità; imperciocchè il segno in questo genere di quantità non può significare diverso modo di agire o diversa relazione, giacchè al coefficiente non ne compete che una sola ed inalterabile. Cosa dunque posson significare li segni più ed il meno proposti al coefficiente di cui parliamo? Ella è cosa aperta che questi segni avanti al coefficiente non possono avere altro significato eccetto il seguente, ed anco questo all'in tutto estraneo alla sua natura di semplice moltiplicatore; ed il significato è questo, di additare cioè, se la grandezza alla quale è preposto il cofficiente, ed alla quale grandezza posson convenire li due segni più e meno, debba essere presa tale quale essa è, ovvero debba essere presa in uno stato opposto allo stato che essa presenta in forza del proprio segno, v. g. se la grandezza fosse $+ (w)$, ed il coefficiente fosse $+ n$, in allora il più segno del coefficiente indicherà che la (w) deve esser presa tale quale essa è, cioè col proprio di lei segno non cangiato, vale a dire, n volte col segno proprio più, e nel caso che il coefficiente abbia il segno $- n$, in allora vorrà dire, che la grandezza (w) deve esser presa n volte in uno stato al tutto contrario a quello indicato dal segno proprio, cioè col segno negativo, onde si avrà il prodotto $- n (w)$. Per egual ragione se

la (w) avesse da prima il segno meno o fosse — (w), ed il coefficiente il segno + n si avrebbe per prodotto — n (w), e quando fosse — (w) per — n, finalmente si avrebbe + n (w).

Questo è l'unico possibile significato che possiamo attribuire ai segni più o meno preposti ai coefficienti; onde questi segni, che preposti alle grandezze indicano gli stati relativi che esse hanno tra grandezze e grandezze, nel coefficiente questi medesimi segni indicano all'invece unicamente, se queste grandezze debbano esser prese nel loro stato, e perciò col loro segno che hanno, ovvero in uno stato opposto o con segno contrario a quello che hanno.

Nè si creda che al coefficiente, considerato anch' esso quale grandezza, come tutte le altre, possan competere li segni più o meno e nel significato delle altre grandezze perchè questo sarebbe pensamento antifilosofico. In fatti, il coefficiente, benchè espresso con simboli numerici, o con lettere astratte ed indeterminate dell'analisi, è sempre un numero o una lettera contratta o ridotta ad una sola significazione particolare, a quella cioè, di puro moltiplicatore; ed in quest' ultimo stato è evidentemente incapace ad indossare i diversi stati delle grandezze tanto ideali soggettive, quanto particolari e concrete.

210. Questi medesimi segni più e meno presentano adunque due ben distinte funzioni, o meglio, significazioni, secondo che essi stanno avanti alle grandezze, e secondo sono avanti alli coefficienti. Nel primo caso il segno indica lo stato relativo estrinseco della grandezza, nel secondo caso indica se la grandezza debba esser presa (tante volte quante richiede il valor del coefficiente) secondo il proprio segno che ha innanzi a sè stessa, ovvero in uno stato al tutto opposto, cioè col segno cangiato.

211. Ora se associeremo le idee espresse e dichiarate nei

numeri 177, 178 e 179, con le presenti dottrine, non troveremo alcuna difficoltà a conoscere, che tutto quello che qui veniamo esponendo del coefficiente, è identicamente lo stesso di quello che abbiam detto del numero o della quantità qualunque che vien destinata a far le veci di moltiplicatore, giacchè tanto il coefficiente quanto qualsivoglia moltiplicatore, non differiscono che di puro nome, poichè nel resto sono la stessa cosa sotto due diverse denominazioni. Ciò ritenuto si comprende di leggieri e pienamente, come sopra queste osservazioni innegabili riposi, quasi in sua propria base, la filosofia di tutte le vicissitudini dei segni più o meno che hanno luogo quando le grandezze son moltiplicate da coefficienti o moltiplicatori di consimili o di diversi segni.

Imperciocchè nei paragrafi su citati si è abbastanza dimostrato, che qualsivoglia grandezza quando diviene moltiplicatore di un' altra, sotto di questo riguardo non presenta che la veste del coefficiente, o quell'unica di prendere il moltiplicando tante volte quante unità essa contiene, o si suppone che contenga; e sotto quest'unico riguardo considerata, non presenta, che l' unico lato di coefficiente, al quale i segni più o meno rappresentanti i diversi stati estrinseci delle altre grandezze, non possono aver luogo nè confarsi alla natura di esso coefficiente moltiplicatore.

212. Da quanto qui veniam ragionando s'intende, cosa significhi il segno più o meno quando stia innanzi ad un coefficiente, e cosa significhi avanti un moltiplicatore, che poi sempre è in uno stato identico, anzi si identifica col coefficiente, e si intende tutto l'andamento dei segni che hanno luogo nelle moltiplicazioni, o divisioni, di segno identico o diverso.

Cioè si comprende con verace filosofia, perchè v. g. proposta una qualsivoglia grandezza w, e proposto qualunque moltiplicatore di essa n abbiano luogo li seguenti risultamenti:

1.° se abbiamo $+ n \times + w$ sia il prodotto... $+ n w$.
2.° se abbiamo $- n \times + w$ sia il prodotto... $- n w$.
3.° se .... $+ n \times - w$ sia il prodotto... $- n w$.
4.° se .... $- n \times - w$ sia il prodotto... $+ n w$.

Il primo di questi prodotti in lingua comune si legge come segue: la grandezza w avente il segno positivo essendo presa o moltiplicata dalla n avente segno positivo presenta n volte w in istato più, o positivo.

Il secondo si legge, la grandezza positiva w sendo presa n volte in istato opposto allo stato di essa positivo, deve dare un prodotto negativo, o diverso dallo stato di essa w; perciò in istato negativo.

Il terzo si traduce, la grandezza w essendo considerata o trovandosi in istato relativo negativo presa n volte in questo stato dà un prodotto negativo.

Il quarto finalmente nel quale la w trovasi in istato negativo presa n volte in uno stato opposto o positivamente deve dare un prodotto di n volte w positivo.

Donde si vede finalmente filosoficamente dimostrato, che la moltiplica dei fattori di segno eguale dà un prodotto avente il segno più, e la moltiplica dei fattori di segni differenti dà un prodotto avente il segno meno.

213. La divisione essendo una operazione opposta alla moltiplica, o come altri dicono, una operazione che disfà o distrugge ciò che la moltiplica dei fattori ha fatto, ben si vede, che in questa operazione uno dei fattori è sempre dato e col proprio segno, onde il quoziente che è l' altro fattore è costretto sempre appalesare il segno che aveva prima di esser moltiplicato; onde per la divisione non occorre alcuna particolare osservazione relativa alla filosofia dei segni.

214. La dottrina concernente la filosofia di questi segni *più* o *meno*, specialmente nella parte risguardante i segni consecutivi che presentano le grandezze risultanti da mol-

tiplicazioni, da elevazioni a potenze, da divisioni, ad estrazioni di radici, non è mai stata pienamente chiarita dalla maggior parte degli scrittori di Algebra, e da alcuni nemmeno motivata.

E per comprendere che noi non siamo troppo corrivi nel pronunciare questa asserzione, basta portare la nostra attenzione sopra le ragioni che leggiamo nei trattati di Algebra elementare.

Noi troviamo in tutti questi trattati delle dimostrazioni risguardanti le vicissitudini dei segni, ma queste dimostrazioni sono poi concludenti ed appieno persuasive? Perchè queste loro prove riescano convincenti debbon contenere la distinzione sostanziale che passa tra il significato del segno più o meno preposto alla grandezza considerata in generale, e alla grandezza particolarizzata o contratta all' unico ufficio di semplice ed astratto moltiplicatore, o coefficiente; il che non rinvenendosi in alcun trattato ci ha indotti a dire, che le dimostrazioni loro per questo lato sono manchevoli. Ed in vero non si può, anzi riesce impossibile dare alli segni più e meno un identico significato, tanto se appartengono alle grandezze come se sono appropriati al coefficiente moltiplicatore; perchè avanti alle grandezze, esprimono, come è detto, il loro stato comparativo o relativo estrinseco che esse hanno in riguardo allo stato di altre grandezze, e davanti al coefficiente o al moltiplicatore questi segni non possono esprimere altrettanto perchè al coefficiente ripugna ogni diversità di stato relativo; finalmente nelle grandezze i segni indicano il loro stato relativo, nei coefficienti non posson indicare altro fuorchè se debbansi ritenere nello stato, che sono le grandezze o in istato diverso; era dunque necessità di ben distinguere questi diversi e differentissimi significati dei segni secondo appartengono al moltiplicando, ovvero al moltiplicatore.

Ma si dirà, il moltiplicatore ed il moltiplicando non sono forse indistintamente delle grandezze? Ogni numero ed ogni grandezza non può forse riuscire a nostro beneplacito e moltiplicando e moltiplicatore, perchè adunque assegnar tanta differenza tra i segni di queste grandezze?

Per rispondere a questa difficoltà vuol esser notato, che pur troppo si concede, che i due fattori di ogni moltiplica si hanno e si ritengono per due grandezze indistintamente, e perciò pigliando le cose un poco alla buona, sembra che alle grandezze spettar possano i segni più o meno e nel medesimo significato, ma ben addentro sguardando le grandezze sotto di questo riguardo di fattori, allora la nozione generale di grandezza viene ad esser da noi volontariamente contratta per uno dei fattori e ristretta all'ufficio di semplice moltiplicatore, e allora a questo fattore così particolarizzato o così limitato nel suo essere di grandezza non possono più convenire ad esso se non quelli attributi, e quelle proprietà che son proprie, ed accomodate all' ufficio cui si è destinato. In fatti la grandezza, considerata astrattamente è un'ente in quantità, qualunque si voglia. Ma infino a che si considera in questo stato di astrazione, o in questa maniera generale, la grandezza non è nè moltiplicando nè moltiplicatore. Quando la grandezza si pone in comparazione ad altre grandezze, allora diamo origine e vita all'idea comparativa, cioè alle nozioni di differenza, di eguaglianza o di ragione; e quando noi portiamo la nostra attenzione al diverso modo o stato comparativo delle grandezze, o al diverso comparativo modo di agire, allora diamo vita ed origine ai diversi segni più e meno esprimenti opposti modi. E quando finalmente noi portiamo la nostra considerazione sopra il numero delle volte che si può prendere una quantità data o proposta, allora ci poniamo anco nella necessità di dover considerare la grandezza cui si attribuisce la pro-

prietà di moltiplicatore sotto un aspetto tutto concreto a questo particolare ufficio ; quindi siamo in necessità di non ritenere in essa grandezza destinata a moltiplicatore se non quelle sole proprietà che ad essa si addicono. Ora l'ufficio di moltiplicatore non può estendersi ed aggirarsi se non sopra queste due sole cose; una di pigliare tante volte la grandezza che si intende moltiplicare quante unità sono o si suppongono in esso moltiplicatore, l'altra di pigliarle nello stato che sono, o in uno stato al loro opposto; si dice o nello stato che sono, o nell'opposto, perchè gli algebristi non fanno uso, o meglio, non considerano che due stati il più ed il meno, uno opposto all' altro. Riguardo alla prima, il moltiplicatore esercita il suo potere proporzionalmente alle sue unità da cui risulta, riguardo alla seconda dispiega apertamente l' unico significato, che i segni più o meno aver possono in esso lui, da poi che fu da noi contratto od applicato a questo unico esclusivo ufficio di moltiplicatore.

E per meglio comprendere queste osservazioni si ritenga ben presente alla mente, che tutto questo mondo ideale di grandezze soggettive matematiche, alla perfine non risolvesi in altro che in ideali entità del nostro spirito, ed in relative funzioni del medesimo nostro spirito. Ei ci convien essere ben spensierati se ci vogliamo dare a credere, che esista per noi un mondo di grandezze astratte e soggettive, fuori della nostra facoltà pensante ed imaginativa, o facoltà comprenditrice; imperciochè quello che è fuori della nostra intelligenza è anco fuori di noi, e della sfera di tutte le nostre cognizioni, e non è che puro purissimo inganno o solennissima illusione, il creder che per noi si conosca.

Queste cose ho qui dovuto accennare perchè servono direttamente a dimostrare il fondamento ragionevole delle osservazioni sopra ricordate intorno al diverso significato dei segni.

215. E per dare a queste ragioni maggior luce esaminiamo l'insegnamento algebrico relativo all'andamento dei segni algebrici. Gli algebristi generalmente si appigliano alla seguente dimostrazione di segni: cioè, dicono, è evidente che qualunque grandezza moltiplicata per lo zero, dà il prodotto zero. Questo è chiaro, e da tutti deve essere pienamente ammesso; ora $a - a = o$; dunque moltiplicando $a - a$ per qualsivoglia grandezza il prodotto deve esser zero. Ciò premesso, sia n la quantità che supponiamo moltiplicare $- a$; il prodotto sarà necessariamente $na - na = o$; e perchè ciò si verifichi, conviene che $+ n \times + a$ dia $+ na$; e conviene che $+ n \times - a$ dia $- na$, onde si verifichi che $+ n \times (a - a)$ dia $na - na = o$. Poi soggiungono, se $+ n$ per $- a$ presenta un prodotto di segno negativo, per simil ragione quando si avesse $- n$ per $+ a$, si avrebbe per prodotto $- na$. Nell' ipotesi adunque che n abbia stato negativo, cioè sia $- n$, ne viene che moltiplicando $- n$ per $a - a = o$, si deve avere $- na + na$, perchè tutt'insieme sia $- na + na = o$.

Ora, dicono gli algebristi, è dunque dimostrato, che i fattori di segni diversi danno un prodotto avente segno negativo; ed i fattori di segni eguali danno un prodotto avente segno positivo; onde più con più dà più, più con meno, o meno con più dà meno, e meno con meno dà più.

Ecco la dimostrazione principale e la più stringente che danno gli algebristi. Analiziamo questo loro ragionamento; e primamente osserviamo, che nella prima parte espressa dal prodotto di $+ n \times (a - a)$ e che presenta $+ na - na = o$, in questa prima parte devonsi distinguere due cose, cioè, primo, perchè $+ n \times + a$ dia $+ na$; secondo, perchè $+ n \times - a$ dia per prodotto $- na$. Ora per tutta prova del prodotto $+ na$, gli algebristi mal conoscenti del segno $+$ preposto alla n, si contentano di dire, esser cosa

chiara per sè stessa che $+ n \times + a$, dia $+ na$; ma questa supposizione non è una prova; cosa significa questo più per più dà più? nulla affatto. Poi come si può paragonare lo stato positivo o negativo che la grandezza ha riguardo ad altre con lo stato positivo o negativo del moltiplicatore, che non avendo alcuna relazione di stato con verun altra grandezza, non può per questo significare il più o il meno che appartiene alla grandezza che moltiplica? Manca dunque agli algebristi la prova che più n moltiplicante più a dia $+ na$, perciò la dimostrazione suddetta diviene per questo lato al tutto inconcludente, e mancando questa base fondamentale essa cade tutta da cima a fondo. Più niuno degli algebristi dimostra se non in modo al tutto indiretto, che $+ n \times - a$, dia $- na$, cioè fondandosi: 1.° su la non provata supposizione del prodotto $+ na$, 2.° sul bisogno di avere da $+ n \times - a$, un prodotto $- na$, onde il risultamento finale sia $+ na - na = o$. Ma questo ultimo bisogno, risolvesi in artificio forzato, il quale indirettamente obbliga, ma non convince nè persuade ragionevolmente l'animo.

Venendo alla seconda parte della dimostrazione, a quella cioè ove si suppone o si attribuisce al moltiplicatore il segno meno, presentata come segue: $- n \times (a - a)$ dà $- na + na = o$, si deve osservare, che è troppo larga licenza quella che si pigliano gli algebristi, di supporre cioè che ritenendo avverato, $+ n \times - a$, dia $- na$ si abbia diritto di considerare che anco $- n \times + a$ debba dare $- na$; per essere essi autorizzati a tanta licenza, occorreva ad essi una patente dimostrazione, ma niuno la presenta; e pure questa dimostrazione è assolutamente richiesta onde aver appoggio a stabilire forzatamente, che dunque $- n \times - a$, dia $+ na$.

A che riducesi adunque questa apparente dimostrazione?

essa riducesi in petizion di principio, cioè a supporre ciò che intende provare.

216. Se una grandezza qualunque esistesse sola, o essa sola fosse possibile e nella realtà e nel pensiero umano, certamente che a quest'unica grandezza non potrebbe competere nè il segno più nè il segno meno, poichè nè l'un nè l'altro potrebbero aver significazione veruna. È dunque cosa aperta, che il segno più o meno ha esistenza e vita nella possibilità e realtà di molte grandezze, e questa vita la riceve tutta dal diverso relativo loro stato estrinseco; ed è pur cosa aperta, che il medesimo segno apposto al moltiplicatore, che come tale è una grandezza ideata a fungere un solo ufficio, quello cioè di prendere tante volte il moltiplicando quante unità sono in esso moltiplicatore, è aperta cosa, dico, che il segno appo lui non può indicare veruno di questi comparativi diversi stati delle grandezze, giacchè non esiste che come puro e semplice moltiplicatore. Si deve dunque convenire nella nostra opinione, che il segno preposto al moltiplicatore non contiene altra significazione ragionevole se non quella che poco innanzi (214) gli abbiamo attribuita.

Nelle dottrine da noi esposte sta riposta la filosofia del significato e delle combinazioni dei segni più e meno. Si deve ritenere privo di significazione l'uso degli algebristi di dire, che ogni grandezza la quale non abbia segno alcuno avanti a sè stessa, questa grandezza è ritenuta e considerata come se avesse scritto avanti a sè stessa il segno più; perchè un così fatto modo di parlare darebbe luogo a credere, che una grandezza qualunque, fosse essa anco unica, dovesse avere il segno più, il che ripugna alla natura relativa ed estrinseca del segno; secondariamente, darebbe luogo a credere, che ogni grandezza sia necessariamente sempre in istato di comparazione con altre, ed in uno stato estrinseco rela-

tivo sempre conforme; il che quanto sia ipotetico e sommamente ipotetico, ognuno lo intende.

È bensì vero che nella scienza analitica, geometrica, meccanica ecc. nelle quali appunto si hanno sempre in considerazione i rapporti, e li diversi stati delle grandezze tanto analitiche che meccaniche ecc. siamo sempre, o quasi sempre, nel sentito bisogno di aver riguardo a questo estrinseco stato o modo di essere delle grandezze, e quindi ai segni più e meno; tuttavia è però sempre vero ancora, che i segni si riferiscono per intiero non alla natura o valor delle grandezze, ma bensì unicamente alle estrinsece ed uniformi o disformi loro maniere o stati di essere o di agire.

E questo è appunto ciò che rende evidente il proposto caso di $a - a = o$; perchè onde il $-a$ annulli tutto il valor di $+a$, conviene che il valore di $+a$, sia identico col valore di $-a$, e di più è giuocoforza che la $-a$ sia considerata in uno stato pienamente opposto a quello di $+a$. La equazione qui sopra è impossibile quando non si abbia riguardo all' opposizione di stato delle due a, giacchè sappiamo che l'ente considerato in sè stesso non è opposto all'ente. E le grandezze negative non sono negative riguardo alla loro natura od entità, perchè altrettanto sarebbe aperta ripugnanza, ma sono negative in riguardo a questo loro reale o ipotetico modo di esistere, e di scambievole comparazione.

Così una forza meccanica negativa è una ripugnanza in termini, mentre una forza reale in meccanica la quale in confronto di un'altra agisca od eserciti la sua azione in un senso o direzione contraria ad un'altra forza meccanica, questa è una verità di fatto ed è anco una posizione di ragione apertissima.

Onde n'è venuto il bisogno di indicare queste opposte ed ambedue reali azioni con segni diversi, cioè ambedue col

segno più o col segno meno; cioè quando cospirano col segno più, e meno quando si contradicono o si distruggono nei loro effetti reali o ideali.

Così un movimento negativo in sè stesso è un'enigma, un assurdo, ma un moto reale che agisca in senso contrario ad un'altro moto reale, questo è ciò che sempre è vero ed in pratica ed in teorica.

Quindi se il movimento di un corpo lo trasporta verso oriente, ed un altro lo risospinga verso occidente, segnato che siasi il primo col segno +, il che è per noi arbitrario, è necessità che si segni il secondo moto col segno —, perchè retrospingendo il corpo mosso verso oriente distrugge parte o tutto l'allontanamento del corpo dal punto d'onde è partito.

Wronski nella sua *Introduzione alla filosofia delle Matematiche,* stampata in Parigi 1811, da per *schema* o per forma intellettuale della somma la seguente espressione $A + B = C$. Chiama questa legge fondamentale della teorica della somma. Si rimarchi bene che nel fondare o stabilire questo schema, o espressione analitica, non dà veruna deduzione od esplicazione del segno più posto tra A e B; ma all'invece assume questo segno come cosa pienamente nota a tutti. Poi egli soggiunge, che lo schema $A + B = C$ implica necessariamente lo schema reciproco $C = A - B$. Questo modo di dire non sembra fondato in buona filosofia, perchè il secondo schema non deriva dal primo per veruna necessità, ma unicamente per pura nostra volontaria operazione, e benchè posta una verità da questa se ne sappiano derivare delle altre, però mal si direbbe che ne derivino per necessità. Sorpassando però queste osservazioni, portiamo la nostra attenzione a ciò che si soggiunge nella sullodata opera dello stesso autore risguardante la Filosofia dei segni più e meno. = Le operazioni di addizione e di sot-

trazione che formano i due rami dell'algoritmo della somma, non sono fondate, che sopra le primitive leggi dell'*intendimento*, quello della *quantità*, della quale la applicazione all'*intuizione* del tempo, dà propriamente il concetto e lo schema del numero. Ma in considerando la diversità della funzione (o ufficio) del numero B nelle due relazioni, l'opposizione di questa funzione ammette inoltre l'applicazione della seconda legge dell' intendimento, quella della *qualità;* e ne risulta da questa applicazione trascendentale una significazione particolare per la funzione del numero B nelle due relazioni $A + B = C$, e $C - B = A$.

Ella è questa significazione trascendentale, la quale costituisce i caratteri particolari del numero B nelle due relazioni in discorso, e sono questi caratteri particolari che si appellano con ragione *stato positivo* e *stato negativo* del numero B. Ecco la deduzione metafisica del positivo e del negativo =.

A dire la verità questa deduzione che, egli chiama metafisica o filosofica, non si appalesa molto persuasiva, anzi appare una mera petizione di principio. Di fatti egli non dimostra il filosofico concetto del segno + preposto a B nel primo schema; e questo solo basta per mandar in fumo tutta la sua deduzione metafisica. All' invece egli ha intieramente supposta la nozione del segno + che pone innanzi a B. Egli non dice che il segno + indichi principalmente, anzi quasi esclusivamente, lo stato estrinseco relativo che la B ha con la A, e tace, che secondariamente dia luogo ad una somma. Egli non spiega in alcuna maniera, perchè ad indicare una sottrazione si possa e si debba adoperare il segno negativo. E dopo tutte queste mancanze, conchiude, ecco la metafisica del *positivo* e del *negativo*.

Più, egli si permette di appellare ora *qualità* ed ora *caratteri* queste due funzioni della B nelli due citati schemi,

mentre dal sin ora ragionato da noi apparisce, che queste due denominazioni non sono per verun conto appropriate agli stati positivo e negativo.

217. Le vicissitudini che presentano i segni tanto conformi che diversi nelle operazioni analitiche hanno suggerito ai geometri delle importanti cognizioni; come v. g. elevando a potenze le grandezze le quali abbiano il segno più o meno avanti a sè stesse, ovvero elevando a potenze le grandezze considerate in relazione ad altre, presentano in queste stesse potenze delle singolarità rilevantissime in matematica; imperciocchè il quadrato di $+ a$, riusciva $+ a^2$, ed egualmente il quadrato di $- a$, riusciva $+ a^2$.

In generale $+ a$ ha tutte le potenze di segno positivo indistintamente elevate a qualsivoglia grado, e $- a$, ha le potenze pari tutte di segno positivo, e le dispari tutte di segno negativo. Così $+ a$, ha le potenze $+ a^2$, $+ a^3$, $+ a^4$, $+ a^5$, $+$ ecc. e $- a$, ha le sue $+ a^2$, $- a^3$, $+ a^4$, $- a^5$, $+$ ecc.

Le potenze delle grandezze considerate in relazione al segno delle loro radici, o in riguardo allo stato positivo o negativo di esse radici non sono possibili che in qualcheduna delle due maniere qui accennate; quindi niuna potenza può in massima esistere la quale non si rinvenga in una delle due arrecate serie di potenze, quindi si ritiene giustamente esser assurda una potenza seconda, come $- a^2$ avente il segno negativo, così egualmente si ritiene assurda $- a^4$, $- a^6$, $- a^8$, ecc. indefinitamente.

Nè a queste grandezze espresse con li soli esponenti 2, 4, 6, ecc. si riferisce questa impossibilità, ma anco a tutte quelle grandezze le quali si vogliono ritenere o considerare come potenze pari mentre hanno segno negativo, così v. g. $\sqrt[2]{-a}$, è imaginaria; $\sqrt[2]{-1}$, è imaginaria; $\sqrt[2]{-n}$, è imaginaria; $\sqrt[4]{-n}$, è imaginaria, ecc.

Gli antichi geometri pare che non portassero la loro attenzione se non alle grandezze incommensurabili, e non a queste induzioni preziose che noi qui ricordiamo; eppure è cosa indubitata che anch'essi facevano uso dei segni più e meno. Forse la combinazione delle idee non li aveva posti su questa via. I moderni geometri han cercato di trarre gran profitto da queste osservazioni intorno la possibilità o impossibilità di alcune potenze delle grandezze relativamente al segno che precede queste potenze medesime; perciò presso i moderni è divenuto una sorgente di speculazioni la possibilità o impossibilità di certe potenze da essi appellate surde o imaginarie. Nell'occuparsi però che fanno i moderni di queste grandezze da loro giustamente appellate imaginarie o impossibili, si sarebbe di leggieri creduto che tali grandezze dovessero esser bandite dai loro calcoli, come entità assurde ed appieno insignificanti; ma la cosa non accade così, che anzi essi le han volute ritenere nei loro calcoli ed hanno voluto fare sopra di tali assurde o impossibili grandezze tutte quelle operazioni che si fanno sopra le altre grandezze reali, o ideali, e pienamente possibili. Che dobbiamo dunque pensare di questo contegno dei geometri di calcolare cioè le grandezze imaginarie, e di trattarle nè più nè meno di quello che si trattano le reali? A parer nostro noi dobbiamo pensare, che con questa loro condotta i geometri si gettano in braccio ad una forzata arditissima ed insieme assurda ipotesi; si appella forzata, perchè ci vuole un grande sforzo contro ragione per ritenere e considerare l'impossibile, come si considera e tratta il possibile; si chiama anco arditissima, perchè il trattar l'impossibile come fosse possibile è una ipotesi che in filosofia non se ne sa imaginare una eguale, e specialmente perchè a tali assurde grandezze appropriando loro li segni più e meno par che si voglian considerare assurde e non assurde

nel medesimo tempo; imperciocchè i segni designando lo stato relativo estrinseco, si verrebbe con ciò ad ammettere che anco gli impossibili aver possano delle relazioni o diversi stati tanto tra di loro quanto con le grandezze reali.

Ecco adunque quante supposizioni, quante difficoltà si debbono superare per poter ragionevolmente trattar nel calcolo le imaginarie grandezze. Più, dopo tante inamissibili posizioni, qual nozione possiamo noi formarci della somma o della sottrazione di due grandezze imaginarie? Quale nozione di tutte le altre analitiche operazioni? Niuna certamente. Anzi tutte le volte che seguendo l'uso degli analisti noi mettiamo a calcolo delle grandezze assurde, noi ci incontriamo sempre in una inesprimibile sconvenienza di idee ed in aperte assurdità. Così v. g. quando ci poniamo a moltiplicare o ad elevare alla seconda potenza la assurda grandezza $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ e ne ricaviamo $(\sqrt{-1})^2 = -1$; cosa otteniamo mai? forse la grandezza di unità col segno meno, grandezza reale o ideale vera? Questo non già, perchè posso bene formarmi un'esatto concetto dell'unità positiva o negativa, ma derivare questo concetto da fonte assurda impossibile, o come suol dirsi, ripugnante, e col mezzo di operazioni applicate a ciò che non solo è, ma che nè anco può essere, questo è ciò che ognuno in filosofia non potrà mai concepire possibile, e molto meno fattibile. Poi -1 presentasi qui un quadrato!

Che se i geometri voglion continuare a trattare in sì fatto modo queste grandezze assurde di lor natura, e se può dirsi così, intrattabili, tal sia di loro; a noi basti l'aver qui fatto conoscere quale e quanta sia la filosofia che esiste in questo loro contegno.

Wronski nella sua Introduzione filosofica alle matematiche, poc' anzi ricordata, e venuta alla luce in Parigi 1811, alla pag. 176, parla nel seguente modo degli imaginarii:

= Or le nombre étant necessairement impair, il est evident, suivant, cette génération indefinie de l'unité negative, que toutes les fois qu'il s'agira de prendre une racine a exposant pair de cette unité, l'operation algoritmique sera *impossible* en realité, et cependant elle sera *possible* en idée; et c'est là l'antinomie faisant l'objet du corrolaire philosophique qui nous occupe . . . . Or ce sont les nombres correspondans à cette génération *ideale possible,* et dont le caractère consiste precisement dans cette possibilité de génération idéale, qui forment les nombres qu'on appelle très inexactement *nombres imaginaires.* Telle est la deduction metaphysique de ces nombres vraiment extraordinaires, qui forment un des phenomènes intellectuels les plus remarquables; et qui donnent une preuve non équivoque de l'influence qu'exerce dans le savoir de l'homme, la faculté legislatrice de la raison dont ces nombres sont un produit, en quelque sorte malgré l'entendement =.

Noi confessiamo candidamente di non intender bene cosa voglia significare questo grande geometra con questa sua posizione dell'ideale, il quale a parer suo dà vita e fa diventare idealmente possibile l'impossibile e l'assurdo; perciò lasceremo al lettore che ne pensi ciò che meglio crede. Diremo unicamente, che a forza di ritener reale ciò che è imaginario, e di trattarlo nel calcolo, come si trattano le veraci reali grandezze, si arriva a forza di ardite e antifilosofiche ipotesi a dar vita a delle entità che non posson averla, ed a supporre grandezze originate da operazioni che non sono che supposte e non vere.

218. Partendo da questi filosofici principii i geometri quando si incontrano in queste imaginarie espressioni, quale è $\sqrt{-a}$, hanno imaginato di considerare la $-a$, come risultante da $+a \times -1$, ovvero da $a \times -1$. E tutto ciò

a fine di semplificare più che potevano l'espressione imaginaria, e di renderla vie meglio trattabile nei calcoli.

E giacchè qui cade il ragionamento sopra le induzioni derivanti dalle potenze delle grandezze, pare si debba osservare, che siccome i gradi delle diverse potenze sono segnate dai numeri, o meglio dalle unità contenute nei numeri esprimenti il loro grado, così si comprende, che per legittima induzione ci resta aperta una via retrograda delle potenze, o aperta la via all'estrazione delle radici, dividendo l'esponente per due quando si voglia esprimere la radice quadrata, dividendolo per tre quando si voglia additare la radice terza o cuba, e così prosiegui.

219. Sopra questi principii si fonda appunto la dottrina dei logaritmi e delle tavole logaritmiche, le quali presentano tutte le gradazioni rispondenti a tutte le potenze; e quando non fu possibile avere queste esponenti in numeri o frazioni compiute ed esatte furono per indefinita approssimazione determinati, precisione che in quanto alla pratica dei calcoli è più che sufficiente.

220. L'esser noi al fatto di estrar la radice dal quadrato perfetto del binomio num. 195, è la stessa cosa che l'aver noi la cognizione della formazione concreta ed anco generale del quadrato del binomio, e perciò sapere la via che dobbiam tenere per estrarre la radice.

Però una cosa è il conoscere il quadrato perfetto del binomio $a^2 + 2ab + b^2$ e la sua piena forma ed altra cosa ben diversa è quella dei quadrati imperfetti, i quali per esser trattabili nel calcolo algebrico conviene sempre renderli perfetti, ciò che sempre è fattibile comparando la formola data imperfetta alla formola perfetta qui sopra riportata.

221. Pigliando in considerazione il quadrato di un monomio v. g. di a, ognuno sa ch'esso è $+ a^2$; come pure il quadrato di $- a$, è $+ a^2$. Il geometra che si propone di

estrarre la radice dal quadrato $+ a^2$, non può risguardando allo stato di $+ a^2$ sapere se esso derivi dalla radice $+ a$; ovvero dalla radice $- a$; in questo dubbio insolubile per esso, non può risolvere la quistione per estrar la radice da $+ a^2$ additando più a, piuttosto che meno a. Che fa dunque in questo caso? esso piglia una soluzione doppia lasciando indeterminata la quistione relativa al vero segno della radice, e la presenta perciò a doppio segno esprimendola per $\pm a$.

Per egual modo il binomio $a^2 + 2ab + b^2$ può risultare e provenire tanto da $a + b$ quanto egualmente da $- a - b$; per lo che trovasi nella stessa contingenza di non sapere qual sia il verace segno della radice, ogni qualvolta è costretto desumerlo della sola ispezione del quadrato qui arrecato, onde anco in questo caso assegna la radice in modo indeterminato, per quello concerne il segno, indicandola per $\pm (a + b)$.

222. Qui convien fissare un momento la nostra attenzione a considerare la differenza sostanziale che passa tra una potenza seconda di una data radice, ed una equazione di secondo grado, come suol dirsi, o una equazione contenente il quadrato di qualche grandezza; imperciochè ognun vede che l'elevazione di una radice al suo quadrato procede per legge fissa ed unica della moltiplicazione della radice in sè stessa; laddove una equazione di secondo grado, o presentante seconda potenza può derivare da operazioni miste, e complicate ed estranee alla considerazione del puro quadrato. Queste equazioni, od espressioni analitiche, dette equazioni di secondo grado, contengono perciò bensì la seconda potenza, ma inchiudono e contengono sempre, o quasi sempre, delle condizioni ultronee ed etorogenee alla potenza medesima.

Più ognuno di leggieri comprende, che le equazioni

di secondo grado posson essere risultanti da grandezze note, benchè elevate alla seconda potenza, e posson essere miste di grandezze note ed ignote, come generalmente parlando sono sempre tutte le equazioni di secondo grado. Ora lo scopo principalmente inteso nella instituzione di queste equazioni si è quello di procacciarsi, nel formarle, un metodo di determinare le quantità ignote per mezzo delle note, mediante alcune condizioni espresse e denunciate dalla forma istessa della equazione quadrata.

E poichè le grandezze ignote non si ritengono mai per appieno determinate, se non quando si presentano semplici o senza alcuna potenza, perciò anco in tutte le equazioni di secondo grado occorre sempre di eseguire l' estrazione della radice onde avere la grandezza ignota come suol dirsi al primo grado, e quindi appien determinata dall'eguaglianza che presenta con le quantità pienamente note.

Ma condotti da questo bisogno di dover estrarre la radice dall'equazione di secondo grado, e non conoscendo noi altro mezzo di estrarre la radice delle potenze binomie, se non quello che ci presenta un quadrato perfetto del binomio, ne viene, che noi ci troviamo nella necessità di comparare lo stato dell'equazione e della sua forma, allo stato e forma del quadrato perfetto, a fine di conoscere se sia possibile di estrarre la radice della data equazione. Nel caso che l' equazione elevata al quadrato presenti forma di perfetto quadrato di binomio in allora contiene anco la possibilità di essere perfettamente risolubile, ovvero presenta la via da poterne estrarre esattamente la radice della grandezza incognita elevata al secondo grado, ma quando altrettanto non si verifichi, ed allo invece presenti un quadrato o una seconda potenza di binomio incompleta l' unica via che ci resta a poter risolvere l'equazione si è quello di rendere, con artificio analitico, compiuto il quadrato di quest'e-

quazione, perchè ridotta a questo stato se ne possa, colle note regole dell'estrazione della radice del binomio, estrarre la radice.

Sebbene con questo artificio di calcolo abbiasi ridotta la equazione di secondo grado allo stato di quadrato perfetto, tuttavia conviene ben guardarsi dal confondere le considerazioni che abbiam fatto relative alle potenze del binomio, con quelle che appartengono a queste equazioni benchè equiparate alla seconda potenza binomiale. Nel quadrato perfetto sia poi di monomio, sia poi di binomio, la radice ha bensì sempre doppio segno, positivo cioè e negativo, ma questa radice è una sola, positiva o negativa che sia; laddove nelle equazioni quadratiche la radice in forza del doppio segno presenta dei valori assai rimarcabili, ed al tutto diversi da quelli della radice del quadrato semplice e perfetto del binomio.

223. Per meglio chiarire queste osservazioni arrechiamo un esempio pratico, e consideriamo un problema concreto e di secondo grado.

Cerchiamo qual sia quel numero che sottratto una volta dal suo quadrato presenti per risultato 56?

Ognuno vede che esposto il quesito in forma analitica presenta l'equazione $x^2 - x = 56$. Essendo x il numero incognito che si cerca.

Quest'equazione non è un quadrato perfetto, ma ricorrendo alle nozioni che presenta il quadrato perfetto si vede che se lo rende completo, aggiungendo ad ambo i membri dell'equazione $\frac{1}{4}$ per cui diviene essa la seguente $x^2 - x + \frac{1}{4} = 56 + \frac{1}{4}$.

Estratta la radice secondo le norme del quadrato perfetto si ha: $x - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{56 + \frac{1}{4}}$, ovvero $\pm \sqrt{\frac{225}{4}}$, e finalmente liberando l' incognita x si ha: $x = + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}}$.

224. Ora fermiamo la nostra attenzione a ben ponderare questo risultamento finale. Considerando i due membri quali quadrati resi perfetti è chiaro, che la sua radice può avere $\pm$; difatti $x - \frac{1}{2}$ elevato al quadrato da $x^2 - x + \frac{1}{4} = 56 + \frac{1}{4}$; e parimenti $- x + \frac{1}{2}$ elevato al quadrato dà $x^2 - x + \frac{1}{4}$; similmente il secondo membro $56 + \frac{1}{4}$ presentando la radice $\pm \frac{15}{2}$ ben si vede che tanto $+ \frac{15}{2}$ quanto $- \frac{15}{2}$ danno $\frac{225}{4}$ per seconda potenza. Ma si noti che il secondo membro avendo radice con segno $\pm$ come vuole la forma del quadrato preso da solo soddisfa, come qui è notato al quadrato $\frac{225}{4}$ tanto col segno positivo, quanto col negativo e nel medesimo tempo sia ben

rimarcato, che le due radici tanto $+\frac{15}{2}$, quanto l' altra $-\frac{15}{2}$ hanno lo stesso valore prescindendo dal segno. Ma se con queste considerazioni in animo noi passiamo ad osservare lo scopo finale del problema proposto, cioè portiamo la nostra considerazione alla liberazione della x, scopo della ricerca del problema, allora si vede che $x = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{56 + \frac{1}{4}}$, nella qual finale equazione è passata nel secondo membro la frazione $-\frac{1}{2}$ col segno cangiato. Ora questa frazione $\frac{1}{2}$ concorrendo con la doppia radice $\pm \sqrt{\frac{225}{4}}$ a presentare il valore della x, deve presentare per questo due ben diversi valori della x; perchè avendo la frazione $\frac{1}{2}$ il segno più, forma somma con li $\frac{15}{2}$ aventi il segno positivo, e da $\frac{16}{2} = 8$; e la stessa frazione $\frac{1}{2}$ di segno positivo serve di sottrazione della frazione $-\frac{15}{2}$ cioè la riduce a $-\frac{15}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{14}{2} = -7$.

Ora il segno che porta con se la frazione $\frac{1}{2}$ dipende

evidentemente dalla condizione del problema, cioè da quella che impone, che dal quadrato dell'incognita sia levato il valor della medesima incognita, acciò il risultamento 56 sia corrispondente al valor della incognita medesima diminuito di tutto il proprio valore; quindi il doppio e diversissimo valore che hanno le due radici dell' equazione quadrata di cui parliamo dipende unicamente dalle condizioni del problema per le quali riescono differenti i valori simili della radice del quadrato.

225. Dal sin qui detto è chiaro, che le due radici + 8 e — 7 non sono le radici del quadrato perfetto, bensì quelle dell'equazione, cioè la radice del quadrato perfetto di doppio segno accresciuta o diminuita secondo le condizioni del problema, dall'aggiunta o dalla sottrazione dell' incognita.

Non conviene però dimenticare una particolarità costante in queste equazioni di secondo grado, quella cioè che le due radici + 8, e — 7 soddisfanno ambedue alle condizioni del problema, o come dicono gli analisti, ambedue verificano l'equazione del secondo grado di cui trattasi quando sono poste in luogo della incognita. In vero, poste queste due radici alla prova, o sostituite in luogo della incognita nella equazione $x^2 - x = 56$ presentano esatta verificazione; mettendo più 8 in luogo di x si ha $64 - 8 = 56$; e mettendo — 7 in luogo di x si ha $49 + 7 = 56$.

226. Conviene dunque che il giovane studioso si avezzi di buon ora a riconoscere nelle equazioni di secondo grado, e le proprietà delle potenze esatte, che le dominano, e le finali risultanze, che riescono molto differenti da quelle delle potenze esatte. Il doppio segno, che si usa nelle equazioni di secondo grado per esprimerne la radice positiva o negativa è ritenuto nella soluzione, e forma delle equazioni di secondo grado perchè esse per essere risolubili si sono ridotte a quadrato perfetto, e questo può sempre derivare

tanto da radice positiva, quanto da radice negativa; ed in pari tempo non deve perder di vista, che nel ridurre l' equazione incompleta di secondo grado allo stato di quadrato perfetto si sono mantenute e rispettate tutte le condizioni inchiuse nella equazione medesima; la qual' ultima circostanza esige, che i risultamenti della doppia radice più e meno del quadrato perfetto vanno ad essere modificati da queste condizioni del problema, nella finale determinazione dell'incognita.

227. Queste osservazioni servono a chiarire un punto di filosofia analitica lasciato generalmente oscuro dalla universale degli algebristi. La radice di una seconda potenza, quanto di una terza, quarta, ecc. di quantità monomia, è una sola, ed avente l'uno o l'altro dei due segni più o meno; con questa sola diversità che ove le potenze dispari abbiano segno negativo, è certo che la radice è di segno negativo, e nelle potenze pari rimane indeterminato sempre se il segno della radice sia positivo o negativo.

Nelle equazioni all'invece di secondo grado, le espressioni corrispondenti alla radice sono sempre due, cioè per dir meglio le radici son sempre due e di diverso valore, nelle equazioni di terzo grado sono tre radici, ed in quelle di quarto, quattro, ecc. Ma basti questo motto intorno alle radici delle potenze e delle equazioni, basti l'aver accennato l'origine delle une e delle altre, per evitare ogni confusione di idee, e per supplire alla dottrina delle equazioni di secondo grado lasciata in non poca oscurità dagli algebristi.

228. Dopo aver parlato dei principii sopra dei quali si fonda la geometria, e dopo avere detto qualche cosa intorno a quelli sopra dei quali si sono elevate le due parti della matematica, l'aritmetica e l'algebra, ci conviene di fare qualche parola ancora dei principii sopra dei quali i geometri hanno fondate le loro dottrine, che ci hanno date intorno

alla natura e misura delle curve; giacchè la dottrina fondamentale di queste linee appartiene all' antica geometria, ed è anteriore di molto alla scoperta dell' analisi infinitesimale.

229. Noi abbiamo già rimarcato, che la definizione della linea retta appare chiara insino a tanto che la si considera in modo generale ed indeterminato, o meglio, insino a che la si prende astrattamente per una semplice quantità in lunghezza. Abbiam pure notato ai num. 24 e 25 che allorquando si è voluto scandagliare il concetto mentale di questa lunghezza, allora la nostra intelligenza che l'ha ideata e posta, si è anco accorta, che aveva posto un'entità che non sapeva appieno comprendere e dispiegare, perchè quando ha cercato di conoscere la origine e la formazione di questa sua entità, s' è trovata costretta di vagare sopra diverse maniere di generazione senza rinvenirne alcuna che fosse veracemente appieno soddisfacente. E queste diverse maniere tutte dirette ad esprimere un'identico concetto di entità, riescendo inette a spiegarne la genesi, hanno indotto a considerare la nozione della linea retta come un fatto intellettuale primitivo della nostra intelligenza, ovvero a considerare la nozione della linea come più chiara in sè stessa, che per esplicativa definizione della medesima.

230. Di consimile natura è pure la linea curva, la quale benchè per sua natura all'in tutto diversa dalla linea retta, in quanto che segue sempre una direzione fuori della retta, pure non presenta anch' essa una genesi o nozione precisa che possa soddisfare l'animo. Imperciocchè non avendo noi della curva altra nozione fuor di quella vaga ed indeterminata di una linea procedente in lunghezza ma sempre fuori più o meno indeterminatamente del corso rettilineo, ne veniva, che in sequela di questa vaga maniera di denominarla e di concepirla non si potesse aver di essa veruna

precisa nozione. La infinità delle diverse piegature e tutte scostantisi dal cammino rettilineo, e costituenti la infinità delle curve è già questo solo un concetto così vago, vasto ed indeterminato, che a nessuno particolar concetto di curva si può riferire. Una curva, o una parte di essa la quale non sia di regolare o identica piegatura non può servire di misura alla curva istessa, e molto più poi si presenta inetta a misurare qualsivoglia altra; onde per questo ogni curva può solo misurare sè stessa, quando sia considerata come un tutto solo; il che vuol dire, che nella infinita famiglia delle curve non si può rinvenire una commune misura. Come pure anco nella indefinita serie di tutte le circonferenze possibili e tutte di diverse grandezze circolari non esiste alcuna commune misura, o alcun arco che le misuri, o le possa misurare tutte.

231. E quando in alcuna curva regolare v. g. in un circolo si scelga una parte determinata di esso, o un tratto d'arco rispondente a quella parte di esso che ripetuta trecento sessanta volte, riproduca l'intiero circolo, abbiamo noi con questa misura elementare simplificata o chiarita la nozione del circolo? Poi eccettuata la sola curva circolare, quali sono quelle altre che conservino in tutto il loro corso un' andamento pienamente regolare, ovvero che presentino in tutto il loro procedimento una regolare identica piegatura?

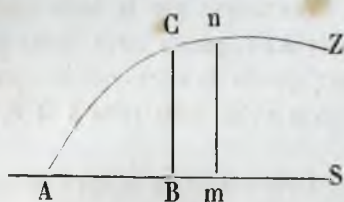
L'unità adunque di misura nelle curve in generale non vi può essere. Nella retta non accade così, perchè ogni lunghezza rettilinea conforme a sè stessa in tutto il proprio prolungamento, o in tutta la sua distensione indefinita ammette, e può sempre ammettere, una misura capace a misurare tanto una linea di cento metri, quanto una di mille e di un millione di metri.

232. Siccome però noi non abbiamo altro dato per con-

cepire la maggiore o minor curvatura di una linea, se non quell' unico del maggiore o minor allontanamento di essa dalla linea retta, e in un qualunque dato tratto di essa, perciò la nostra mente è sempre stata naturalmente forzata di riferire le curve alle rette, siano poi queste ultime considerate nello spazio o distese sopra qualche piano; e tutto questo per potere in qualche modo comprendere e per approssimazione conoscere il più o men rapido piegarsi della curva.

Di qui n'è venuto, che i geometri appunto si sono appigliati a questo metodo di indagare la piegatura delle curve riferendole cioè e comparandole alle rette od a' piani determinati, come a luoghi o posizioni fisse e parimenti determinati da rette.

E per poterci formare un'adequata cognizione di questa comparativa indagine dell'andamento della curva riferito alla retta, arrechiamo un esempio, o una figura sensibile rappresentativa.

Sia A C Z una curva; questa si voglia riferire alla retta A B S; ecco come usano fare; da un punto B scelto ad arbitrio s'innalza la perpendicolare B C sopra una linea data A B S, presa a nostro arbitrio, e scelto il punto A per origine della curva, si chiama A B l'*ascissa*, B C l'*ordinata* alla curva. La prima cioè l'ascissa A B, con la sua lunghezza, ci addita il punto dove noi ci trasportiamo andando da A insino B per indagare il corso della curva a questa distanza, e ciò otteniamo colla ordinata B C innalzata perpendicolare alla A B S da questo punto. La distanza B C segnata da questa linea ci fa conoscere quanto la curva

A C Z siasi discostata dalla retta A B S alla distanza A B, considerata la curva al punto C.

Con queste due coordinate, cioè ascissa A B, ed ordinata B C, le quali per esser due rette si ritengono sempre anco cognite, i geometri tentano seguire ed indagare il corso della curva, e così conoscerne tutto il di lei andamento. (Già s'intende che in questo caso si suppone che la curva A C Z proceda innanzi esattamente sopra la retta A B S, cioè in un piano verticale commune). Ora che significano queste due coordinate? la B C ci dice, che la curva estesa ed arrivata sino al punto C si è elevata sopra la linea orizzontale arbitraria cui si riferisce di tutta l'altezza espressa dalla B C; e la linea A B ci addita, che la curva arrivata sino al punto C si è allontanata dalla sua origine A, o punto considerato sua origine, di tutta la distanza rettilinea A B. Il punto A preso ad arbitrio, chiamasi anco vertice della curva.

Se la curva A C Z non procedesse nel suo corso precisamente a perpendicolo, ma anzi si scostasse dal perpendicolo sopra, la orizzontale linea A B S, allora converrebbe riportarla o riferirla ad una terza linea; per la quale parimenti si scieglierebbe il punto A; e questa terza linea avrebbe per fine di scandagliare quanto la curva nel suo progredimento si allontani di quà o di là dalla retta A B S, o dal piano comune.

Col mezzo di queste tre linee sappiamo sempre quanto qualsivoglia punto della curva sia lontano da A in qualunque senso, o per qualsivoglia lato.

233. Noi non entreremo in questi dettagli i quali conducono alla cognizione dell'andamento di ogni curva e delle proprietà che derivano da questo andamento. Invece rivolgeremo il nostro pensiero ad un oggetto che più da vicino interessa la filosofia di queste maniere usate dai geometri per ve-

nire in cognizione di tutto il procedimento, o andamento delle curve; cioè cercheremo di esporre se, e quanto si posson conoscere le curve per mezzo di queste linee, che le accompagnano, e ne spiano, per così dire, tutti i punti del loro andamento; imperciocchè non dobbiamo su questo oggetto giammai dimenticare, che tutte queste artificiate ed eleborate maniere di seguire le curve col mezzo di linee rette, tutte riduconsi a farci conoscere i soli punti delle curve espressi dai rapporti o dalle ragioni delle linee rette. Or bene, che possiamo noi ottenere da queste maniere ingegnose di ricerche? Possiamo ritenerci in diritto di indossare le ragioni o i rapporti che hanno tra di loro queste rette alle curve, che esse seguono, ed alle quali vengono da noi le nostre rette applicate? La filosofia approva essa l'appropriamento delle rette alle curve mentre le prime sono di diversa natura dalle seconde?

234. Esaminiamo questo punto importante delle matematiche. Queste rette, dicono i geometri, che noi destiniamo ad accompagnare le curve, pongono queste ultime ad un verace rendiconto di ogni lor passo, e per conseguente ci appalesano ogni loro procedimento e consecutiva affezione; dunque, soggiungono gli stessi matematici, queste nostre rette scandagliano e ci presentano tutti i luoghi e con essi tutte le proprietà delle curve; dunque con tali rette, benchè siano di natura diversa dalla curva, si possono matematicamente conoscere le curve medesime.

Ma posti noi in faccia a questi ragionamenti, osserveremo, che queste rette però, che noi impieghiamo a seguire il corso delle curve, queste rette, diciamo non si confondono mai con le curve, ma all' invece non si confondono e non si identificano se non con alcuni punti delle curve; ma da questa comunanza, che le rette hanno coi punti della curva o delle curve, sebbene appaja che si possa indurne, che

qualunque punto della curva possa esser così reso comune alle rette, però questa comunanza non basta a dare una verace nozione o cognizione della curva. Ed eccone la ragione: i punti non costituiscono la curva, e non esprimono nè possono esprimerne la sua natura, perchè nessuna linea può essere ingenerata dai punti (num. 25) e questo solo basta a farci palese, che con le linee rette non si può arrivare alla cognizione di veruna curva, perchè con quelle non si conoscono, o non sappiamo determinare se non dei punti nella curva.

235. Forse alcuno dirà, che conoscendo noi i diversi punti della curva, anzi quanti a noi più piaccia di conoscere, noi possiamo dire di conoscere la curva che li contiene. Questa di fatti par che sia la più forte ragione, o la più potente, che si conosca, per indurci a credere di poter noi arrivare alla cognizione delle curve col mezzo delle rette. Tuttavia ci convien confessare, che questo ragionamento è più apparente che solido. In fatti tutto quello che noi possiamo con tal mezzo conoscere della curva sono i punti di essa, che si rendono comuni alle rette; ma questi punti non sono la curva; ed i geometri, che han voluto considerare tanto le rette che le curve come risultanti da punti disposti di seguito gli uni vicini agli altri, sono entrati in un labirinto dal quale non hanno più rinvenuto la via per sortirne, e si sono incontrati in tante e sì grandi difficoltà, che per nulla hanno mai potuto superare; imperciocchè i principii che assumono in questa ipotesi contradicono le induzioni che da essi ne ricavano, e distruggono da cima a fondo le stesse linee che vorrebbero costituire. In vero, la nostra mente è sempre costretta ad ammettere l'esistenza della linea tra l'uno e l'altro punto, e ciò per rendersi possibile a sè stessa la linea medesima, perchè senza di questa mentale supposizione, o meglio posizione, sfuma da capo

a fondo ogni concetto di linea. E per appieno persuaderci di ciò, basta riflettere, che o questi punti tutti di cui parliamo, e che si posson concepire in qualsivoglia linea, si toccano, o sono tra di loro poco o molto discosti; nel primo caso non possono formar la linea, perchè tutti si fondono e si compenetrano in un punto solo: o non si toccano, cioè sono tra loro discosti, ed in tal caso, non solo non costituiscono la linea, la quale è una lunghezza senza interruzione, ma non sono che all'ingrosso capaci di additarne appena il di lei corso.

Di fatti la nostra intelligenza è costretta ad ammettere tra un punto e l'altro la linea bella e fatta la quale appunto si concepisce, che passi tra questi punti distaccati e li unisca; quindi il tratto che giace interposto tra un punto e l'altro è occupato dalla linea, sia poi retta o curva; onde si vede che il parere dei geometri, il quale si appoggia ai punti, od alla loro nozione o cognizione, non somministra alcuna via la quale conduca alla piena rigorosa cognizione delle linee curve.

Battendo la via indicata dei punti communi alle rette ed alle curve, non si fa altro che aggirarsi nelle tenebre e divagar la nostra attenzione dal principale oggetto che ci siamo proposti di trattare e di esaminare, e ciò senza mai aver in mano un primo grado di fondata speranza di poter su questa via raggiungere la cognizione precisa della curva, o, come suol dirsi, senza speranza di essere guidati e sostenuti nelle nostre ricerche da verun rigore geometrico.

Nè si pensi da alcuno, che queste mancanze, che noi ravvisiamo nel ragionamento geometrico, che veniamo esponendo, vengano tolte di mezzo col determinare dei punti e quanti a noi piacciono e vicini tra di loro oltre ogni piccola distanza; 1.° perchè non si comprende come i punti

che sono comuni alle rette ed alle curve possano servire a dar la nozione di due linee diverse per natura una dall'altra, quali sono la curva e la retta; e questa è tale osservazione, che ben conosciuta e ponderata, basta essa sola a far conoscere, che i punti sono tali da appalesarsi inetti alla determinazione di ogni linea qualunque essa siasi retta o curva.

Poi sia rimarcato, che la diversità v. g. che passa tra una retta che congiunga Roma con Parigi, ed una curva che pure unisca queste due lontane città, ha sempre la stessa diversità di quella, che esiste tra una retta ed una curva, che congiungano Bergamo con Milano o due altri vicinissimi punti, anzi largheggiando, due punti infinitamente vicini; donde ne viene, che ogni ragionamento fondato sopra l'uso dei punti, siano pure essi communi a due diversi sistemi di linee, è sempre stato e sarà ognora inettissimo a discoprirci la natura delle linee e molto più il verace rigoroso loro andamento.

Alcun altro forse favorevolmente prevenuto per questo metodo tenuto dai geometri per conoscere le curve e determinare il loro corso, dirà, che i punti benchè non siano le curve, tuttavia i punti, che sono nelle curve, additano fedelmente in qualche modo la strada, su la quale le curve procedono innanzi nel loro corso, e perciò appare cosa certificata che i punti ci scoprano il corso, e tutte le più o men grandi piegature delle curve.

Ma preghiamo chi la pensasse a questo modo a ricordarsi, che a questo ragionamento serve di risposta quanto qui poc' anzi siam venuti esponendo, perchè i punti non segnano rigorosamente la curva, ma tutto al più, solo alcuni punti saltuarii e discosti tra di loro, i quali sono communi alle rette ed alle curve, ed i punti non possono mai darci alcuna nozione dei tratti della curva che giaciono tra essi punti.

E siccome la curva non è diversa per natura dalla retta, che per la propria piegatura, ne conseguita, che appigliandoci alla propinquità dei punti non si fa alcun guadagno, perchè l'idea di piegatura è onninamente estranea alla natura e proprietà dei punti che sono nelle linee, e specialmente nelle curve.

236. In forza di queste giuste ed irrefragabili considerazioni veniamo con tutta facilità condotti a conoscere, che ogni qual volta noi vogliamo dichiarare rigoroso un metodo, che tenta scandagliare il corso e conoscere la natura della curva comparandola e deducendola dalla proprietà e natura delle rette, noi ci abbandoniamo in braccio ad un metodo, il quale ci induce niente manco, che nella falsa posizione di disconoscere i concetti ammessi e ritenuti con costanza, voglio dire, i concetti che noi ci siamo formati delle rette e delle curve; anzi parliamo più largo, conducono niente meno, che a distruggere le nozioni che abbiamo di queste due differentissime specie di linee, poichè un tale contegno mira direttamente ad unificare linee di natura affatto diverse.

Questo si intenda detto per quelli che trattano di rigoroso questo metodo, giacchè noi non vogliamo, nè potremmo negare che un tal mezzo adoperato alla buona e come mezzo, che per appropinquamento fa conoscere il corso della curva, questo metodo, diciamo, non si può negare, che non assegni la posizione di alcuni punti pei quali possa la curva, e quindi in modo approssimativo l'andamento e il corso della curva stessa.

237. Di qui s'intende appieno l'equivoco nel quale si aggirano que'geometri che pensano di conoscere le curve perchè conoscono tutti que'punti di esse che loro sono a grado, e credono così di esser essi appoggiati a metodo di rigore, anzi che di semplice approssimazione. In fatti se supponiamo una gran curva che congiunga Roma con Parigi, dicanci i geometri, se le coordinate condotte ai due punti, che occu-

pano queste due città, giovino a farci conoscere tutto il tratto della curva che congiunge passo per passo questi due punti? Certamente che ognuno comprende la impossibilità di questa cognizione; ora avviciniamo pure questi punti quanto a noi più piaccia, cosa allora avremo ottenuto? conosceremo noi anco qualche punto intermedio, che tocca la curva nel distendersi che essa fa su di questa ampia distanza, ma con questo quale e quanto è il guadagno relativo alla cognizione della curva? Nessuno. Quindi per ogni finito appropinquamento dei punti determinati dalle coordinate certamente niun guadagno, assolutamente niuno, in riguardo alla rigorosa geometrica cognizione della stessa. E la stessa idea di ricorrere alla propinquità dei punti portata sino ad essere essi tra di loro infinitamente vicini, a cosa può mai giovare quando si vegga e sia ben compreso, che dalla maggiore o minor loro distanza niun profitto si ottiene per la cognizione della curva? È troppo aperta cosa che con tale risorsa, o con tale maniera di ragionare noi siamo sempre fuor di strada, ognora che si guardi al rigor geometrico, e si comprende, che la infinita propinquità dei punti non può servire che ad attutire le difficoltà, ed a nascondere la verace natura della quistione o della ricerca, che andiam facendo. E in vero la indefinita o infinita propinquità dei punti segnati dalle ordinate ad una curva, traducendo l'animo in su la considerazione di questa estrema propinquità, lo pone innanzi a delle particelle di curva che per la loro suprema piccolezza gli diventano incomprensibili; intanto qual pro o guadagno da ciò? Certamente nessuno; ed a persuaderci di ciò basta notare, che con questo metodo veramente singolare si tenta spiegare la natura della curva ed il rigoroso di lei andamento col condurre l'animo in mezzo a parti incomprensibili, e perciò al tutto inette a somministrare nozioni precise e rigorose.

238. Poi siccome la propinquità dei punti non può esser spinta al segno che essi si tocchino (perchè in allora si compenetrano in un solo, e così mandano in fumo tutta la nostra indagine, e tutto il nostro ragionamento), dunque tra questi punti è necessario che scorra la curva a noi sconosciuta, della quale rigorosamente parlando non sappiamo mai quanto si scosti o s'allontani dalla retta che congiunge questi due punti medesimi.

Infinita è la famiglia delle curve, infinite le diverse affezioni o piegature saltuarie, che posson prendere tra due punti, intanto che una sola ed uniforme a sè stessa è la linea curva che unisce i punti medesimi!

239. Tutto l'avvantaggio adunque, che filosoficamente parlando, si può ricavare da questo genere di speculazioni geometriche, spinto sino all'indefinita propinquità dei punti, per determinare le curve, si riduce ad un bel nonnulla, rigorosamente parlando.

E di fatti, tradotto l'animo davanti a questi infinitesimi tratti di curva determinati dai punti medesimi infinitamente vicini, gli abbisognano ancora due ipotesi, per aver diritto di ritenersi con ciò prossimamente vicino alla cognizione che desidera; una, e tutta gratuita ipotesi, è quella che la curva in questo piccol tratto si scosti pochissimo dalla retta, e non presenti qualche singolarità di piegatura, l'altra ipotesi è quella, che servendosi quasi di saldo scabello della prima ipotesi, si possa con rigore considerare, che la curva in questa brevissimo o infinitesimo tratto si confonda con la retta, che unisce i due vicinissimi punti. Ora se ne posson forse ricavare induzioni rigorose e matematicamente vere da basi ipotetiche, ed anco erronee, come sono quelle che si pongono o che possiamo avere nel caso presente?

Pervenuti col nostro dire a questa considerazione mi pare, che senza timor di andare errati, si possa ritenere,

che il metodo dei geometri, del quale ragioniamo, non sia per verun conto diverso da quello, col quale si tentasse torre di mezzo la incommensurabilità del lato del quadrato alla propria diagonale, impiccolendo continuamente il quadrato medesimo; e proseguendo questo impiccolimento sino alla insigne ipotesi di aver ridotto il quadrato allo stato di infinitamente piccolo. Cosa avrebbe un geometra guadagnato con tutte queste artificiate ipotesi? Certamente nulla affatto, riguardo al tor di mezzo rigorosamente la incommensurabilità di cui si tratta, perchè avendo sempre ritenuto la identica proporzione nei lati del quadrato diminuentisi, e la incommensurabilità dipendendo tutta intieramente da queste proporzioni e ragioni dei lati con la diagonale, egli avrà sempre conservata intatta tutta la incommensurabilità di cui trattasi. In fatti, siccome in un lungo tratto finito vediamo la curva diversa dalla retta, così in ogni escogitabile piccol tratto, la curva sarà sempre diversa dalla retta, e quindi perpetuamente mancheremo di verace vigore percorrendo queste vie, che sembrano conducenti al bramato fine.

240. Tutti i metodi adunque i quali si appoggiano a questo genere di investigazione delle curve, col mezzo cioè delle rette applicate alle curve, come sono quelli proposti da Euclide, da Archimede, da Apollonio, da Pappo, da Proclo e da altri, e come pure sono quelli identici dei moderni geometri, non possono mai guidare alla rigorosa cognizione della curva; quindi non possono mai esser ritenuti per metodi rigorosi ed esattamente rigorosi.

Nel pronunciare questa asserzione, o questa sentenza, conosciamo di opporci all'opinione universalmente ammessa e ritenuta per vera; ma e per questo, doveva esser taciuta questa filosofica verità? Un'errore, perchè comune, deve esser ritenuto e rispettato come fosse una verità?

Questo non mai. Pieni di stima e di venerazione, come

siamo per tutti i geometri, e segnatamente per que' sommi che hanno fondata e ingrandita la matematica, non potevamo però ricusare il debito ossequio alla verità, ne accomodarci ad un' abbaglio, che l' autorità di tutti gli uomini non vale a tor di mezzo.

Di buon grado riconosciamo e confessiamo che questo metodo però benchè per niun conto veracemente rigoroso, nè pienamente esatto, serve assai comodamente a farci palese l'andamento delle curve, il loro corso, e le loro proprietà, con molta approssimazione, ed anzi con grandissima. Per altra parte confessiamo, che questo è l'unico mezzo che sia in mano dell' uomo per venire alla meglio che si può in cognizione delle curve; di questo mezzo noi ne conosciamo tutta l'utilità e la grandissima importanza, tuttavia in onta di tutti questi pregi, non possiamo disconoscerne la sua natura di pura approssimazione.

I moderni geometri che considerano la curva, non come curva, ma arbitrariamente la trasmutano in linea retta composta di piccoli lati ad angoli ottusissimi congiunti tra di loro, o come si usa dire in altra maniera, che considerano la curva come un poligono formato di infiniti latercoli infinitesimi, appare (secondo l'opinione di alcuni geometri) che incominciassero le loro ricerche là dove gli antichi già stanchi dalle loro speculazioni finivano le loro; ma prescindendo per ora dall'esaminare la filosofia di questa sentenza, o parere di alcuni geometri, rivolgiamo invece il nostro pensiero a ponderare ben bene, se, e quanto vantaggio i moderni ottengano di più di quello degli antichi con questa loro arditissima ipotesi? In quanto a noi dobbiamo confessare, che l'idea dell'infinitesima grandezza ci pare assai più determinata e precisa di quella della grandezza minor di ogni data, e perciò che l'ipotesi dei moderni sia in filosofia più pregievole di quella degli antichi; vedremo pure in

seguito meglio dichiarato questo nostro pensamento; venendo per altro in questo luogo al vero guadagno che presentar può la opinione dei moderni, confesseremo che non lo troviamo nelle moderne ricerche, perchè in quanto alla possibilità di guadagno questa tutta dipende da quel poco che sembravano trascurare gli antichi, ammettendo eguale a zero la loro minore di ogni data, e da quel poco che sembran trascurare i moderni col porre la loro grandezza infinitesima eguale allo zero; perciò prescindendo che i vecchi geometri si innoltravano in un grande ginepraio di diverse ipotesi, tuttavia in sostanza intendevano a render rigoroso per quanto si poteva il loro ragionamento, e quindi la consecutiva cognizione della curva.

Gli antichi adoperavano l'ipotesi che la curva o il circolo fosse un poligono di infiniti lati per appropriare al circolo le proprietà del poligono e così aver in mano loro la cognizione di quella curva, ed i moderni con più di franchezza di pensamento ritengono questa antica ipotesi come un concetto facile e semplice. Ma in far questo, i moderni, si permettono più dichiaratamente l'assurda idea di trasmutare la curva in una retta, concetto e idea che non potrà mai appieno purgarsi dalla taccia di ripugnanza, rigorosamente parlando.

Intanto chiuderemo questo cenno intorno al metodo impiegato dagli antichi, e seguito con pochissima differenza dai moderni, di procurar di conoscere le linee curve deducendo tal cognizione dalle linee rette, e dalle proprietà di queste ultime, facendo osservare, che tutte le equazioni esprimenti le proprietà delle curve di qualsivoglia natura, sono equazioni che rigorosamente considerate, non esprimono altro e puramente altro, che proprietà, relazioni, ragioni o rapporti di linee rette applicate però con molta sagacità alle curve.

CAPITOLO SESTO

Filosofia del calcolo infinitesimale, o calcolo sublime.

241. Eccoci alla nuova analisi, vogliam dire, al *calcolo delle flussioni* e delle *fluenti*, al *calcolo differenziale* ed *integrale*, al *calcolo dei limiti*, delle *evanescenti*, delle *derivate*, ecc. ecc.

Prima di venire all'esposizione di questi nuovi calcoli, siaci permesso di riassumere quello che sin'ora sparsamente siam venuti esponendo. E prima d' ogni cosa richiamiamo alla nostra memoria, che la nozione dell'infinito per quanto può essere conosciuta dalla mente umana è molto incomprensibile ed oscura, come quella, che vince di molto la nostra comprensiva facoltà. E sebbene la vediamo adoperata in matematica sino dai primi tempi nei quali si coltivò questa scienza, tuttavia rimane sempre una verità di fatto, che questa nozione dell' infinito supera d' assai il nostro intendimento.

242. La proprietà del continuo, consistente in una forma o concetto nostro intellettuale, che introdotta ed indossata alle grandezze, le rende infinitamente divisibili, è una nozione ancor essa per noi incomprensibile, perchè contenente espressamente la nozione dell'infinito.

Questa nozione intanto fu universalmente ammessa, e di essa si sono sempre considerate come intrinsecamente ed essenzialmente dotate od informate tutte le grandezze lineari,

superficiali, solidali, numeriche, algebriche, algoritmiche, ec. ec. non che lo spazio ed il tempo, considerati soggettivamente come entità geometriche ideali.

243. La infinita, o meglio, la indefinita divisibilità delle grandezze geometriche ha suggerito ai matematici il pensamento delle indefinite diminuzioni ritenute eseguibili sopra tutte le grandezze geometriche, e quindi gli ha indotti a credere, che questa via delle indefinite diminuzioni conducesse a quel supremo grado di ultima piccolezza delle grandezze medesime il quale per la sua suprema tenuità riuscisse poi minore di ogni data ed assegnata grandezza; e quindi gli ha anco indotti, in vista di una tenuità sì estrema a ritenere, che la grandezza ridotta a questo stato fosse anco zero; onde n'ebbe origine il celebre principio, che la minor di ogni data era eguale a zero, e che le grandezze finite, che non differivano tra di loro, che per una grandezza minor di ogni data fossero anco eguali, e rigorosamente eguali.

244. Questo stato supremo di piccolezza derivato, o accagionato, secondo essi, alla grandezza geometrica finita in causa di indefinite diminuzioni ad essa sopravvenute, conduceva la mente ed il pensiero sino all'ultima risoluzione della grandezza, o sino ai primi elementi ideali soggettivi della medesima; e gli elementi considerati in questo stato come zero nel loro valore, somministravano anco l'idea dei principii evanescenti, e delle prime ed ultime ragioni delle grandezze.

245. Intrattenendo la nostra attenzione sopra la indefinita serie delle diminuzioni delle grandezze, e consecutive diminuzioni sopravvenienti ad esse, e queste spinte sino alle ultime ragioni, ed alle evanescenti, si scorgeva anco per necessaria illazione aperta la via a risalire retrocedendo da queste supreme ultime inassegnabili entità, alle parti finite, e quindi alle grandezze medesime finite, delle quali esse

ne venivano considerate i primi altissimi elementi costitutivi; ed in questa mentale scomposizione e ricomposizione della grandezza geometrica hanno anco creduto di rinvenirvi la nozione della generazione delle grandezze d' ogni maniera, perchè dotate della proprietà del continuo.

Quest'idea della generazione indefinita delle grandezze, quantunque suggerita o derivante dai premessi principii, tuttavia parve dall' antica geometria appieno trascurata, o meglio lasciata in disparte, senza che se ne scorga il motivo di questo contegno; ma quando comparve in su la scena dei geometri il divin Galilei la pose pel primo in chiara luce ed in piena dilucidazione filosofica. Egli, per esser anco preciso ne'suoi concetti, appellò questi primitivi generatori della grandezza *principii indivisibili,* ed appellò i primi primissimi principii del moto col nome di *velocità virtuali*, dalle quali ultime ebbe appunto origine e vita il famoso principio delle velocità virtuali, per cui il moto secondo le sue dottrine, risultava dalla somma infinita di queste velocità virtuali, infinitesimi elementi di esso moto, le quali poi consumandosi anco in tempo finito, e consumandosi col ripassare per tutti i gradi di diminuzioni riusciva di nuovo alle velocità virtuali, indi alla quiete o zero moto, da esso lui chiamato anco infinita tardità.

246. Siccome la supposizione delle prime ed ultime ragioni considera la grandezza finita in certo modo esaurita nella propria entità e come consumata insino all'ultimo elemento, così suggeriva e presentava, come induzione legittima, l'idea dell'esaustione, od il così detto *metodo di esaustione,* il quale sotto altra denominazione era poi identico con quelle delle prime ed ultime ragioni, atteso che queste nè più nè meno delle evanescenti si ritenevano per eguali a zero.

247. Archimede fondandosi sopra queste stesse idee, creava

il suo metodo dei limiti, il quale consisteva nel considerare, mediante alcune quantità costanti considerate quali *limiti*, la differenza che in origine esisteva tra alcune grandezze, nel considerarla diciamo come consunta od esaurita allorquando le grandezze si erano infinitamente avvicinate allo stato della grandezza *limite*.

248. Galilei con li suoi indivisibili dichiaratamente infinitamente piccoli, ne'quali supponeva mentalmente risolubile ogni grandezza finita, veniva direttamente fondando l'analisi sublime o il calcolo differenziale, appoggiato alla posizione e considerazione di uno di questi supremi infinitesimi elementi.

E questa idea sublime fu poi portata come vedremo alla sua perfezione dall'ingegno perspicacissimo di Leibnitz.

249. Lo stesso Galilei ponendo francamente lo infinito, al quale trovavasi condotto direttamente dalle sue dottrine, sebbene dichiarasse questo infinito incomprensibile, tuttavia, stabiliva ed insegnava il seguente principio: cioè, che uno indivisibile non poteva accrescere nè diminuire l'infinità degli indivisibili da cui risultava ogni grandezza finita, e quindi rinveniva e dimostrava il famoso principio, detto poscia principio del calcolo differenziale.

250. Barrow faceva uso delle dottrine di questo nostro insigne italiano, chiamando lo indivisibile dal suo valore, quantità cioè infinitamente piccola, e ciò faceva appunto per aver l'appoggio filosofico di Galilei, di trascurare questa quantità infinitamente piccola ne'suoi calcoli.

251. Lo stesso filosofo di Firenze ponendo vie meglio in chiaro questi suoi concetti, nel parlare dell'infinito ammetteva, o meglio confessava, che secondo le sue dottrine si trovava nell'assoluto bisogno di dover ammettere degli infiniti gli uni degli altri incomparabilmente maggiori; circostanza che lo poneva in qualche imbarazzo, al quale per altro cer-

cava ripiego ed evasiva, col far osservare, che altrettanto riducevasi solo a nostra inesatta maniera di idearsi l' infinito, e di trattarlo, come fosse quantità finita, maniera che non può nè debbe aver luogo quando si parla dell'infinito, perchè a questo supremo concetto non s' addicono le proprietà del più e del meno, del maggiore e del minore, tutte proprie esclusive della quantità finita.

252. Cavalieri fondandosi sopra idee e nozioni in molta parte conformi a quelle di Galilei, insegnava più dichiaratamente, che all' indivisibile competevano le proprietà della grandezza finita della quale lo indivisibile era ritenuto come una parte costitutiva di essa; e procedendo innanzi su la scorta di queste posizioni apriva gli occhi ai geometri, mostando loro, come dalla cognizione delle proprietà degli indivisibili si risaliva alla cognizione della grandezza medesima, ponendo così la vera base del calcolo che poscia fu appellato *integrale*.

Altrettanto fatto aveva Galilei e nella maniera più dichiarata che si possa ideare, perchè insegnava a sommare gli istanti infinitesimi del tempo per formare il tempo finito, e gli infinitesimi momenti di moto appellati velocità virtuali, per formare il momento di moto finito.

253. Wallis, sommo geometra inglese, trattava le serie procedenti all'infinito, e ne portava a grande perfezione le loro dottrine e proprietà, e nelle sue speculazioni parlava dell'infinito, come di cosa ordinaria conosciutissima (num. 155).

Fermat, grande matematico francese, scendeva anco a più spiegato ragionamento fondato sopra l'indivisibile, o sopra la quantità infinitamente piccola, ed al modo di trattarla, posta che fosse in comparazione della grandezza finita. E prima di Fermat, Keplero aveva con successo adoperata la dottrina degli indivisibili, sotto il loro aspetto naturale di grandezze infinitamente picoole (num. 158, ecc.).

254. L'idea di considerare i circoli e le altre curve come altrettanti poligoni composti da una infinità di piccole linee rettilinee era già ammessa sino da Euclide, da Archimede, da Galilei, ecc. ecc. e tanto gli uni che gli altri fondarono sopra di questa idea delle proposizioni e dimostrazioni geometriche.

255. La dottrina di assiepare le curve di poligoni, e di accostarsi indefinitamente con essi alle curve, a mano che si moltiplicavano i lati dei poligoni, era dottrina conosciutissima e con moltissima sagacità portata a molta perfezione dagli antichi geometri.

256. Fino dalla più remota antichità erasi creato e posto in uso il principio, che due grandezze finite le quali non differissero tra di loro, che di una grandezza minor di ogni data od assegnata, queste due grandezze erano rigorosamente eguali.

257. Meditando adunque sopra tutte queste dottrine potremo di leggieri comprendere, e senza niuna difficoltà, quanto mancasse alla scoperta del calcolo differenziale ed integrale, e quale e quanto sia stato l'avanzamento della scienza matematica, fatto con la scoperta di questo nuovo calcolo da Newton e da Leibnitz.

258. Ma per formarsi una vera nozione adequata dell'avanzamento delle matematiche, avanzamento considerato specialmente sotto il punto di veduta intellettuale risguardante il perfezionamento delle dottrine derivante da questa scoperta famosa, o in essa contenuto, ci conviene porre in chiara luce le dottrine dispiegate dai suddetti due scopritori. Incominciaremo dal primo, non già perchè si ritenga a lui appartenere la priorità della scoperta in confronto di Leibnitz che qui si è nominato in secondo, ma perchè le opere del primo si presentano più consenzienti alle opinioni degli antichi, e per questo le più appropriate ad appalesare

tutto il perfezionamento della filosofia inchiuso in questa famosa scoperta.

259. E qui sia avvertito il lettore, che citando le opere di Newton, noi ci riportiamo all'edizione di Losanna del 1744, del tipografo Bousquet.

Nel suo primo Opuscolo intitolato: *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, alla pagina 24 e 25, scrive: = Et quidquid vulgaris analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat; ut nihil dubitaverim nomen analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt, quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines et rationis finitæ, nec designare, neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: sicut radices surdæ finitarum æquationum, nec numeris, nec quavis arte analytica ita possunt exhiberi, ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur. Denique ad analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum areæ, et longitudines, etc. (id. modo fiat) exacte et geometrice determinentur =.

260. Da questo suo modo di esprimersi si vede chiaro, che egli non riformidava per verun conto la nozione e la natura dell' infinito, ma che anzi si poneva francamente a considerare e trattare questo inarrivabile supremo concetto, nè più nè meno di quello potesse fare con qualunque altra idea ordinaria ed attinente all'analisi delle grandezze finite. Più coraggiosamente asserisce, che le equazioni che si esprimono con un numero infinito di termini, sono egualmente esatte, di quelle che si esprimono con un numero finito di termini.

Circa questo newtoniano asserto però dobbiamo avvertire ad una filosofica distinzione molto importante, distin-

zione che disvela una svista di questo sommo filosofo. Imperciocchè altra cosa è una equazione espressa per un numero finito di termini, ed altra e ben diversa cosa è un equazione che non può essere espressa se non con un infinito numero di termini. Nel primo caso la equazione è rigorosamente esatta perchè nei membri sono tutti i termini necessarii a costituire la rigorosa eguaglianza, o identità del valore dei membri formanti l'equazione; ma quando uno almeno dei due membri, non può esser espresso (nel risolvere l'equazione), se non per mezzo di un numero infinito di termini, o per mezzo di serie procedente all'infinito, allora noi ci troviamo posti avanti a delle considerazioni, non molto esplicite, e che perciò non si possono ammettere e comprendere egualmente che quelle, le quali derivano e risultano dalle equazioni composte di un numero finito di termini. In fatti la serie infinita dei termini mantiene e ci presenta bensì in una maniera astratta la eguaglianza della equazione, ma siccome quest'eguaglianza si appoggia al numero infinito dei termini, come mai questi possono concepirsi ed aversi tutti? ed espresso perciò che sia qualcuno dei membri della equazione mediante qualunque serie progrediente coi suoi termini all'infinito, non si sa conoscere mai, come sia esatta, se non all' infinito, al quale è impossibile di pervenire; e perciò la mente nostra in faccia a questa infinità, che non può nè concepire nè esprimere, rimane sempre in sospensione circa la rigorosa eguaglianza dei due membri della equazione. La maniera adunque di esprimersi usata da Newton appare che non presenti quella identità rigorosa di valori, quale si vede e si trova nelle equazioni aventi termini numero finiti. Newton che asserisce con tutta la confidenza questa identità di valore tra le equazioni espresse di un numero finito di termini, e quelle che sono espresse per un numero infinito, doveva presentare a' suoi lettori anco la di-

mostrazione; perchè senza di questa, il suo dire non manifestasi apertamente esatto.

Newton si trovò guidato a queste serie derivanti dalle equazioni algebriche e di alcune curve, quando aveva bisogno di integrare per parti la funzione componente un membro dell'equazione, la qual funzione non sviluppata in serie non si presentava integrabile.

I geometri che vennero dopo di lui, quando non potevano integrare simili funzioni, considerate quali si presentavano, anch'essi ebbero sempre ricorso allo sviluppamento delle funzioni in serie: ma in questo caso veggendo che non potevano mai esibire tutti i membri o i termini infiniti delle serie, si accontentarono sempre di dire, che le loro integrazioni riescivano solamente per indefinita approssimazione; e procuravano di portare sempre la loro attenzione non sull'infinità della serie, ma sull'ultimo residuo, procurando di renderlo alla meglio trattabile con qualche artificio; e così essi s'adoperavano per dare alla equazione quel rigore di eguaglianza, che per loro si poteva maggiore.

Ognun vede però, che fondandosi questi geometri sopra la considerazione dell'ultimo residuo delle serie spinte molto innanzi, essi non fondavano più la perfetta eguaglianza sul numero infinito, ma sibbene sopra le loro differenti artificiate maniere di analisi.

A meglio renderci famigliari queste dottrine arrechiamo un esempio, e questo sia tolto dal medesimo primo opuscolo di Newton, pagina sesta, regola terza, ove egli si propone la equazione $\frac{a\,a}{b+x}=y$, e svolgendo in serie la frazione del primo membro, trasforma l'equazione nella seguente:

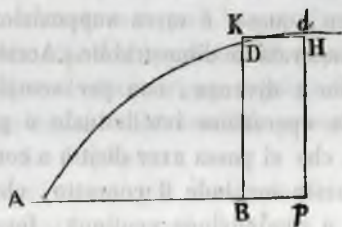
$$y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2\,x}{b^2}+\frac{a^2\,x^2}{b^3}-\frac{a^2\,x^3}{b^4}+\text{ecc. all'infinito.}$$

Ora è facile cosa il comprendere, che l'equazione ultima qui arrecata è vera ed esatta quando sia la y in un membro e tutta la serie nell'altro: ma questa serie contenendo infiniti termini, e questi non potendo esistere nè razionalmente nè realmente, come si dirà esatta rigorosamente l'equazione di cui si tratta? Tutto questo manco di rigorosa esattezza vie meglio si appalesa nell'equazione qui sopra trattata da Newton, perchè egli si appiglia a questo sviluppamento della funzione $\frac{a\,a}{b + x}$ per arrivare a conseguire l'integrale della fonzione y espressa in x, il qual integrale non può mai riuscire rigorosamente compiuto, ma solo indefinitamente prossimo al vero. Par dunque cosa aperta, che questo grande uomo siasi in questo luogo espresso con una larghezza. la quale sicuramente non si sa comprendere come risponder possa al rigor di ragione, e quindi, che non avesse tutto il fondamento di asserire, che una equazione espressa in uno dei suoi membri con termini infiniti sia egualmente rigorosa, che le equazioni algebriche le più esatte.

261. Ho qui voluto fare queste poche osservazioni non a titolo di critica del sommo inglese, ma perchè di buon ora sia fatto presente al lettore, che egli non sempre appoggia il suo dire al pieno rigor filosofico, e segnatamente perchè si comprenda, non esser di piena evidenza il di lui dettato quando scrive: = Ratiocinia nempe in hac analysi (e quest'analisi comprende le serie contenenti infiniti termini) non minus certa sunt quam illa, (cioè spettanti all'analisi finita) nec æquationes minus exactæ, licet omnes earum terminos, nos homines, et rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus =.

262. Ma venendo a delle considerazioni, che più direttamente risguardano la nuova scoperta dell'analisi sublime, vediamo come nel medesimo Opuscolo e precisamente alla pag. 25 egli si esprima presentando una dimostrazione di differenziazione e di integrazione, risguardante la quadratura delle curve. = Sit itaque curvæ alicujus A D *d*, basis A B = x, perpendiculariter applicata B D = v, et area A B D = z, ut prius. Item sit B *p* = o; B K = v et rectangulum B *p* H K (o v) equale spatio B *p* H K.

Est ergo A *p* = x + o, et A *d p* = z + ov. His præmissis ex relatione inter x et z ad arbitrium assumpta quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9} x^3 = zz$.

Tum x + o (A *p*) pro x, et z + ov (A *d p*) pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3 x^2 o + 3 x o^2 + o^3 =$ (ex natura curvæ) $z^2 + 2 z o v + o^2 v^2$, et sublatis ($\frac{4}{9} x^3$ et zz) æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $\frac{4}{9}$ in $3 x^2 + 3 x o + o^2 = 2 z v + o v^2$.

Iam si supponamus B p in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil, erunt v et y æquales, et termini per o multiplicati evanescent, quare restabit

$$\frac{4}{9} \times 3\,x\,x = 2\,z\,v\,,\ \text{sive}\ \frac{2}{3}\,x\,x\left(= z\,y\right) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\,y,$$

sive $x^{1}\left(= \frac{x^{2}}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit

$$\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = z.$$

263. In questo computo del sommo inglese, benchè giusto ed assai ben guidato, non esiste però nella dottrina che lo accompagna e lo sostiene sufficiente convenienza di concetti e di idee, perchè la supposizione che la B p diminuisca all'infinito, ed in forza di tale diminuzione diventi evanescente, o zero, questa è mera supposizione, e non mai una verità dimostrata o dimostrabile. Acciò la B p diminuisca all'infinito e divenga, non per semplice ipotesi, ma per qualsivoglia operazione intellettuale o geometrica, cotanto stremata, che si possa aver diritto a considerarla come evanescente, questo inchiude il concetto, che la grandezza B p sottoposta a diminuzione continua, fosse in origine o potesse essere di un valor finito, onde aver motivo di considerarla suscettiva di indefinite, anzi infinite diminuzioni, diminuzioni precedenti la evanescenza e conducenti ad essa; similmente il concetto dell'evanescenza, quale si considera dal nostro filosofo, inchiude egualmente, che la diminuzione, per poter essere infinita, sia fondata sopra la proprietà del continuo e proceda in modo, che sempre e poi sempre lasci residui capaci di diminuzione, onde sia così aperta sempre la via all'infinito, o, ciò che vale lo stesso, manchi sempre di fine.

264. Ora qualsivoglia diminuzione sottoposta a questa condizione impreteribile che sempre lasci residui suscettivi di nuova diminuzione è chiara cosa, che presenta due aspetti inconcepibili; uno, che per la diminuzione procedente all'infinito, la grandezza finita, possa alla fin fine arrivare ad esser portata all' insigne supremo stato dell'evanescenza, particolarità la quale non si può ammettere se non in forza della tacita ma insieme necessaria supposizione di infinita reale diminuzione, il che ripugna alle basi già poste.

L'altro si è, che anco nella insigne ipotesi, che la diminuzione si supponga protratta sino all' infinito e si voglia in forza di sì ardita ed inamissibile supposizione, ritenere la grandezza (sottoposta a diminuzione), divenuta evanescente o zero, questa ipotesi riesce assurda; imperciocchè dando alle diminuzioni tutto il potere di cui sono capaci, e dando loro tutta la possanza che possono esercire sopra una grandezza in origine finita, tuttavia non può la grandezza pervenire a tanto di piccolezza che si abbia diritto di considerarla evanescente in forza di una diminuzione regolata da legge geometrica, la quale inchiude l'impreterribile precetto, che sempre resti parte finita da diminuire.

265. Per rendersi anco più familiare l' importanza dei due inamissibili aspetti nei quali si abbatte la dottrina newtoniana, proponiamoci un esempio pratico, cioè supponiamo che la grandezza sottoposta a queste infinite diminuzioni sia espressa per a. Questa si sottoponga a serie geometrica di diminuzioni procedenti all'infinito; e le diminuzioni siano ordinate su la seguente semplicissima ipotesi, che a prima giunta o per primo termine si prenda la metà parte di a; indi la metà parte del residuo, e così si faccia sempre.

Già s'intende che il prenderne la metà col primo termine, anzi che $\frac{1}{3}$, ovvero $\frac{1}{4}$, o pure $\frac{1}{100}$ è sempre la stessa

cosa, e la serie è sempre di una medesima indole e natura. Allora avremo il complesso delle diminuzioni di cui parliamo espresso dalla seguente serie, $a = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \frac{a}{16} + \ldots\ldots \frac{a}{\infty}$.

Ora fermiamci per un istante a considerare il significato di questa serie. Il geometra seguendo l'andamento della serie la scrive; e dopo alcuni termini indicanti la base su cui è fondata la serie, vi appone alcuni segni o punti indicanti la infinità dei termini interposti, e voluti per giungere all'ultimo termine che suppone esser quello che esprime la distanza infinita, o meglio, che compie la infinità della serie. Tutto questo è quanto basta a contentare il geometra, ed è quanto ci vuole a far che il lettore si ammutolisca e rispetti questo ultimo risultato, che a dir vero, a prima giunta par che vesta l'aspetto di evidenza persuasiva.

Ma quando la nostra mente pone attenzione alla di lei esattezza e domanda a sè stessa, quale e quanto è il rigoroso filosofico significato di questa formola che essa s'è creata, e che nella sua alta importanza pare che la sbalordisca e la sopraffaccia, cosa debbe pensarne? Primamente conosce (volendo esser consentanea a se medesima) che l' ultimo termine della serie contiene un significato incomprensibile, essendo che i punti replicati ed usati ad esprimere la infinità dei termini sottintesi sono una espressione insignificante. In fatti smascherata dall'imponimento che la serie esercita su di noi, che l'abbiamo creata, ma guardandola ben addentro, dice da sè stessa, che non è possibile la espressione $\frac{a}{\infty}$, perchè l'infinito esaurito ripugna, ed anco sup-

ponendo possibile ciò che ripugna, è sempre di una aperta ripugnanza che $\frac{a}{\infty}$ riesca indivisibile, o minor d'ogni data, e molto più poi evanescente; e perchè? perchè, è alla fin fine uno dei termini della nostra serie, ed ogni termine l'ho dobbiamo supporre sempre diminuibile per precetto impreterribile, o meglio, per posizione essenziale della legge della serie; non possiamo adunque riconoscerlo nè per ultimo, nè per indivisibile, e molto meno per evanescente. Onde le nostre posizioni: una cioè, che $\frac{a}{\infty}$ sia l' ultimo è impossisibile, l'altra che sia evanescente è anco più impossibile, e ciò anco in onta, che sia sorpassata la prima impossibilità.

Che cosa deve dunque pensare la nostra intelligenza, che si pone a considerare col lume di ragione queste sue espressioni o formole matematiche? Ella deve pensare, che quasi senza avvedersene ha posto piede in una regione incognita, e di tal natura, che manca di mezzi per inoltrarvisi, e per comprenderne razionalmente la vastità e la sua natura. Non proseguiamo questi pensieri, giacchè al solo meditarli, ognuno ne rimarrà talmente compreso, che non saprà più che pensare nè dire della seducente formola geometrica esprimente la nostra serie.

266. Ma ritorniamo a noi. Questi pensamenti non sono forse sfuggiti alla mente perspicacissima dell'inglese filosofo, perchè poco dopo, nello stesso opuscolo, alla pagina 27, soggiunge: = nempe quod quotiens, cum x sit satis parva quo magis producitur, eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, etc.) quo distat ab exacto valore ipsius y, (e qui si noti bene che Newton allude all' equazione $\sqrt{aa+xx}\, x = y$) tandem evadat minor quavis

data quantitate, et in infinitum producta sit ipsi y æqualis. =

Da quest' ultima maniera di parlare del gran Newton risulta a chiare note, che egli ritiene, che la protrazione delle diminuzioni e consecutiva approssimazione prolungata all'infinito sia capace di ridurre all'esattezza il valore di y espresso dalla serie prodotta all'infinito.

Ma venuti col nostro ragionamento su queste nozioni, per grazia, i lettori si richiamino a memoria i pensamenti espressi nel numero precedente, e si comprenderà quanto siano infondate le dottrine newtoniane, e per lo meno quanto siano lontane da quella evidenza aperta e spontanea, che sola ottiene e può ottenere il pieno assentimento e relativo convincimento della nostra ragione.

Più dalla maniera usata dal nostro gran geometra ci viene anco veduto, che egli comprende di essersi posto unicamente in su la via delle approssimazioni, perchè espressamente dichiara, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit. Ove viene da osservarsi, che Newton in questo luogo si aggira in un equivoco, perchè la via di approssimazione non conduce mai ad esattezza se non cangiando di natura, e divenendo via di rigore; in fatti non è concetto giusto quello espresso in questo luogo: = che, quo magis producitur, eo magis ad veritatem accedit, = perchè la verità o esiste, e si raggiunge, o mal si può dire, che le siamo più o men vicini, finchè ne siamo sempre discosti; imperciocchè supponendo v. g. che il numero dieci esprima un valore esatto, ben si vede che tanto il tre, quanto il quattro, il sei, l'otto ed il nove, non sono il dieci, e ben si vede che tutti indistintamente portano con sè l' impronta piena dell' inesatezza, giacchè niuno di questi numeri pareggia l'esatto valor del dieci; e niuno per quanto vi si accosti è il dieci; per la qual cosa questo appropinquamento all'esat-

tezza del dieci, non è che illusorio, e non si risolve perciò che in una seducente apparenza di ragionamento verace.

Ma alcuno ci inviterà a riflettere, che in questo suo dire l'inglese ha voluto farci presente appunto, che il nove si accosta più al dieci che l'otto, che il sette, ecc. e per questo motivo esigerà che sia riconosciuto per esatto il suo modo di esprimersi. A chi credesse però di proporre così fatta osservazione, gli diremo, che tutto questo va bene insino a tanto che alla buona si considera che tra il valore del nove v. g. e quello del dieci vi passa una differenza minore di quella che esiste tra il sette ed il dieci, ma quando, come appunto è nel caso nostro, si parla dell'esatto valor del dieci, e si vuol insinuare l' appropinquamento a questa identità di valore, che presenta il dieci, niuno dei ricordati numeri è più lontano nè più vicino dell'altro, perchè a rigore tutti ne sono infinitamente lontani. Queste dottrine saranno meglio chiarite in progresso.

267. Intanto proseguiamo nell' esposizione delle dottrine del nostro filosofo. Questi suoi pensamenti sono meglio dichiarati nell' Opuscolo secondo ove più diffusamente manifesta la sua dottrina relativa alla scoperta del calcolo sublime. Questo Opuscolo secondo è denominato *Methodus fluxionum et serierum infinitarum.* La dottrina detta delle flussioni la appoggia ai due seguenti principii, ricordati alla pag. 53, del medesimo Opuscolo.

PROBLEMA PRIMO.

= Longitudine descripti spatii semper (idest quovis temporis momento) data, invenire velocitatem motus tempore proposito. =

PROBLEMA SECONDO.

= Velocitate motus semper data, invenire longitudinem spatii descripti tempore proposito.

Si e. g. in æquatione $xx = y$, exponit y longitudinem spatii quodam momento temporis percursi (pag. 54), quod tempus mensuratur et descriptum exhibetur ab alio spatio x crescente juxta uniformem celeritatem $\dot{x}$; exponet $2x\dot{x}$ celeritatem, qua spatium y eodem temporis momento progreditur ad ulteriorum sui descriptionem, et vice versa. Hinc fit, ut in sequentibus considerem quantitates tamquam genitas continuo incremento, ut spatium, quod corpus aut quælibet res mota describit.

Cum autem hic tempus tantum considerandum veniat, tamquam expositum et mensuratum æquabili motu locali, et preterea, cum solæ quantitates ejusdem generis invicem comparari valeant, ut et velocitates, quibus augentur aut minuuntur: idcirco, in iis, quæ sequuntur, tempus *formaliter* non considero, sed suppono, quod una ex propositis quantitatibus homogenea cum aliis crescat æquabili fluxu, ad quam ceteræ, tamquam ad tempus, referantur, quæ ideo, per analogiam non inconcinne dici potest *tempus*. Quoties igitur vox *tempus* in sequentibus invenietur (eam autem sepiuscule usurpavi perspicuitatis et distinctionis causa) hoc verbum sumendum est, non quasi tempus intellexissem in sua *formali* significatione, sed tamquam significans quantitatem illam a tempore diversam, cujus æquabili incremento vel fluxu tempus exponitur et mensuratur.

Nunc in posterum *fluentes* vocabo quantitates has, quas considero tamquam gradatim et indefinite crescentes, easque repræsentabo per ultimas alfabeti litteras x, y, u et z, ut discerni possint ab aliis quantitatibus, quæ in æquationibus

considerantur tamquam cognitæ et determinatæ; et quæ idcirco per primas alfabeti litteras, a, b, c, d, e, ecc. exponuntur. At velocitates quibus singulæ fluentes augentur per motum generantem (quas velocitates appello *fluxiones*, aut simpliciter *velocitates* vel *celeritates*) exprimuntur iisdem litteris puncto auctis, sic $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$; idest pro celeritate quantitatis u pono $\dot{u}$, et eodem pacto pro celeritatibus aliarum quantitatum x, y, et z scribam $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ respective. =

268. Dopo aver egli esposto queste dottrine si mette a dimostrare, come data che sia la relazione, che hanno vicendevolmente tra di loro le quantità *fluenti*, con questa relazione si determina sempre la relazione che hanno fra loro le *flussioni*. Indi venendo di proposito al fondamento filosofico della sua dimostrazione si esprime alla pag. 59, nel seguente modo: = fluentium quantitatum momenta (videlicet earum partes indefinite parvæ; quarum accessione in indefinite exiguis partibus temporis quantitates ipsæ jugiter augentur) sunt ut velocitates, quibus fluunt aut crescunt.

Quapropter, si momentum alicujus (puta x) repræsentatur facto ex ejus celeritate $\dot{x}$ in quantitatem indefinite parvam, idest ($\dot{x}$ o) momentum aliarum u, y, z repræsentandum erit per $\dot{u}$o, $\dot{y}$o, $\dot{z}$o, quia $\dot{u}$o, $\dot{x}$o, $\dot{y}$o, $\dot{z}$o habent invicem eandem rationem quam $\dot{x}$, $\dot{u}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Jam quia momenta e. g, $\dot{x}$o, et $\dot{y}$o sunt incrementa indefinite parva, quibus fluentes quantitates x et y augentur per indefinite parva temporis intervalla, ex eo sequitur has quantitates x et y post indefinite parva temporis spatia evasisse $x + \dot{x}o$ et $y + \dot{y}o$. =

Ed alla pag. 60 soggiunge, per dare una verace idea della sua quantità indefinitamente piccola: = cum autem finxerimus o quantitatem infinite parvam (ove è a rimarcarsi, che fa sinonime le espressioni di indefinitamente pic-

cola grandezza con la infinitamente piccola grandezza!), ut exponere posset quantitatum momenta, termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati; eos igitur negligo =

E nel trattato della quadratura delle curve si introduce con le seguenti idee: = Quantitates mathematicas, non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur, non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum; superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum, et sic in cæteris. Hæ geneses in verum natura locum vere habent, et in motu corporum quotidie cernuntur... et has motuum vel incrementorum velocitates nominando fluxiones, et quantitates genitas nominando fluentes incidi paulatim annis 1665, 1666 in methodum fluxionum. =

269. Esaminando queste posizioni analitiche o geometriche del grande Inglese, si comprende di leggeri, che presenta delle nozioni attinte anzi intieramente apprese dalla filosofia o geometria del Cavalieri num. 151 e 152, il quale pure aveva anch' egli tolta da quei geometri anteriori, che vollero assegnare delle genesi alle grandezze geometriche. Ma non curandoci di questa storica origine delle nozioni che a noi presentar volle il filosofo inglese, che per altro sono tutte derivate dalla nazione italiana, fermiamoci a considerare che da queste sue dottrine apertamente fa vedere che ammetteva pienamente le dottrine di Galilei, cioè che l'indivisibile, o meglio la grandezza infinitamente piccola la considerava e la riteneva come zero in comparazione della grandezza finita num. 146 ecc. = cum finxerimus o infinite parvam termini in eam ducti pro nihilo haberi possunt. = Consimili vedute intellettuali erano già state abbracciate anco da Fermat, Wallis, Keplero, Barrow ecc.

Si comprende pure apertamente che Newton fece anco uso delle quantità infinitamente piccole per esprimere con esse le prime ed ultime ragioni, cioè i primi principii generatori e gli estremi momenti del moto; ed in pari tempo abbracciava largamente queste dottrine, onde cacciar fuori da' suoi calcoli, o trascurare in essi le quantità infinitamente piccole, non che quelle altre che di valor finito, erano moltiplicate per delle quantità infinitamente piccole.

270. Qui però occorre rimarcare, che la genesi mentale delle grandezze geometriche, in forza delle quali le grandezze vengono considerate quali prodotti del concorso infinito di elementi infinitesimi viene in mano di Newton a perdere qualche volta la sublimità del concetto, che essa ha considerata nella sua astrazione e generalità, perchè egli ha coraggio di dire schiettamente = hæ geneses in verum natura locum vere habent, et in motu corporum quotidie cernuntur. = Di fatti in questa maniera d' esprimersi esiste più d'un equivoco, primo perchè niuno può provare, che il moto reale e che ha luogo negli oggetti reali sussistenti e moventisi, risulti da momenti infinitesimi o da velocità virtuali considerate anco prima da Newton cioè dal Galilei come i primitivi generatori del movimento e delle rispettive velocità del moto generale ed astrattissimo; quindi il passare dall'astratto suscettivo di tutti i concetti infinitesimi sublimissimi, e trasferirsi al concreto, al quale non può competere nella intera sua estensione, la proprietà del continuo, è equivoco non piccolo, e per lo meno una larghezza, che mal s'addice al rigor geometrico.

Secondo perchè, deducendo le genesi di tutte le grandezze geometriche dal moto, è formarne una produzione di prodotti che l'animo non può concepire; imperciocchè, come si è già detto qui innanzi, niuno sa concepire come il punto possa muoversi, niuno intende come il punto senza parti

produr possa la lunghezza, ninno comprende che la lunghezza possa ingenerare la superficie, e quest'ultima il solido, e così prosiegui, num. 24 ecc.

271. Ma seguitiamo ad esporre i suoi pensamenti che si riferiscono alla grande scoperta dell' analisi infinitesimale; nel secondo Opuscolo parimenti parlando della trocoide ammette, che faccia un'angolo infinitamente maggiore di quello che fa un circolo qualunque con una data retta. = Quapropter trochois facit angulum contactus infinite majorem illo quem circulus quivis facere potest cum recta linea sed dantur anguli contactus, qui sunt infinite majores, quam quilibet ex iis, quos facit trochois, et alii rursus his infinite majores, et sic in infinitum. =

Qui Newton senza esservi guidato da veruna elevata filosofica dottrina razionale, ma scorto dalla sola profonda cognizione che aveva della scienza o meglio proprietà delle curve si trovò condotto nel santuario dell'infinito, e dell'infinito dello stesso infinito. Santuario al quale erano già pervenuti e i pitagorici, e l'autor dell' indivisibile, e dopo lui molt'altri.

272 Il nostro Fiorentino però più versato ed approfondito dell'inglese nella filosofia razionale, quindi più circospetto, e più conoscente delle difficoltà razionali che si affacciano all'animo in causa della ammissione di codesti infiniti, ed infiniti maggiori degli stessi infiniti, ristavasi dall' ammetterli, e ritraeva il pensiero da questi incomprensibili ed in pari tempo inamissibili concetti, mentre Newton all'invece pone largamente queste dottrine senza nemmeno dare a divedere che sentisse la forza delle gravi difficoltà che includevano, difficoltà che nessuno saprebbe risolvere. E si dice, che nessuno può risolvere le difficoltà che insorgono nell' animo e ad esso si presentano, perchè non fa bisogno di esser filosofi e profondi pensatori per compren-

dere come sia ripugnante il concetto di un'infinito infinitamente maggiore di un altro.

273. Newton, nell' opuscolo terzo denominato: *Introduzione alla quadratura delle curve*, dopo avere additato il metodo generale di ritrovare in ogni caso contingibile la *flussione* di una quantità indeterminata ed insieme generale come è x^n, prosiegue in tal modo: = similibus argumentis per methodum rationum primarum et ultimarum, colligi possunt fluxiones linearum seu rectarum, seu curvarum, ut et fluxiones superficierum, angulorum et aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus analysin sic instituere, et finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigare, consonum est geometriæ veterum; et volui ostendere quod in methodo fluxionum non opus sit figuras infinite parvas in geometriam introducere. Peragi tamen potest analysis in figuris quibuscumque, seu finitis, seu infinite parvis, quæ figuris evanescentibus finguntur similes, ut et in figuris, quæ per methodos indivisibilium pro infinite parvis haberi solent, modo caute procedas =.

274. In questo opuscolo e con questo ragionamento in esso dispiegato ravvicina il suo nuovo metodo delle flussioni, o delle quantità infinitamente piccole coi metodi degli antichi e degli indivisibili, ed in pari tempo in questo opuscolo lo vediamo però in via di fatto prevalersi intieramente delle dottrine di Galilei, di Fermat, di Barrow, cioè delle dottrine di ritenere la quantità infinitamente piccola come incapace di alterare il valore di una quantità finita; quando la infinitesima sia aggiunta o sottratta alla medesima quantità finita: = cum finxerimus o infinite parvam termini in eam ducti pro nihilo haberi possunt, eos igitur negligo =. Ove è a rimarcarsi, che i termini di valor finito moltiplicati per una grandezza infinitesima presentano un valore infinitesimo, e questo egli lo considera eguale a zero e

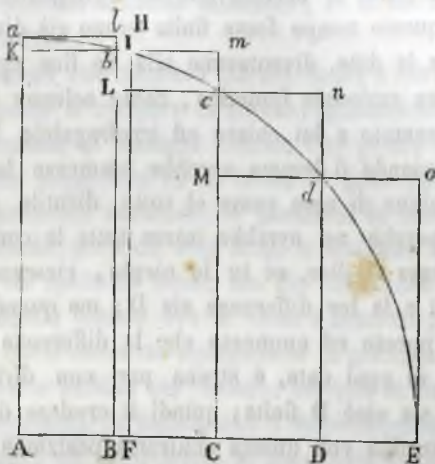
ciò anco senza la circospezione di considerarlo tale in comparazione della quantità finita. E nell'opuscolo XIII pag. 365 scrive: = terminos multiplicatos per o tamquam infinite parvos dele =. La stessa sentenza aveva già manifestato parlando della quantità minor di ogni data, la quale da lui si considera come trascurabile e perciò indistintamente come zero, o ciò, che vale lo stesso, come incapace ad alterare lo stato od il valore di una qualsivoglia analoga grandezza finita. Qualche altra volta fa uso del metodo dei limiti, e poco più poco meno come n' aveva usato il suo inventore Archimede. Parla pure ed adopera anco il metodo delle esaustioni, esso pure antico, il quale in quanto alla sua dottrina si risolve in quello delle prime ed ultime ragioni, non che in quello dei limiti.

275. Nella sua grand'opera: *Philosophiæ, naturalis Principia mathematica* sezione I.ª tom. I.° pag. 28 (edizione di Londra, 1724) scrive Lem. I: = Quantitates ut et quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius proprius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fient ultimo æquales.

Si negas, fiant ultimo inaequales, et sit earum ultima differentia D; ergo nequeunt proprius ad æqualitatem accedere, quam pro data differentia D; contra hypothesin.

Lem. II.

Si in figura quavis A ac E, rectis Aa, AE, et curva ac E comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcumque Ab, Bc, Cd etc., sub basibus AB, BC, CD, etc. æqualibus, et lateribus Bb, Cc, Dd etc. figuræ lateri Aa, parallelis contenta; et compleantur parallelogramma a K b L, b L c m, c M d n etc.; dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, et numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A

K b L c M d D, et circumscripta A a l b m c n d o E, et curvilinea A a b c d E sunt rationes æqualitatis.

Nam figuræ inscriptæ et circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum K l, L m, M n, Do, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi K b, et altitudinum summa A a, idest rectangulum A B l a. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus A B in infinitum minuitur fit minus quovis dato. Ergo (per lemma primum) figura inscripta et circumscripta, et multo magis figura curvilinea intermedia fient ultimo æquales. q. e. d. =

276. Si prega il lettore a considerare che questo primo lemma era come un principio di gran moda quando Newton scriveva questa sua celebre opera, e perciò non è meraviglia se questo sommo l'abbia usato senza molto pensarvi sopra, ed anco a preferenza della sua nuova dottrina delle flussioni.

Di fatti, se con la sua perspicacia lo avesse richiamato a sindacato avrebbe anco conosciuto, che la natura del primo

lemma era tutta razionale soggettiva, e che in esso si stabiliva, che tanto le grandezze, quanto le loro ragioni, che in un tempo finito si accostavano all' eguaglianza, e che avanti che questo tempo fosse finito erano già divenute minori di tutte le date, diventavano alla fin fine eguali, tutto questo lemma razionale ipotetico, come solenne ipotesi si sarebbe presentato a lui chiaro ed irrefragabile. In tal caso l' inglese copiando il lemma avrebbe ommesso la prova o la dimostrazione di esso come al tutto disutile ed inconcludente, perchè ne avrebbe intesa tutta la concludenza; di fatti in essa si dice, se tu lo nieghi, riescano alla fin fine ineguali e la lor differenza sia D; ma quando per ipotesi si è supposto ed ammesso che la differenza sia divenuta minor di ogni data, è strana per non dirla ridicola ipotesi, che sia cioè D finita; quindi il credere di conchiudere ad assurdità con questa contraria posizione è puerile petizione di principio. Ma intralasciando di più oltre dire circa questa illusoria dimostrazione del lemma, osserviamo che esso è tutto ipotetico razionale, o soggettivo.

277. Intanto venendo al secondo lemma, è pregato il lettore a voler considerare, che questo contiene dottrine affatto diverse da quelle del primo. In quest' ultimo tutto è supposto, e quando nelle supposizioni non vi siano idee escludentisi, niuna difficoltà può esistere, che ci impedisca di riconoscerlo per vero, ed ammetterlo; nel secondo lemma all'invece, egli passa ad un caso, non astratto, ma concreto, cioè esso viene a dimostrazione concreta di eguaglianza di grandezze, le quali benchè astratte, da prima erano però supposte disuguali.

Egli tenta adunque niente meno che di provare, che alla fin fine le ultime ragioni o i supremi residui delle linee rette sono eguali a quelli delle linee curve, e ciò che ancor più importa, egli tratta di arrivare a questa concreta dimostrazione

colla posizione di un impiccolamento dei parallelogrammi portato all'infinito e protratto all'infinito: = dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, et numerus augeatur in infinitum =.

Ora credo che nessuno durerà fatica a ravvisare l'antilogia, che esiste e traspare in questo ragionamento, che serve di dimostrazione al secondo lemma. Nel primo lemma ove tutto rimane soggettivo ed in istato di puro principio, o di semplice posizione razionale, le posizioni in esso contenute, come ipotetiche, possono aver luogo e costituire la verità del lemma in via ipotetica bensì, ma per altro anco persuasiva; ma nel secondo lemma ove si viene a concreta pratica identificazione od a concreta eguaglianza di grandezze disuguali e per valore e perfino per natura, bisogna in buona ed impreterribile regola di logica, che l'impiccolimento, all'infinito prodotto, ed appropriato ai parallelogrammi, sia non solo asserto ed in via razionale supposto, ma questo impiccolimento infinito deve avere realtà ed esistenza concreta. Ora un impiccolimento infinito concreto ripugna; dunque nulla la induzione ultima del lemma, induzione procedente della realtà dell'impiccolimento; dunque nulla la dimostrazione del secondo lemma, nullo il lemma medesimo.

Esaminiamo un poco più diffusamente questo nostro pensamento.

Nel primo lemma si stabilisce, che due grandezze supposte disuguali, se di queste la differenza venisse a diminuire in modo da riuscire minor di ogni data, allora si ritengono eguali. Questo lemma in via soggettiva razionale ed in via al tutto condizionata ipotetica, supponiamo pure che abbia luogo, e pienamente luogo.

In questo lemma, tutto ipotetico, si tace circa il modo di ridurre la quantità (che era la differenza) allo stato di minor di ogni data; nel secondo, che si sente il bisogno pra-

tico di aver in mano questa minor di ogni data, si ricorre al mezzo proposto da Euclide e da altri, di diminuire all'infinito la differenza, e di fatti acciò il secondo lemma sia avverato in concreto, conviene, che in concreto sia posta questa infinita diminuzione. Se dunque in questo secondo lemma la diminuzione infinita non si prova, ma si suppone, o si annuncia senza prova, e se questa infinita diminuzione è supposta e non provata, come mai si potrà ricavarne la conseguenza finale concreta dell' identificazione delle figure rettilinee inscritte e circoscritte, e della curva che giace in mezzo a loro?

Se poi per aggiunta vorremo portare la nostra considerazione sopra tutte le ragioni sino ad ora arrecate da noi per provare, che non solo in via di fatto, ma nè anco in via teoretica si può pervenire all'esaurimento dell'infinito, ci verrà di leggieri apertamente veduto, che non solo qui si suppone, e non si prova una diminuzione protratta all'infinito, ma che ripugna persino il supporla; il che ci fa vie maggiormente comprendere inconcludente questo lemma.

Questo è sempre stato, e sarà sempre lo scoglio irremovibile nel quale vengono ad urtare ed a infrangersi tutte queste dottrine astratte soggettive quando si vogliono applicare a dimostrazioni concrete ogni qual volta non si abbiano i mezzi di rendere le basi delle dimostrazioni concrete.

Ora chi verificherà la protrazione delle diminuzioni all'infinito? Chi renderà concreta questa trascendente eventualità?

Se insistiamo su questo oggetto, si è perchè esso concerne non solo un lemma od una posizione fondamentale di una delle più celebrate opere del sistema mondiale, ma molto più perchè risguarda un cardine della dottrina antica e di molte dimostrazioni geometriche nelle quali entrano linee rette e curve comparativamente.

E ritornando per poco sopra queste considerazioni, proviamo ad ammettere (per semplice ipotesi), che la diminuzione protratta all'infinito fosse possibile; ammettiamo che potesse essere praticamente verificata, o ciò che vale lo stesso, riteniamo per un momento, diminuiti infinitamente questi parallelogrammi esibitici dalla figura del secondo lemma; qual guadagno, domandiamo noi, qual guadagno avremmo fatto? quale evidenza o certezza avremmo procacciata al secondo lemma? Niuna piena certezza, niuna rigorosa dimostrazione. E in vero, si richiami a memoria ciò che si è già dimostrato avanti N. 235 e seguenti sino a 241, e vedremo, che con tali mezzi siamo sempre fuori di strada per giungere alla dimostrazione di cui trattasi.

Finalmente per comprendere in pien meriggio come lo impiccolimento dei parallelogrammi sia di niun significato in riguardo al fine inteso da Newton, si osservi, che l'ultima induzione si riduce a darci per identiche linee diverse e di diverso valore, ed a presentarci la mostruosa assurdissima idea, che la curva sia identica con la retta! Se tanta assurdità, non basta ad aprir gli occhi onde conoscere la sua impossibilità, o almeno l'inettezza dei metodi impiegati e costituenti la dimostrazione di questo secondo lemma, certamente, che ei ci conviene ritenere, che abbiasi smarrito il lume della ragione.

Per ultimo vediamo se ammesso l' infinito impiccolimento, il che è niente manco che ammettere l'impossibile, vediamo, dico, a quale risultamento conduca una sì fatta ipotesi. Egli è evidente che sino a tanto che i parallelogrammi diminuiti rimangono dell'ordine finito, sempre l'esterno poligono circoscritto è di diverso valore dell' inscritto, e la curva è diversa sempre dall'uno e dall'altro; e quando per concessa ipotesi la diminuzione fosse portata all'infinito, allora ci si presentano infinitesimi i parallelogrammi, però

sono ancora parallelogrammi, quindi quello che accade, e quello, che è vero dei parallelogrammi grandi, è sempre vero anco degli infinitesimi, fino a che non si riducano ad un punto solo; ma allora appunto quando tutte le linee ed i parallelogrammi son ridotti ad un punto solo, allora diciamolo francamente, non esistono nè rette, nè curve, nè parallelogrammi, ed allora è sfumata ogni nostra dimostrazione rigorosa perchè abbiam distrutto ogni parallelogrammo.

Particolarità che ben considerata dimostra anco l' assurdità del metodo impiegato, considerato in relazione al fine cui si indirigge.

Basti intanto questo poco; ritorniamo in su la via filosofica nella quale ci siamo posti, e proseguiamo il filo di altri pensamenti di Newton relativi a queste sue dottrine.

Alla pag. 37 e 38 della medesima opera egli ci dice: = Præmisi vero hæc lemmata ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes more veterum geometrarum ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et propterea methodus illa minus geometrica censetur, malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes, primasque nascentium, idest, ad limites summarum et rationum deducere; et propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; et principiis demonstratis, jam tutius utemur.

Proinde in sequentibus, si quando quantitates tamquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas, nolim indivisibilia, sed evanescentia indivisibilia, non summas et rationes partium determinatarum, sed summarum et rationum limites semper intelligi.

Vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocavi.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed et eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, ante quam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse.

Et responsio facilis est: per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur, neque ante quam attingit locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit: idest, illam ipsam velocitatem qua cum corpus attingit locum ultimum, et qua cum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non ante quam evanescant, non postea, sed qua cum evanescunt. Pariter et ratio prima nascentium, est ratio qua cum nascuntur. Et summa prima et ultima, est qua cum esse (vel augeri aut minui) incipiunt et cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et propritionum omnium incipientium et cessantium. Cumque hic limes sit certus et definitus, problema est vere geometricum eundem determinare.

Geometrica vero omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur et ultimæ magnitudines: et sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam Euclides de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum demonstravit. Verum hæc objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates

evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; et quas propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, numquam vero transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum.

Rem clarius intelligetur in infinite magnis; si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ, quarum ista est ratio.

In sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes vel ultimas; cave, intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper determinandas sine limite. =

277. Ho creduto cosa ben fatta riportare per intiero questi suoi pensamenti perchè alla fine sono quelli sopra dei quali Newton fonda la sua principale filosofia intorno le cose matematiche, prescindendo in questo luogo delle sue opinioni relative alla scoperta della nuova analisi sublime, già per lo innanzi ricordata.

Quest'opera di Newton nella quale espone i suoi principii matematici della filosofia naturale è una delle più pregiate produzioni che abbia a noi lasciato questo grand'uomo. Sarebbesi creduto, che nel compilarla dovesse far uso della nuova sua analisi, ma qual che ne sia stato il suo pensiero, egli non si è che pochissimo e quasi mai servito dei principii della sua nuova scoperta, e, anco allora che lo ha fatto, appare, che non siasi a questi appigliato se non quando gli occorreva di impinguare, se così può dirsi, e render plausibili i principii antichi, sopra dei quali, come si vede, ha fondato ed elaborato quest'opera medesima.

Se fossimo interpellati a dire quello che ne pensiamo

circa questo suo contegno, diremmo che sebbene questo grand'uomo avesse ben compresa ed anco felicemente adoperata la dottrina degli infinitesimi, tuttavia non erasi forse abbattuto in formola di calcolo, a parer suo, abbastanza generale, che abbracciasse tutte le possibili applicazioni che si affacciavano alla vasta sua facoltà comprensiva.

Questo però sia detto in via di apparente verosimiglianza.

Venendo alle sue opinioni spiegate nei passi or ora arrecati, tentiamone una filosofica investigazione a fine specialmente di meglio chiarire quanto siam venuti esponendo intorno alla filosofia della matematica antica. Questo apparirà un passo incidentale e retrogrado, ma chi vorrà considerare, che avanti non poteva esser fatto perchè contiene delle cose attinenti intimamente alla nuova analisi, conoscerà che questa è una ragione che ci assolve da tutta questa apparente retrocessione.

Poi diremo ancora, che le riflessioni che addurremo serviranno a chiarire un'altra rilevante circostanza, quella cioè del poco conto che ha fatto Newton della sua nuova scoperta. Noi ci asterremo dal commentare e dal fare delle congetture sopra questa circostanza, perchè sarebbe un escire dal retto sentiero.

Da principio il grande inglese dichiara, che a questa sua opera fa precedere dei lemmi, de' quali i due principali e cardinali sono appunto quelli da noi qui innanzi riportati, e la ragione di aver fatto precedere alla sua opera questi lemmi, la ripone, nel poter con essi dimostrare tutte le proposizioni in essa contenute (tra le quali ve ne sono molte degli antichi) senza ricorrere alle lunghe e tediose dimostrazioni ricavate dall'assurdo.

Ma non ravvisandosi in questi suoi lemmi alcuna nuova idea, la quale li renda più rigorosi e facili di quelli degli antichi, anzi non presentando essi che la pura dottrina antica, non

si sa comprendere come egli abbiavi ravvisata tanta evidenza onde possa ritenersi dispensato dal ricorrere all'assurdo come sempre o quasi sempre in consimili casi si son tenuti in dovere di fare gli antichi, i quali quantunque acutissimi ragionatori, pure non seppero mai gridare al pieno convincimento ed al perfetto rigore senza il ricorso all' assurdo. Questo però sia detto in via storica; e per quello risguarda il merito dei lemmi riportati, lemmi che sono essi medesimi fondati sopra l'assurdo dal quale vuol prescindere, ognuno può comprenderne l' incongruenza.

277. Che poi il metodo (com' egli dice) degli indivisibili sia più breve, la è questa una confessione con la quale ravvisa in questo metodo una qualità, che gli doveva meritare la preferenza; e forse ciò è stato conosciuto dal nostro filosofo, che per isdebitarsi dal farne uso o dal far onore all'altrui dottrina, lo ha qualificato per metodo troppo duro e poco geometrico, e intanto esso era la stessa sua scoperta! A dire la verità dobbiam credere che un sì fatto modo di parlare non sia in armonia colla vastità dell'ingegno di Newton, e pare che abbia proprio piuttosto voluto disdegnare una filosofia italiana e nuova degli indivisibili, per abbracciarne una più vecchia e più magra di essa.

E tutto questo non senza qualche sentore di contraddizione; imperciocchè la sostanza del metodo degli indivisibili del Galilei consisteva nell'ammettere, li primi principii generatori delle grandezze come infinitamente piccoli, e per altra parte, nel considerare questi principii infinitamente piccoli come eguali a zero quando vengano comparati nel valore loro colla grandezza finita; ora tutta questa dottrina fu da Newton ben accolta e pienamente abbracciata ed adoperata nella sua nuova analisi sublime, e l'aver egli messo in piena luce, e l'aver adoperato con sagacità e perspicacia questa nuova dottrina si è meritato la gloria di inventore

del calcolo sublime. Dopo tutto ciò in questo passo lo vediamo qualificar per duro questo metodo degli indivisibili, e per poco matematico!

Forse alcuno farà osservare, che qui l'inglese per metodo degli indivisibili intendeva il metodo col quale Cavalieri aveva trattato la sua geometria, e non già quell' alta dottrina che insegnato aveva il gran Galilei, e che costituiva tutta la sostanza e tutto il fondo della dottrina della scoperta di Newton.

Ma, a chi la pensasse a questo modo diremo: e perchè dunque nel parlare del metodo degli indivisibili non dichiarava se era quello di Cavalieri, o quello più filosofico di Galilei? Nè a questo proposito si può credere, che il nostro inglese ignorasse le opere e le dottrine di Galilei, perchè esposte in opere meccaniche, e quindi in apparenza non rigorosamente matematiche, perchè Newton le aveva lette e studiate, e da esse si è servito nella sua grand'opera: *Principj matematici della filosofia naturale;* anzi la maggior parte di essa è tutta meccanica del Galilei, sebben sempre non abbia l'avvertenza di ricordarlo.

Più, se ciò non conducesse troppo apertamente fuor di luogo si farebbe quasi toccar con mano, come persino gli stessi due problemi (267) i quali sono la base della sua dottrina delle flussioni sieno tolti in quanto alla sostanza ambidue dalle dottrine del Galilei, e non esprimano che quelle. Per la qual cosa appare, come non si possa per verun conto salvarlo di sconvenienza di idee manifestata in questo passo con la nota di troppo dura data al metodo degli indivisibili, metodo che si deve dire in sostanza contenere e rappresentare la sua più grande scoperta.

278. Ma ritorniamo al nostro commento. Egli dunque soggiunge, che ama fondare le sue dimostrazioni sopra le somme e le ragioni delle ultime quantità evanescenti e delle prime

nascenti, cioè intende ridurre le sue proprie dimostrazioni ai limiti delle somme e delle ragioni, e tutto questo per renderle brevi e spedite. Indi soggiunge, che allo stesso fine si perviene col metodo degli indivisibili. Noi parleremo in seguito e con sufficiente larghezza di discorso del metodo dei limiti, e di quello delle evanescenti; quindi per ora ci permetteremo solo di farne un motto, e questo medesimo ristretto alle dottrine sopra delle quali egli si studia di render chiaro questo metodo delle evanescenze, e perchè queste dottrine esprimono i particolari pensamenti di Newton circa le evanescenti.

Egli adunque incomincia dall' invitare il lettore a ben considerare, che quando esso parla e considera le grandezze come composte e risultanti da minime particelle od elementi, come quando parlando della linea ne nomina le minime parti di questa chiamandole lineette elementari infinitesime, lo invita diciamo, a ben considerare, che non intende di additare gli indivisibili, ma gli indivisibili evanescenti, non le somme e le ragioni delle parti determinate ma i limiti delle ragioni delle parti determinate. A leggere questi pensamenti di Newton ci sentiamo naturalmente portati a farci la seguente dimanda: gli indivisibili, che poco anzi presentavano un metodo troppo duro, ed assai poco matematico, presenteranno essi un metodo più facile, ed assai più matematico, considerandoli adesso come indivisibili evanescenti? Poco anzi egli evitava di sostituire ad essi le prime ed ultime ragioni delle grandezze evanescenti, e qui fa sinonimi ad esse gli indivisibili, indi ai limiti delle prime ed ultime ragioni? Ora chi saprebbe in tutto questo suo dire rinvenire quella piena convenienza di idee che si addice ad una dottrina fondamentale quale è questa?

Indi passa a proporsi la difficoltà, che le ultime ragioni delle grandezze evanescenti, sono un nulla; poichè avanti che

svaniscano non sono l'ultime e dopo svanite, esse sono zero; e per egual motivo si può dire, che sia zero l'ultima velocità del corpo moventesi, quando il moto è spento, perchè avanti che il moto finisca non è l'ultima, finito che sia, è nulla. Poscia soggiunge, che la risposta è facile, perchè egli per velocità ultima v. g. intende quella con la quale il corpo si move, ma considarata non avanti, che il corpo cessi di moversi, nè dopo che esso è in quiete, ma quella con la quale tocca l'ultimo luogo ove si ferma, o con la quale finisce di muoversi. Come parimenti per ultima ragione delle grandezze evanescenti intende indicar quella che esse hanno non avanti di svanire, nè quella che hanno dopo svanite ma bensì quella che hanno quando svaniscono.

Esiste, dice egli, un limite, che la velocità può raggiungere, in su la fin del moto, ma non oltrepassare; questa è l' ultima velocità. La stessa ragione è quella del limite di tutte le quantità nascenti ed evanescenti. E questo limite essendo certo e determinato nè conseguita, esser problema veramente geometrico il determinarlo.

Noi per intendere alla meglio che possiamo, questi suoi non molto chiari concetti, porteremo l'attenzione anco a quello che soggiunge: quando esistessero, prosegue egli proponendosi nuova difficoltà, queste ultime ragioni delle grandezze evanescenti, esisterebbero ancora le ultime grandezze, ed allora ognuna risulterebbe da un'indivisibile, contra la qual'ultima grandezza Euclide ha dato dimostrazione nel libro decimo parlando delle grandezze incommensurabili; ed a questa fa risposta come segue, dicendo cioè, che si appoggia a falsa ipotesi, perchè le ultime ragioni delle quantità evanescenti, realmente non sono ragioni delle quantità evanescenti, ma dei limiti ai quali le ragioni delle grandezze evanescenti e senza fine decrescenti si avvicinano e che non sanno raggiungere più da vicino di una certa data diffe-

renza, nè giammai oltrepassare, e nemmeno raggiungere prima di aver subito una diminuzione infinita.

E finalmente dopo tutte queste sue esplicazioni che certamente non son molto chiare nè concludenti, chiude l'esposizione delle sue dottrine soggiungendo: che tutto questo più apertamente si intende nelle grandezze infinitamente grandi, poichè proposte due grandezze, di data differenza, se queste si accrescono all'infinito, vi sarà un'ultima ragione, cioè una ragione di eguaglianza, eppure non esisteranno queste grandezze ultime e massime, delle quali questa ragione è propria.

279. Trattandosi di Newton, forse il primo geometra dell'Inghilterra, e trattandosi di un'opera, che giustamente ha menato grande rumore e ottenne fama di singolare, pare che non sarà riputata fatica inutile se cerchiamo di farne appieno comprendere le dottrine sopra delle quali l'ha fondata il suo autore, tanto più, che queste sue dottrine sono spesse volte appoggiate anco alle posizioni ed ai principii che reggono la scoperta del calcolo sublime.

Primamente siaci permesso di notare, che il lettore, dopo che avrà con attenzione lette e rilette queste dottrine or ora riportate con le stesse proprie parole dell'autore, se vorrà confessare la verità difficilmente avrà ben inteso quello che Newton intende dire, e quindi difficilmente ne sarà rimasto appieno convinto. In fatti venendo egli a riporre l'ultima velocità del moto in quell'istante che cessa, e non avanti, che cessi nè dopo, in questo si vede, che la ripone in un punto impercettibile, che l'animo nostro non sa appien comprendere nè ben rappresentarsi, perchè appare, che l'istante della cessazione del moto sia come un concetto quasi medio tra l'essere ed il non essere del moto, e così, un concetto pieno di oscurità e di difficoltà. Lo stesso ci accade di scorgere nel concetto, che ci somministra delle prime ragioni nascenti e delle ultime evanescenti.

L' esistenza poi del limite, cui la velocità decrescente si accosta e che appare secondo lui, possa raggiungere ma non oltrepassare, anco questa è una nozione più oscura ancora; perchè decrescendo la velocità si avvicina alla propria consunzione, o allo zero velocità: ora ognun intende, come lo zero mal si presti all' idea di quantità limite di un altra quantità, atteso che nell'atto che una velocità diviene zero, questa velocità perde ogni suo valore, e con questo valore perde anco ogni ragione comparativa col limite.

In questo luogo egli destramente richiama la nostra attenzione sopra la nozione del limite, perchè s' accorge di aver tradotta la nostra considerazione sopra delle grandezze che cessano di essere; ma non s' è accorto, che questo limite non poteva esser altro fuorchè il solo zero ed uno zero limite, è un vero enigma.

Più l'idea di un limite collocato in fine di una diminuzione infinita, non è già un' idea, ma bensi un' ardita posizione o un ardito concetto inconcepibile, perchè la legge di decremento all' infinito è legge geometrica, e non può esser che legge geometrica, ed ogni legge geometrica esclude dimostrativamente ogni verace evanescenza, come sin qui si è dimostrato in questa filosofia; dunque, dove intende mai di collocare questo limite?

Finalmente diremo, che Newton medesimo sentiva queste difficoltà, appunto perchè ci trasporta in fondo alle diminuzioni infinite, ove mancando la grandezza, vorrebbe farci considerare l'esistenza del limite, mentre per necessità, come limite, manca anch'esso con la grandezza e quando per ipotesi si volesse ritenere la sussistenza di questo, che idea possiamo formarci di un limite esistente in fondo a infinite diminuzioni? Niun altra idea certamente se non quella di un limite oscurissimo, inconcepibile.

E che la faccenda presente si appalesasse assai oscura anco

alla mente di Newton lo si conosce dalla maniera con la quale egli chiude le sue dottrine: di fatti egli dice, che l'idea di questo limite ci si presenterà più chiara nelle grandezze infinitamente grandi; ma non bada, che l'infinito, o meglio, la nozione dell'infinito è per noi sempre una nozione incomprensibile, perciò oscura ed al tutto inetta a schiarire le idee; di fatti egli ci propone da considerare due grandezze diverse o disuguali per supporre che queste aumentino sino all'infinito, ed in forza di questo loro ipotetico aumento, ne ricava, che vi sarà di esse un' ultima ragione, ragione di eguaglianza; e intanto concede, che non vi saranno queste due grandezze infinite delle quali esiste questa ragione. Ora non ci vuole grande penetrazione per comprendere, come di sua natura sia questo un metodo all' in tutto inetto a rischiarare le idee, anzi solo idoneo ad ingenerare la più grande oscurità.

Tale oscurità scorgesi anco per questa considerazione, cioè, che se le due grandezze disuguali crescano per aumenti ambidue eguali sino all' infinito, allora la loro differenza rimane intiera anco sino all' infinito aumento; il che manda in fumo tutto il ragionamento di Newton. Nè si può considerare questa ipotesi come opposta al concetto di aumento proposto da questo geometra, perchè egli annuncia lo aumento in modo indeterminato, perciò in modo che abbraccia pienamente questo nostro ipotetico aumento.

Poi, come si può concepire un'idea chiara della ragione eguale delle grandezze aumentate all'infinito, intanto che non si danno, come egli dice, queste grandezze infinite?

280. Nel § 276 abbiam detto, che la dimostrazione che Newton tenta dare al suo primo lemma si risolve in petizion di principio, ora a schiarimento di questa nostra asserzione sianci permesse le seguenti considerazioni:

Nel lemma si suppone, che le grandezze e le loro

ragioni in un tempo finito si accostino all' eguaglianza, e sino al punto, che la differenza sia minor di ogni data.

Questo lemma è sì positivo ed in modo sì schietto annunciato, che alla di lui supposta posizione niun dubbio vi può essere; ma l'inglese facendo, come ha veduto fare tutti gli altri, suppone che alcuno nè possa dubitare, quindi soggiunge, se tu neghi la verità di questo lemma, fa caso che l'ultima differenza sia finita ed espressa per D.

Ora siccome la D si suppone l' ultima, e questa per esser finita mostrerebbe non esser consunta la differenza, in allora le due proposte grandezze non potrebbero più avvicinarsi all'eguaglianza in modo da poter rendere la D minor di ogni data, ma nel lemma si è supposto che si riduca alla minor di ogni data, dunque tu parli contro l'ipotesi.

Qui prima osserviamo, che la difficoltà che si propone, è poco consentanea al vero rigor di ragionamento, perchè niuno in buona logica può opporsi ad una proposizione ipotetica, quando questa non sia una assurdità nei termini, ripugnanza, che pare qui non abbia luogo; supporre adunque, che l'ultimo residuo della differenza delle due proposte grandezze, riescir possa di valor finito, è supposizione distruggente l' altra ritenuta nel lemma; ora il chiamare questa seconda posizione assurda, perchè distrugge la posizione del lemma, è tal petizion di principio, che quasi sente del peurile. Di due proposizioni escludentisi una sola è la vera, o dunque quella del lemma è vera, e necessariamente è falsa l' altra; la prima era ipotesi, la seconda ipotesi; se la prima è evidente per sè, esclude la seconda perchè opposta, ma se la prima non è evidente per sè, non si può dire che escluda la seconda; dunque o conviene arrecar dimostrazione, che la prima sia evidente o diversamente ritenerla ipoteticamente evidente per escluder la seconda. La dimostrazione della prima manca;

dunque per sola ipotesi si considera assurda la seconda per la ragione che sia opposta alla prima ; eccoti che sempre siamo in una precisa petizione di principio, e petizion di principio tanto aperta, che solo una mente disattenta può ammettere.

Tale è il fondamento del primo lemma, e tale è quella specie di apparente dimostrazione che lo sostiene, e che veste l'aspetto di confermarne la evidenza.

Le Seur e Jacquier che hanno fatto un luminoso e lodatissimo commento a tutta l' opera di Newton della quale parliamo, non hanno detto parola del primo lemma, sia che essi ne fossero pienamente convinti, sia che non abbiano voluto rivocar in dubbio il fondamento principale di quest'opera.

Essi si sono permessi solamente alcuni schiarimenti al secondo lemma, i quali si leggono nella pag. 63 tom. 1. 1760, tipi Fhilibera in Narbona. Ma nel loro commento si sono limitati a svolgere unicamente l'idea di Newton inchiudente la compenetrazione delle linee costituenti i diversi parallelogrammi, ed il commento fatto a quest' ultimo passo è più presto una semplice inconcludente ripetizione, che altro, e pare anzi, che questo sia ad essi servito solo di occasione per esporre estesamente la dottrina delle *flussioni* e delle *fluenti* che abbiamo già ricordata.

281. Wallis, altro grande geometra inglese, ha ammesso e fatto uso del lemma di Newton avanti quest'ultimo. Anzi da esso pare a prima giunta annunciato con maggior circospezione, perchè Wallis lo dà in questi termini: = Magnitudines quarum differentia probatur minor quavis assegnabili, æquales esse; quippe si inæquales poterit eorum differentia, quantumvis exigua sic multiplicari, ut utramvis superet, sin ita non possit, nulla est. = Questo lemma vallisiano per varii riguardi è diverso dal newtoniano, perchè sebbene

ipotetico all' in tutto, dice: cujus differentia probatur minor quavis data. Inoltre Wallis non ricorre alle infinite diminuzioni, ma invece si appiglia alle indefinite moltiplicazioni dell'ultimo residuo per appoggiare anch'egli questa specie di dimostrazione dedotta dall'assurdo; ed in ciò fare si dimostra manco consentaneo a sè stesso di Newton, perchè aveva ammesso nel lemma: = cujus differentia probatur minor, etc. =. Dal che si comprende, che nel suo lemma si deve dimostrare questo stato della riduzione della differenza finita ridotta a minor di ogni assegnabile, quindi appare apertamente che esigendo questa prova, riuscisse pienamente inutile questo argomento indiretto, il quale risolvesi in petizione di principio, in quanto che ha di mira di far comprendere, che la differenza è nulla, quando moltiplicata che sia, non presenta un valor maggiore delle date o proposte disuguali grandezze.

282. E giacchè il nostro ragionamento ci ha condotti in sull'esame di questo celebre lemma, comune a quasi tutti gli antichi geometri, ci sia permessa anco la seguente considerazione. I principii, sinchè sono ipotetici, non sono applicabili a veruna concreta dimostrazione, perchè ogni dimostrazione concreta ha bisogno dell'avveramento concreto del principio ipotetico, acciò le induzioni, che se ne inferiscono non siano ipotetiche ma reali: ora nessuno ha mai presentata la verificazione concreta reale del lemma in verun caso, giacchè queste tentate dimostrazioni dall'assurdo sono inconcludenti; dunque tutto il fondo di questi principii o lemmi, risolvesi in una bellissima dottrina ipotetica, che rigorosamente parlando non può servire a perfetta dimostrazione di veruna proposizione concreta.

283. Parimenti non sapremmo fare buon viso al pensamento newtoniano, di sostituire cioè alle ragioni delle grandezze evanescenti le ragioni dei loro limiti, e alle gran-

dezze indefinitamente grandi quelle dell' infinito cui si accostano. Primo, perchè questa sostituzione non rischiara per verun conto la via oscura, che si percorre nel considerare le ragioni delle grandezze evanescenti, nè la via che percorrono le grandezze accostantesi all' infinità, trovandosi sempre l'animo nell'uno e nell'altro caso davanti a incomprensibili e poco chiare idee; secondo allo svanire delle grandezze, svanisce con loro ogni ragione, che avevano, e che hanno anco nell' atto di svanire, perchè quest' atto sinchè si può ritener atto, presuppone le grandezze non svanite, ed il pensamento di considerarlo in quell' istante, per così dire, che l' essere quantitativo si trasmuta in niente è pensamento, che non somministra nessuna chiara idea perchè è un istante impercettibile, inassegnabile. Finalmente perchè alla nozione dello zero mal s' addice la nozione del limite, come pure mal s'addice alle grandezze crescenti quella del limite infinito.

284. Forse replicherà alcuno che questi limiti esistono, benchè non esistano più le grandezze loro approssimate. Ma preghiamo quegli qualunque sia che la pensasse a questo modo di considerare, che nella presupposta sussistenza di questi limiti non si fa alcun guadagno (diciamo presupposta perchè lo zero non ha mai esistito, e perchè non può esser limite di qualsivoglia quantità o stato della quantità, come pure lo infinito quantitativo, non ha mai effettivamente esistito, e dicesi quantitativo perchè altrimenti sarebbe grandezza eterogenea alla quantità e quindi impossibilitato a servire di limite alla medesima); dalle quali cose si vede, che o la ragione della grandezza si conosce prima dell'evanescenza, e ciò con rigore o per approssimazione, e quindi è inutile ricorrere al limite, o non si conosce, ed allora i limiti sono egualmente inutili. Che poi la grandezza nell'atto dello svanire presenti una ragione ultima, questo è concetto illuso-

rio, perchè tra l'essere ed il non essere non esiste cosa di mezzo, nè istante nè momento che la indichi; e tra l'essere ed il non essere avvi sempre distanza o differenza infinita, se può dirsi così; quindi un'istante, che segni questo punto è un concetto inamissibile. Questo è il guadagno che si fa coll'appigliarsi a tali sutterfugi.

285. Ma siccome generalmente i geometri sono assuefatti a considerare lo zero come il vero limite delle grandezze, che per qualche operazione algoritmica tendono alla loro consunzione, perciò in ossequio di questa quasi universale opinione ci conviene aggiungere qualche prova in appoggio della nostra opinione, che lo zero cioè, non si possa considerare come limite delle quantità decrescenti, e che col loro decrescere si accostino alla rispettiva loro consunzione. Primamente adunque osserviamo, quanta sconvenienza di idee regni tra l'essere ed il non essere, perciò quanta se ne presenti quando all'essere diminuentesi vogliamo assegnargli per limite lo zero, o il non essere. Ogni nozione di limite presuppone la esistenza di due grandezze diverse, una delle quali rimane costante, e l'altra di valor diverso e che si avvicina alla prima variando in più od in meno. Ora nel caso presente non può essere che pensamento strano quello di sostituire alla grandezza la nullità di essa. Questa osservazione basta essa sola a far comprendere, come sempre sia ardita e strana la ipotesi dello zero limite.

286. La similitudine che arreca in mezzo Newton a fine di render comprovato, come sia lecito sostituire le ragioni dei limiti a quelle delle grandezze, è per sè stessa inconcludente per non chiamarla assurda; di fatti egli suppone delle grandezze finite e diverse fra di loro nel reciproco valore, ambedue queste grandezze si fanno crescere all'infinito (ipotesi certamente assurda, considerata a rigor di ragione) senza dire mai che una cresca più dell'altra, o se egualmente nei

loro aumenti, che sono richiesti per divenire infinite; questo silenzio lascia diritto di pensare, che possano crescere anco egualmente, ed in tal caso, mantenersi in tutte i loro aumenti sempre egualmente differenti; quindi pervenute che siano, per insigne ipotesi, ad esser ambe infinite, per qual ragione chiara ed evidente si appalesa all' animo nostro la loro identità? Si dirà forse che pervenute allo stato di infinita grandezza e divenute ambedue infinite, a questo stato di infinita grandezza ripugna una tal differenza? Ma Newton non può pensare a questo modo, e perchè parlando degli angoli, che fa la trocoide con una retta, comparati a quelli, che i circoli fanno con la medesima retta trova gli uni infinitamente maggiori degli altri, perciò l' idea che le grandezze all'infinito siano tutte eguali, è dottrina che a lui non s'addice, perchè anco nello stato infinito non ammette sempre ragioni d'eguaglianza, come egli confessa altrove; più egli protesta dopo l'augeantur in infinitum, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ, seu maxime quarum ista est ratio =.

Riguardo poi alla sostanza dell' ultima inchiesta noi crediamo, che questa eguaglianza delle diverse grandezze desunta dall'infinito loro aumento, non sia cosa per verun modo nè chiara nè aperta, e molto meno che sia evidente e dimostrativa come dovrebbe essere trattandosi di dottrine prime fondamentali.

287. Ma non occupiamoci più a lungo circa queste dottrine del grande Newton; il principal motivo pel quale si sono qui ricordate è quello di far conoscere, come egli scorgeva in tutti questi metodi degli antichi cioè delle evanescenti, delle prime ed ultime ragioni dei limiti, per lo meno un' evidenza eguale a quella che ravvisava nel metodo delle flussioni o delle quantità infinitamente piccole. Da quello che diremo in progresso di quest' opera e rela-

tivamente a questi metodi quivi ricordati si scorgerà, se e quanto siasi egli illuso su la preferenza di questi metodi.

288. Ritornando allo scopo principale, alla scoperta cioè del calcolo infinitesimale fatta da Newton, diremo, che il principio unico, che ve lo ha guidato, è il gran principio delle quantità infinitamente piccole, non che quello, che la infinitesima parte si possa aver per zero posta che sia in confronto con la quantità finita. Coll' ajuto di questi principii ambidue messi in piena luce dal nostro Galilei, si è trovato al caso di fare la sua sublime scoperta, e di risolvere una quantità di nuovi problemi sino al suo tempo insoluti. Egli denominò questa sua scoperta sotto il nome di *flussioni* e di *fluenti*.

289. Leibnitz per parte sua studiando intentamente sopra le serie procedenti all' infinito, fornito com'era di profonda filosofia comune, conobbe con la singolare e straordinaria perspicacia del suo ingegno tutta l' importanza delle dottrine dei geometri che lo avevano preceduto, o che erano suoi contemporanei, e segnatamente meditando sopra il concetto di Galilei, cioè del suo indivisibile, che poi era una grandezza infinitamente piccola, e comprendendo anco come questo indivisibile si poteva aver per zero in comparazione di ogni grandezza finita, non esclusa quella grandezza della quale si immaginava che questo indivisibile ne esprimesse una delle supreme sue particelle, si creò il sistema delle differenziali e del loro trattamento che appellar si può un sistema ben ordinato di analitiche e geometriche indagini.

Questo sistema consiste nella sublime speculazione soggettiva in forza della quale si considera ogni grandezza come risultante o formata da una quantità infinita di grandezze infinitesime, ciascuna delle quali si può aver per zero in comparazione o a petto della grandezza principale di cui n' è come uno degli infinitesimi generatori. Di qui ebbe

origine il famoso principio, detto principio del calcolo differenziale, il quale consiste appunto in questa memorabile sentenza: due grandezze le quali non differiscono tra di loro che di una quantità infinitesima, queste sono eguali. Principio italiano, da Galilei enunciato come segue: due grandezze finite le quali non differiscono tra di loro che di un'indivisibile, queste sono eguali fra loro.

Pervenuto a questo punto coi suoi pensieri, conobbe che si poteva con la forza del nostro intendimento attribuire le proprietà di ogni grandezza alle loro variazioni ideali infinitesime e quindi coll'ajuto di queste, quali parti aventi le proprietà e leggi del tutto, estendere con questa ipotesi mirabilmente tutte le proprietà della grandezza e di ogni funzione di essa, segnatamente allora che si presenta in complicate funzioni.

Così veniva creando il calcolo delle differenziali (giacchè così egli credette di chiamare gl' indivisibili) o infinitesime parti; il qual calcolo consisteva nel considerar tutte le grandezze e specialmente quelle espresse in forma analitica, come grandezze composte di infinite differenziali, e nell' attribuire cogli usati segni del più e del meno delle variazioni differenziali a queste grandezze medesime, e le variazioni benchè riuscissero ipotetiche e soggettive, tuttavia presentavano le espressioni analitiche, sotto qualsivoglia forma o maniera di funzioni più sviluppate, e specialmente introducevano nello sviluppamento delle serie delle condizioni al tutto nuove e feconde di altissimi risultamenti.

E nel ponderare con veduta veramente filosofica queste infinitesime parti ideali, conosceva anco apertamente, che le grandezze, considerate quasi fossero il cumulo di queste infinite infinitesime parti, conosceva, dico, apertamente, che in queste infinitesime sussisteva tutta intiera la proprietà del continuo, e che quindi era proprio necessità al nostro intendimento di ritenere queste infinitesime della grandezza

finita, come esse pure infinitamente divisibili, o meglio, come risultanti da una infinità di parti infinitesime di un ordine secondo di infinitesime, e queste infinitesime di secondo ordine, come composte da una infinità di infinitesime parti di terzo ordine, e così prosiegui senza fine. E questa maniera di comprendere e di idearsi questi diversi ordini delle infinitesime parti di tutti gli ordini e senza fine crescenti, la mente di Leibnitz la fondava sopra la considerazione filosofica del continuo, la quale rimaneva intatta nelle grandezze in qualunque stato esse fossero; per il chè, si può dire, che questo infinito campo di tutti gli ordini di infinitesimi fu scoperto appieno la prima volta dal grande filosofo di Lipsia, e non da verun altro, benchè ne avessero già prima fatto cenno i Pitagorici; perchè niun altro n' ha veduta e compiutamente conosciuta la filosofica deduzione, che egli ne dà.

Newton, come abbiamo detto, parlando della trocoide fu quasi indirettamente condotto a vedere, che si davano degli angoli, gli uni infinitamente maggiori degli altri, ma questa grandiosa verità fu come un lampo, che non bastò a rischiarare la mente di questo filosofo sopra di una tale sublime concezione intellettuale.

Leibnitz abbraciando il gran concetto di Galilei della grandezza infinitamente piccola, lo indicava con la laconica espressione analitica di una d; intendendo con questa lettera esprimere la differenziale, o la infinitesima parte ideale di ogni grandezza. Quindi in forza di questa sua espressione laconica, quando si trattava v. g. di esprimere la infinitesima parte o la differenziale di x, egli scriveva dx; se trattavasi di y, scriveva dy, ecc. Se voleva esprimere la differenziale seconda o la infinitesima di secondo ordine scriveva ddx ovvero d^2x, se la terza dddx, o d^3x. ec. ec.

290. A questo modo Leibnitz veniva fondando queste

sublimi soggettive speculazioni sopra una profonda astrattissima filosofia, mentre Newton con la nozione delle sue flussioni presentava i medesimi concetti ma come involti nelle idee e nozioni meccaniche, le quali velavano in certo modo alcun poco la sublimità de'suoi pensamenti.

Tanto nella mente di Leibnitz aveva vantaggiato la nozione dell'infinitamente piccola grandezza, per la prima volta dichiaratamente ideata da Galilei. Pure, sebbene questo grandissimo filosofo e geometra della Germania, fosse entrato quasi da conquistatore nel mondo degli infinitesimi, estendendo questi medesimi ordini di infinitesimi succedentisi uno all'altro sino al prodigio, dell'infinito dell' infinito, e avesse ridotto a forma generale astratta e suggettiva anco il principio di Galilei, trasmutato in principio da lui appellato del calcolo differenziale, pure lascia luogo a dubitare, che in onta della sua grandissima perspicacia con la quale era sì innanzi penetrato nel campo dell'infinito, tuttavia non avesse sotto tutti gli aspetti ideali filosofici ben addentro pienamente compresa l' alta importanza del significato della grandezza infinitamente piccola; cioè che non avesse ben ponderata la dimostrazione di Galilei, il quale aveva per quanto è concesso di intendere alla mente umana, chiaramente fatto conoscere, che l'infinitamente piccola grandezza era incapace ad alterare in più o in meno lo stato finito della quantità; imperciocchè quando avesse profondamente conosciuta questa dottrina italiana, non si sarebbe ammutolito come vedremo, che ha fatto, quando a lui si facevano difficoltà risguardanti l'omissione o la trascuranza delle grandezze infinitamente piccole comparativamente alle finite.

291. Intanto proseguiamo la esposizione dei principi di Leibnitz; e qui sia notato, che egli ebbe la sagacità di supporre pienamente in via ideale soggettiva la infinitesima parte o la sua differenziale dx, giacchè solo in via ipotetica

si suppone la grandezza come costituita o ingenerata da questa infinità di elementi infinitesimi. Ed in ciò fare il filosofo di Lipsia si dimostrò fornito di sagacissimo e profondo intendimento, perchè diede a divedere, che comprendeva assai chiaramente, che i mezzi delle serie o delle infinite diminuzioni proposte ed imaginate dai geometri non arrivavano a dimostrare questa infinità di elementi infinitesimi; come pure queste loro ideate diminuzioni e divisioni non giungevano nemmeno alla indeterminata grandezza minor di ogni data, e non somministravano chiare nozioni delle prime nascenti grandezze, nè delle ultime morienti, o evanescenti, ecc. ecc.

292. Se dunque Leibnitz saggiamente supponeva intieramente la sua differenziale dx, o la sua grandezza infinitamente piccola, faceva nè più nè manco di quanto aveva veduto doversi alla fine fare da tutti gli altri geometri, che lo avevano preceduto. Solamente che adoperando a questo modo veniva evitando tutte le inette e viziose vie, battute da quelli che cercarono rinvenirla e determinarla. Più dobbiamo vedere, che questa posizione razionale ideale della infinitesima parte delle grandezze finite, lo poneva in su la via di considerare idealmente, come risolubile, anco la sua differenziale in infinite altre infinitesime parti, le quali poi, in relazione alla grandezza finita, riuscivano parti infinitesime di secondo ordine. Così si dica della ideale nozione di quelle infinitesime di terzo, di quarto ordine, ecc. sino all' insigne ipotesi arditissima di tutti gli più elevati ordini possibili.

293. Prima di più inoltrarci in questo campo, più che infinito, che abbraccia queste elevatissime dottrine, fermiamoci per un momento, a considerare come la dottrina primitiva degli infinitesimi fosse tutta di ragione della filosofia italiana e propriamente di Galilei.

Dal sin qui detto, ciò appare tanto apertamente di mo-

strato, che si può avere per inutile una nuova insistenza su questa cosa; tuttavia a meglio restarne convinti riferiamo ciò che ne dice lo stesso Leibnitz negli Atti di Lipsia del 1688, e precisamente in un suo discorso inserito in questi atti medesimi, il quale ha per titolo : = De geometria recondita, et analysis indivisibilium atque infinitorum =: Dal solo istesso annunciato di questo suo ragionamento si ravvisa a chiare note l' origine italiana del suo calcolo degli infinitesimi e degli infiniti. E se questo ancor non bastasse a rendercene appieno convinti, si porti di grazia la nostra attenzione a quanto ne aveva già scritto negli Atti medesimi di Lipsia degli anni 1684, pag. 226, del mese di maggio, a pag. 270, 271 e pag. 297 del mese di ottobre, ove confessa aver rinvenute le basi e le dottrine de'suoi pensamenti intorno al suo calcolo differenziale in altri grandi geometri che lo hanno preceduto, e tra questi il primo nominato è il Galilei; ecco le sue parole: = Quod superest ne nimium mihi adscribere, aut aliis detrahere videar, paucis dicam, quod potissimum insignibus nostri seculi mathematicis in hoc geometriæ genere mea sententia debeatur. Primi Galileus, et Cavalerius involutissimas cononis et Archimedis artes detegere ceperunt, sed geometria indivisibilium Cavalerianæ scientiæ renascentis, non nisi infantia fuit =. Di poi alla pag. 245 dell'anno 1686, ritorna sopra questi suoi pensamenti, e scrive: = Scilicet meum calculum indefinite parvorum, quem et differentialem, et summatorium, aut tetragonisticum, et ni fallor satis apte analysin indivisibilium; et infinitorum voco =.

Da queste solenni dichiarazioni fatte dal sommo geometra di Lipsia, si conosce, che egli ricavato aveva la base della sua scoperta specialmente da Galilei, ed in parte da Cavalieri, ma dall'ultimo quasi come da idea bambina.

Per quello concerne le basi della grande scoperta del

calcolo sublime si conosce da quanto sin' ora si è detto, che per la massima parte le idee filosofiche che precipuamente e dichiaratamente l' hanno preparata sono quelle di Galilei, il quale ha presentato operazioni di calcolo differenziale e di calcolo integrale, le quali tradotte in analisi e vestite a formole analitiche formerebbero parte rilevante di questi calcoli. Veggansi i num. 143 e 147.

194. In quanto a Galilei abbiam già detto, che egli aveva preparate tutte le basi, e fatto razionalmente e praticamente uso di esse, in tutto quello che concerne il calcolo differenziale ed integrale.

Cavalieri aveva imitato, o meglio, per parte sua aveva insegnato, che con la somma degli indivisibili si ricomponeva la grandezza finita; il che era lo stesso, per parte sua, che presentare una verace integrazione, la quale costituiva parte importantissima del calcolo sublime. Si deve però rimarcare una sostanziale differenza che passa tra i pensamenti di Galilei, e quelli del Cavalieri, sopra di questo oggetto; cioè che le dottrine del primo presentavano decisamente le parti infinitesime, e perciò nelle pratiche e teoriche operazioni intellettuali di Galilei, erano le basi, e le dottrine ed i concreti ragionamenti del calcolo sublime, mentre negli indivisibili cavalierani non erano precisamente le infinitesime, ma solo le indefinitamente piccole parti; onde in vista di questo, anco Leibnitz scriveva che la dottrina adoperata dal Cavalieri nella sua geometria non fu che l'infanzia della scienza rinascente, alludendo al calcolo superiore o infinitesimale.

295. Ritornando però a Leibnitz, convien dire, che sebbene profondo conoscitore della filosofia comune, e quantunque avesse generalizzati e con mirabile forza d'ingegno estese queste dottrine e questi sublimi concetti italiani, anzi li avesse alla filosofia razionale geometricamente ed analiticamente incorporati, tuttavia appare, che a tanta scoperta

fosse pervenuto adoperando i principii di cui si è parlato; ma che profondamente non avesse studiate le opere di Galilei, perchè allorquando si trovò assediato da difficoltà che alcuni promovevano contro il principio del calcolo differenziale, principio tutto di Galilei, principio già combattuto, in faccia di Galilei e principio già dal nostro italiano difeso e sostenuto, quando diciamo, egli si vidde attorniato da queste difficoltà, allora si comportò in modo da lasciar luogo a credere, che non ne avesse abbastanza ponderata l'altissima importanza di esso. In fatti quando si disse a lui, che il suo principio mancava di rigorosa esattezza matematica, perchè con esso si trascurano le infinitesime parti della grandezza, egli ebbe la bassezza di far osservare, che le dottrine del suo principio si potevano facilmente trasmutare e ridurre a quelle degli antichi, comunemente ricevute per rigorose ed esattissime, quali appunto erano le minori di tutte le date, le prime ed ultime ragioni, ecc. ecc.

Veggansi gli Atti di Lipsia, tom. 2 pag. 106. Ora egli diceva, in tutti questi antichi metodi si trascurano delle grandezze minime, e sostanzialmente consimili alle infinitesime. Intanto con questi meschini sotterfugii, chiudeva la bocca agli avversarii.

Perciò l'essersi comportato a questo modo in questa particolare circostanza lascia luogo a credere, o che disconoscesse l'alta importanza della sublime sua filosofia, o più probabilmente, che così facesse per torsi d'impaccio, ed indirettamente riversare sopra de' suoi avversari le frecce che verso lui essi scagliavano.

296. Ad ogni modo però, se Leibnitz si fosse abbattuto a leggere quelle opere di Galilei che trattano di due scienze nuove attinenti alle meccaniche, avrebbe in esse rinvenuto la dottrina sufficiente a rispondere, od almeno ad attutire tutte queste difficoltà. Imperciocchè il nostro fiorentino aveva

dimostrato ed in maniera assai soddisfacente, che la infinitesima parte, o il suo indivisibile posto a petto della grandezza finita (la quale razionalmente si riteneva, come un aggregato infinito di indivisibili), non può menomamente alterare il di lei valore finito, nè in più nè in meno coll'aggiunta che venga fatta di esso indivisibile, nè con sottrazione del medesimo (289).

Ma ritornando al principale oggetto della scoperta del calcolo superiore fatta da Leibnitz osserveremo, che le dottrine anteriori davano l' infinitesima parte razionale, davano il principio del calcolo differenziale, davano felicissime e bellissime applicazioni, ma tuttavia prima che queste preziose cognizioni capitassero nella sua vastissima mente, esse non erano ridotte a sistema, a dottrina generale astratta, e quindi mancavano di quella attitudine che presero in mano sua, per la quale si riconobbero capaci di esser applicate a tutte indistintamente le grandezze geometriche, algoritmiche, e con qualsivoglia forma analitica espresse.

297. Intanto le nuove dottrine di Leibnitz e per la loro semplicità e per la filosofica astrazione, non che per la singolare loro brevità e concisione crescevano in alta estimazoine e si diffondevano celeramente su tutto il continente, e dai fratelli Bernoulli e da altri venivano adoperate e promosse. Queste dottrine benchè nel principio del calcolo qui poc'anzi ricordato, venissero contradette, e benchè nè Leibnitz, nè verun altro sapessero interamente stabilire e giustificarne le basi come rigorose e pienamente giuste, tuttavia si ritenevano dall'universale dei dotti, e la loro aggiustatezza si desumeva da questa considerazione, che il nuovo calcolo differenziale leibniziano conduceva a' risultamenti esatti, e questi risultamenti si dichiararono esatti, perchè quando questo calcolo si adoperava a dimostrare le più aperte verità geometriche sostenute da evidenti dimostrazioni.

trattate col nuovo calcolo, si ottenevano le stesse evidenti ed identiche verità.

Intanto osserveremo, che con queste nuove dottrine e con questi nuovi calcoli che le esprimevano, si consideravano le grandezze tutte indistintamente come idealmente risultanti da infinite infinitesime parti, e si attribuivano a tutte le funzioni analitiche e geometriche delle variazioni le quali consistevano nel considerare, che nelle loro parti variabili provassero cangiamenti in più o in meno di alcuna di queste infinitesime parti ideali, circostanza che era feconda d'indescrivibili vantaggi, come sarà fatto palese in seguito; perchè non sperati nelle scienze matematiche. Tali presso a poco erano le dottrine che formate si erano intorno alla grandiosa scoperta del calcolo sublime dai due grandi geometri inventori, Newton e Leibnitz. Dal fin qui accennato ognuno può di leggieri comprendere, per quali fasi sia passata l'idea dell'infinito e dell'infinitesimo prima di arrivare al pieno di lei splendore pel quale poi si guadagnò l'assenso dei geometri; ognuno può comprendere, come il principio e tutto il fondo principale di questa grandiosa e sublime idea sia di origine Italiana.

298. Il partito di coloro che trovavano difettose le dottrine della nuova scoperta infinitesimale, non si dava per vinto dalle ragioni comprovanti l'esattezza di esse; perciò continuava a rinfacciare alla generale dei geometri quel manco di filosofia che credeva scorgere in queste dottrine, e che in sostanza riducevasi tutto nel dichiarare inesatte le dottrine in discorso, perchè fondavansi sul principio che due grandezze sono eguali quando non differiscono tra di loro se non che di una quantità infinitamente piccola.

Tra que' filosofi che la pensavano a questo modo trovavasi anco il celebre geometra francese D'Alembert. Egli

sebbene ritenesse le espressioni delle differenziali leibnitziane come semplicissime e ripiene di eleganza, si studiò sostituire una nuova filosofia o una nuova dottrina alla leibnitziana, riputando in suo animo che questa sua dottrina fosse rigorosa ed evidentissima. E la sua nuova dottrina era poi quella antica inventata da Archimede, e conosciuta sotto il nome di *metodo dei limiti;* la quale veniva ritenuta generalmente come rigorosissima anco dagli oppositori del calcolo differenziale.

Il fine principale che si proponeva questo grande geometra era quello di evitare tutte le difficoltà e di rischiarare tutte le dubitazioni che venivano messe in campo per escludere dalle matematiche le grandezze infinitamente piccole ed il loro uso, e così ricondurle nel campo del pieno rigore geometrico, rigore che egli credeva di scorgere nel metodo dei limiti.

Questo tentativo risguardato dal fine che intendeva conseguire, merita lode non poca, ma considerato sotto il vero aspetto del merito filosofico, lo appalesa un tentativo non solo inutile ma mal riuscito; perchè noi riteniamo, e renderemo anco dimostrativo questo nostro parere, che se d'Alembert avesse ben addentro meditato attentamente il metodo antico dei limiti al quale non solo si gettava in braccio, ma che intendeva anco anteporre al metodo leibnitziano, certamente che vi avrebbe ravvisato per entro un procedimento manchevole e meno evidente di quello che si ritrova nel metodo di Leibnitz. Più si sarebbe avveduto, che era metodo nel quale spesso si faceva uso dell'ideale e del concreto promiscuamente, il che è equivoco non piccolo.

299. Intanto esponiamo le dottrine di D'Alembert. Il metodo dei limiti considerato dal lato della dottrina che esso contiene si appoggia alle seguenti due razionali proposizioni.

Due grandezze le quali siano limiti di una stessa gradezza sono eguali tra loro.

Due grandezze che crescono o decrescono continuamente, conservando tra di loro la stessa ragione invariabile, questa ragione sarà quella dei limiti delle due grandezze.

Ma per rimuovere ogni dubitazione circa l'esattezza che si deve avere nel riferire il metodo dei limiti quale viene esposto da D'Alembert, riportiamo quanto egli ne dice nell'*Enciclopedia Metodica* e prima esponiamo la dottrina dell'Ab. de la Chapelle, Articolo *Limite*. = Si dice che una grandezza è il *limite* di un'altra grandezza quando la seconda può avvicinarsi alla prima più da vicino di qualsivoglia grandezza data, per quanto tenue se la possa supporre, senza che però la grandezza che si approssima possa giammai sorpassare l'altra grandezza cui si avvicina; in modo che la differenza di una sì fatta quantità al suo limite riesca assolutamente inassegnabile.

Per esempio (continua egli) supponiamo due poligoni, l'uno inscritto e l'altro circoscritto ad un circolo; egli è cosa evidente che si potranno moltiplicare quanto piaccia, i lati di questi poligoni, ed in questo caso ognuno dei due poligoni si avvicinerà di più in più alla circonferenza del circolo; il contorno del poligono inscritto aumenterà, e quello del circoscritto diminuirà: ma il perimetro o il contorno del primo non sorpasserà mai la lunghezza della circonferenza, e quello del secondo non diverrà mai più piccolo della stessa circonferenza: la circonferenza del circolo è dunque il limite dell'accrescimento del primo poligono, e della diminuzione del secondo.

1.° Se due grandezze sono limite di una medesima quantità, queste due grandezze saranno eguali tra di loro.

2.° Sia A B il prodotto di due grandezze A e B. Supponiamo che C sia il limite della grandezza A, e che D sia il limite della quantità B: io dico che $C \times D$ prodotto dei

limiti sarà necessariamente il limite di $A \times B$ prodotto delle due grandezze A e B.

Queste due proposizioni che si troveranno dimostrate esattamente nelle *instituzioni di geometria,* servono di principii per dimostrare rigorosamente, che si ha l'area di un circolo moltiplicando la metà della sua circonferenza per il di lui raggio.

Questo è quanto insegna il suddetto de la Chapelle intorno alla dottrina del metodo dei limiti.

300. Ora D'Alembert facendo seguito a quanto in questo articolo n'ha detto l'ab. de la Chapelle, soggiunge: la teorica dei *limiti* è la base della vera metafisica del calcolo differenziale. Indi soggiunge: a propriamente parlare il *limite* non coincide giammai o non diviene mai eguale alla quantità della quale esso è *limite;* ma quella gli si accosta sempre di più in più, e può differirne solo di quel tanto che a noi piacerà. Il circolo, per esempio, è il limite dei poligoni inscritti o circonscritti, perchè esso non si confonde mai rigorosamente con essi, sebbene questi possano avvicinarsegli all' infinito. Questa nozione può servire a rischiarare molte proposizioni matematiche. Per esempio, si dice, che la somma di una progressione geometrica decrescente della quale il primo termine è a, ed il secondo b, è $\frac{a^2}{a-b}$; questo valore non è propriamente la somma della progressione, è invece il limite di questa somma, cioè la quantità alla quale essa può approssimarsi sin che si voglia, senza giammai raggiungerla esattamente. Perchè se *c* è l'ultimo termine della progressione, il valor esatto della somma è $\frac{aa-bc}{a-b}$ il quale è sempre minore di $\frac{aa}{a-b}$, perchè anche

in una progressione geometrica decrescente l'ultimo termine e non è mai eguale a zero; ma siccome questo termine continuamente si avvicina allo zero, senza mai arrivarvi, egli è cosa chiara che lo zero è il limite, e che per conseguenza il limite di $\frac{aa-bc}{a-b}$ è $\frac{aa}{a-b}$, in supponendo $c=o$, ovvero ponendo in luogo di c il suo limite.

301. Indi lo stesso D'Alembert nell'articolo *Calcolo differenziale* soggiunge: = Quello che più ci interessa di trattare in questo luogo è la metafisica del calcolo differenziale.

Questa metafisica della quale tanto si è scritto, è più importante e forse piu difficile ad essere ben sviluppata che non siano le regole istesse di questo calcolo. Molti geometri, e tra gli altri Rolle, non potendo ammettere la supposizione che si fa delle grandezze infinitamente piccole, l'hanno rigettata intieramente ed hanno preteso, che il principio fosse falso e capace di indurre in errore. Ma quando riflettiamo che tutte le verità che si dimostrano coll' ajuto della geometria ordinaria, si dimostrano e con più di facilità anco coll' ajuto del calcolo differenziale, non si può a meno di conchiudere, che questo calcolo prestando dei metodi sicuri, semplici ed esatti, anco i principii dai quali esso dipende debbano esser semplici ed esatti. Leibnitz imbarazzato dalle obbiezioni che conosceva, che si potevano promuovere contro le quantità infinitamente piccole, quali le considera il calcolo differenziale, ha amato meglio ridurre i suoi infinitamente piccoli a non essere che delle incomparabili grandezze, ciò che rovinerebbe l' esattezza geometrica dei calcoli =.

302. Esaminiamo succintamente quale e quanta sia la filosofia del metodo dei limiti adoperato da questo grande geometra francese, e vediamo come questa filosofia del metodo

antico possa esser sostituita in luogo della filosofia del calcolo differenziale.

La nozione del limite è di quella grandezza cui un'altra grandezza crescendo o decrescendo continuamente gli si avvicina, e che questo appropinquamento possa aver luogo sino all' infinito, che rigorosamente parlando, mai non lo eguaglia perfettamente. = A propriamente parlare dice D'Alembert il *limite* non coincide giammai, o non diviene mai eguale alla quantità della quale esso è limite =. Ora ammessa questa dottrina di indefinita approssimazione, ma in pari tempo escludente la rigorosa identità, come mai il metodo dei limiti può aversi per esattamente rigoroso, se come usano tutti i fautori di questo metodo, si vogliono sostituire i limiti, o le ragioni dei limiti in luogo delle grandezze che ad essi si sono appropinquate?

Anco in questo metodo si appoggiano i geometri all'appropinquamento infinito che la grandezza fa al suo limite. Ora da questo concetto e da queste posizioni ne risulta, che l'idea *limite* è quella di una grandezza costante alla quale un' altra si avvicina; ma tali posizioni dimostrano, che ogni relazione del limite alla grandezza consiste in una estrinseca relazione la quale per necessità di dati, presuppone l'esistenza e del limite e della grandezza approssimantesi al limite.

Di qui si incomincia a dedurne la leggittima conseguenza, che l' idea di limite e di ogni sua proprietà va in fumo e più non esiste qualunque volta non esista la grandezza approssimantesi, o qualunque volta questa diventi eguale a zero, e che lo stato della grandezza considerata limite contenga, sussistendo, solamente l' idea o il concetto della indeterminata approssimazione della grandezza svanita.

503. Ogni legge per mezzo della quale una grandezza crescendo o diminuendo si avvicina ad un altra fissa e co-

stante, e ciò sempre fino all'infinito come dicono i geometri e segnatamente D'Alembert, è legge, N. 300, fondata sopra la natura del continuo; ogni legge che non si appoggi a questa proprietà del continuo, può sempre presto esaurirsi e consumarsi, circostanza che ognora esclude il procedimento all'infinito. Ogni legge geometrica fondandosi su la proprietà del continuo, e procedendo secondo una ragione costante, è legge che di sua natura procede sempre all'infinito, perchè si serve del continuo per aver sempre diritto di scompartire ogni residuo, secondo la legge di diminuzione; è legge di aumenti e di potenze, e se occorre, questa legge si serve della costante ragione dei termini, la qual ragione per esser sempre mantenuta esige, che la legge lasci sempre qualche cosa su cui procedere continuamente innanzi. Per questo, il campo che può percorrere e sul quale si distende la serie geometrica è campo infinito; quindi è campo inesauribile, è campo senza confine, è campo trascendente i limiti della ragione e dell'analisi, e tutto ciò tanto in via ideale teoretica, quanto in via pratica ed analitica.

Dunque col metodo dei limiti non si può mai escire dal metodo delle approssimazioni indefinite; dunque di buon ora s'intende, che non può esso servire di rigorosa metafisica a verun calcolo, e nel caso di cui parliamo, al calcolo differenziale.

304. Ma proseguiamo l'esame: Archimede, l'abate de la Chapelle, D'Alembert, Cousin ed infiniti altri, riconoscono la circonferenza di un circolo v. g. per limite dei poligoni inscritti e circoscritti alla medesima; essi dunque ammettono una ipotesi, che certamente contiene più difficoltà che non ne contenga la ipotesi della grandezza infinitamente piccola; prima perchè questa grandezza limite o questa circonferenza è di natura diversa della retta, ovvero è diversa della pe-

riferia di ogni poligono, il che ci fa conoscere, che anco secondo la dottrina fondamentale del metodo dei limiti sarebbe esclusa questa posizione; imperciocchè per poter immaginare che una grandezza variabile si accosti indefinitamente ad un'altra costante in forza delle sue variazioni, e ciò fino al punto di differirne meno di qualsivoglia differenza, convien sempre e poi sempre supporre, che le due grandezze, cioè tanto la variabile quanto la costante o il limite, siano omogenee o di una identica natura; il che non avverandosi delle linee rette, comparate con le curve, le quali anzi sono di diversa natura, si vede, che qui non si usa del metodo dei limiti, ma se ne abusa. In secondo luogo, stando ai ragionamenti adoperati dai seguaci del metodo dei limiti ne si vorrebbe far credere, che si arrivi a conoscere il valor di una diminuzione o il valor di una quantità quando si conosca il limite cui tende; ma questo a rigor di filosofia non regge; di fatti noi sappiamo che la espressione in serie dell' unità è $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, nella quale il secondo membro si avvicina al valor dell'unità.

Or bene, si può per ciò conchiudere, che la somma di questa serie protratta all'infinito sia eguale all'unità? Questo par di no; perchè un infinità reale o immaginaria di termini ripugna e perciò anco una cotal somma è chimerica. Inoltre si ammette per base fondamentale che la grandezza variabile può sempre accostarsi al limite sino al prodigio o all' infinito, senza però a rigore mai raggiungerlo; dunque, non può mai il valor del limite rappresentare il valor della variabile a tutto rigor di filosofico ragionamento, ma solo per aprossimazione.

305. Però (si dirà) è certo, che con questi continui interminabili appropinquamenti che fanno v. g. i lati del poli-

gono al circolo, una parte della superficie contenuta e conterminata dal circolo viene passando nel poligono inscritto di lati crescenti, e così continuando all'infinito si vede, che la differenza tra la superficie del circolo e quella del poligono può esser portata a qualsivoglia piccolezza che più piaccia?

Ma osserviamo, che questo procedimento di avvicinamento di queste due superficie, lascia sempre parte finita di differenza tra quella del circolo e quella del poligono, poichè al primo sentor di consunzione di questa differenza, preceder deve quello di infinito appropinquamento, il quale ripugna. E nella stessa insigne ipotesi che tale diminuzione della differenza fosse protratta all'infinito, non condurrebbe mai alla rigorosa identità, e perchè si dice che la variabile non può raggiungere il limite a rigore, e perchè anco con questa inamissibile ipotesi non si perviene che all'infinitesimo valor della differenza, giusta il più ovvio e naturale significato di un' appropinquamento fondato nella proprietà del continuo e regolato, come è questo, da legge geometrica.

306. Da quello che siam venuti esponendo si vede, che il metodo dei limiti, appoggiandosi alla considerazione delle grandezze approssimantesi con procedimento senza fine, non può mai aspirare all'onorifico titolo di metodo rigoroso. Ora rifuggire all'idea della grandezza infinitesima supposta razionalmente, mentre nella più favorevole ipotesi è quella grandezza cui aspira il metodo dei limiti filosoficamente inteso, e rifuggire dall'infinitesima supposta per andar in cerca della stessa usando delle approssimazioni finite ed incessantemente finite e di approssimazioni che mai non possono esaurirsi, questo è pensamento sicuramente antifilosofico. Più, quando queste diminuzioni delle differenze, e queste consecutive approssimazioni si raccomandano e si appoggiano all' infinito ed all' infinitesima grandezza evanescente, e ciò

per escluder l'idea dell'infinitesima stessa, questo si presenta contegno sì poco conforme a ragione che nulla di più sconveniente si può ideare. In fatti qui si tenta escludere la nozione della grandezza infinitamente piccola, per poi supporla due volte.

307. Il concetto dell'infinitesima quantità, è concetto ardito, e di difficilissima mentale concezione, ma i concetti che racchiudono le dottrine dei limiti sono ancora di più difficile concepimento, perchè là dove nel sistema leibniziano tutto è razionalmente supposto, in quello dei limiti se lo pone ad infinita distanza, e ciò che più importa, tacitamente ma espressamente, si suppone di poterlo raggiungere e di determinare colle nostre concezioni, inette ad arrivare a questa inacessibile distanza e profondità infinita. Onde il considerare il metodo dei limiti più luminoso e chiaro di quello delle parti o quantità infinitesime, è la stessa cosa che dire, che l' infinito sia più adattato alla nostra concezione di quello lo sia l'infinitesimo, e che una cosa interminabile, (quale è l' approssimazione all' infinito) sia più semplice e chiara della supposta infinitesima quantità.

Cose tutte, che si dicono, e che nemmeno per approssimazione si provano, nè si possono provare.

Quale adunque è il guadagno che D' Alembert ricava, per la filosofia del calcolo differenziale dal suo ricorso al metodo dei limiti? Il suo ragionamento consiste nel supporre, che le grandezze variabili si avvicinino infinitamente al limite (il che è già una inconcepibile ipotesi) o ciò, che poi è lo stesso, che la grandezza dopo indefiniti appropinquamenti differisca infinitamente poco dal limite (con le quali posizioni si suppone e si ammette pienamente la dottrina leibniziana) ; dunque D'Alembert non fa nè più nè meno di Leibnitz !

Quando il D' Alembert a fine dare qualche rigore

alle sue geometriche determinazioni della sottangente della parabola ordinaria, da lui esposte nell'*Enciclopedia Metodica* articolo, *Calcolo differenziale*; quando diciamo, considera come eguali le due ascisse perchè tra di loro appropinquate in modo da essere infinitamente vicine, egli in questo caso si fa apertamente a supporre eguali queste due grandezze per la ragione che sono indefinitamente vicine o ciò che è precisamente la stessa cosa, perchè sono infinitamente poco differenti; dunque, egli prende a prestito, per così dire, od assume intieramente la dottrina di Leibnitz, e poi pretende farla servire di sgabello al suo metodo antico, metodo che incomincia appunto là dove finisce quello del filosofo di Lipsia.

Tale procedimento di D'Alembert oltre che contiene verace scapito nel rigor delle dottrine, si presenta anco più complicato e più ripieno di dubitazioni di quello del calcolo differenziale, e per sopra più si dimostra eziandio poco congruente a sè stesso, perchè alla fine si appoggia agli stessi principii e posizioni del calcolo differenziale, che vorrebbe supplantare.

Prima di por fine a queste considerazioni osserveremo ancora, che quando D'Alembert nel suo lungo articolo, *Calcolo differenziale* inserito nell'*Enciclopedia Metodica,* viene a determinare il rapporto dell' ordinata alla sottotangente, egli trovasi condotto alla seguente equazione $\frac{z}{u} = \frac{a}{2y + z}$ e comparando questa espressione con quella che assegna con eleganza e speditezza maggiore il calcolo differenziale trova, che $\frac{z}{u}$ corrisponde precisamente a $\frac{dy}{dx}$ qual limite di questa frazione prima, cioè di $\frac{z}{u}$. E questo limite, dice egli,

si trova nella $\frac{a}{2y+z}$ facendovi la $z=o$. Poi si fa la domanda: non si deve egli fare $z=o$, e $u=o$ nella frazione $\frac{z}{u}=\frac{a}{2y+z}$ ed allora si ha $\frac{o}{o}=\frac{a}{2y}$? Ora cosa significa quest' ultima equazione? io rispondo (soggiunge d' Alembert): 1°. che in quest'equazione non v'ha alcuna assurdità; perchè $\frac{o}{o}$ può esser eguale a ciò che si vuole: e così può esser eguale ad $\frac{a}{2y}$: io rispondo in secondo, che quantunque il limite del rapporto di z ad u si trovi quando $z=o$ ed $u=o$, questo limite non è propriamente il rapporto di $z=o$ alla $u=o$, perchè questo non presenta alcuna idea nitida; non si sa più che cosa sia un rapporto del quale i due termini sono nulli l'uno e l'altro. Questo limite è la quantità alla quale il rapporto $\frac{z}{u}$ s'accosta di più in più, in supponendo z ed u ambedue reali e decrescenti, e delle quali il rapporto s'accosta cotanto da vicino quanto a noi piaccia.

Esaminiamo ora alcun poco questi pensamenti di d'Alembert, e vediamo se contengano miglior metafisica o maggior evidenza di quella che contengono i principii del calcolo differenziale.

A buon conto con la formola $\frac{a}{2y+z}$ pone in chiara luce, che questa espressione non può mai a rigore divenire

$= \frac{a}{2y}$ se rigorosamente la z non sia divenuta zero. Ora il nostro filosofo non ha coraggio di supporre la $z = o$; ma vuole che a forza di indefiniti decrementi divenga come zero, senza badare, che niuna via o serie geometrica di diminuzioni esiste, la quale conduca a questa perfetta consunzione della z. Oltre questo, quando la z è zero la grandezza approssimantesi al limite non è più; perciò con essa svanisce anco l'idea del limite, perchè quest'idea consistendo in questa relazione estrinseca, non si può comprendere come sussista dopo spenta la relazione in causa della mancanza di z.

Nè si dica, che il limite $\frac{a}{2y}$ della grandezza $\frac{a}{2y + z}$ sussiste in quanto che, se la z più non è, sappiamo però che con le sue diminuzioni continue infinite, tendeva a rendere $\frac{a}{2y + z} = \frac{a}{2y}$. Perchè insino a tanto che z esiste, questa eguaglianza non è rigorosa per posizione di D'Alembert; e perchè diventi rigorosa convien che sia $z = o$, ed in allora anco per D'Alembert, non ha più significato; nè giova ricorrere per spiegare quest'enigmatica nozione (già abbracciata da Newton,) alle ragioni che quest'ultimo adduce, perchè egli suppone quest' eguaglianza non prima che z sia zero, nè dopo, ma nel momento che diviene zero; inutile sutterfugio, perchè si appoggia ad uno stato il quale è inconcepibile: di fatti si immagini pure il tempo suddiviso in infiniti istanti infinitesimi, a questi si raccomandi la z; in quell'istante, che cessa, sarà essa forse e z e zero? Il passaggio dall'essere al non essere non ha misura di tempo, non è segnato cioè da alcuno istante, onde meglio si direbbe, che lo spegnersi della z non si può con-

cepire che tra uno e l'altro istante; o almeno in modo che niun tempo o istante di tempo possa segnare il trapasso dall'essere al non essere.

Richiamare adunque al momento di questa estinzione, è richiamar l'animo sopra un momento impercettibile, è sedurlo con apparenza di verità, ma non convincerlo realmente. Il fine di una cosa, o il punto della sua estinzione non si può considerare nel tempo, se non come il punto geometrico si considera nelle quantità geometriche.

Più, quando D'Alembert esprime il rapporto di $\frac{z}{u}$, che è poi quello dei lati del così detto triangolo differenziale, o dei lati infinitesimi, e quando ammette la condizione che sia $z = o$, ed $u = o$, allora si ha $\frac{z}{u} = \frac{o}{o} = \frac{a}{2y}$. Ora ognuno di leggieri intende com'esso si trovi posto in difficoltà dalle quali non sa liberarsene. In fatti, il dire che $\frac{o}{o}$ significa tutto ciò che si vuole, ella è asserzione presto detta, ma che niuno può apertamente intendere, che niuno può spiegare. Così pure enigmatica a tutti riescirà l'eguaglianza $\frac{o}{o} = \frac{a}{2y}$.

Leibnitz che suole esprimere i lati del triangolo minimo non per z e per u, ma per dx, e per dy, egli ha in luogo di $\frac{z}{u}$ la espressione $\frac{dy}{dx}$, la quale, posta che sia la nozione dell'infinitesima parte ideale non ammette più alcuna difficoltà, nè

contiene alcuna oscurità, ed egli non ha bisogno nella sua filosofia di fare $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$.

Finalmente siccome d' Alembert conviene pienamente nelle idee dell'ab. de la Chapelle nel ritenere, la circonferenza del circolo come verace limite dei poligoni inscritti e circoscritti allorquando crescono nel numero dei loro lati, così secondo la sua teorica dei limiti deve col medesimo Abbate convenire nel dire, che la superficie del circolo risponde esattamente alla moltiplica del raggio per la mezza circonferenza; ora non ci vogliono profonde cognizioni matematiche per comprendere, quanto mai sia sconvenevole e mostruosa una così fatta moltiplica, mentre la linea retta espressa dal raggio e di natura al tutto diversa dalla linea curva espressa dalla mezza circonferenza, e perciò come questa sia moltiplica inesatta in matematica ove le grandezze devono avere omogeneità dichiarata, o meglio, una deve essere astratta e l'altra concreta, ma omogenee.

Tutte queste considerazioni pajono più che sufficienti a far comprendere, che le dottrine del metodo dei limiti non contengono una filosofia atta a rischiarare ed a sorreggere quella del calcolo differenziale; perchè anzi in essa si incontrano tutte le difficoltà del calcolo differenziale, più ci pongono in molte oscurità delle quali il calcolo di Leibnitz ne va esente.

308. E giacchè cade il nostro dire sopra del circolo, esaminiamo se la superficie del circolo possa considerarsi come conoscibile in quanto che è una superficie finita e determinata, quindi comparabile a quella dei poligoni. Ma si osservi, che da questa supposizione non si può ricavare verun profitto per conoscere precisamente tale superficie o area finita, perchè l'area dei poligoni è nota, quella del circolo è

ignota, e l'idea che sia finita, nulla ha a che fare con la cognizione esatta e rigorosa della superficie medesima.

309. Nè giova replicare, che l'area del circolo può esser ritenuta quale grandezza nota e conosciuta dal momento che essa giace tra due superficie note ed appieno conosciute come sono quelle dei poligoni inscritto e circoscritto; poichè altrettanto prova bensì che l'area del circolo è quantità finita, e compresa tra due determinate note aree, le quali anzi posson concepirsi molto propinque nel valore a quello dell'area circolare, ma non prova mai che queste due aree avvicinantesi nella loro entità indefinitamente all'ignota area del circolo, arrivino finalmente a determinare rigorosamente l'area circolare; imperciocchè l'esser essa compresa tra due grandezze determinate e note, prova solo, che geometricamente la superficie circolare è maggiore di una e minore dell'altra, e siccome tra due grandezze finite poco o molto tra loro differenti possono mediare sempre infinite grandezze tutte di diverso valore, come vuole la natura del continuo appropriata che sia ad ogni differenza o grandezza, così è certo, che la superficie o l'area circolare deve esser una di queste intermedie grandezze; ma chi sa dire quale di questi tanti ed indefiniti valori di aree intermedie, sia quello che rigorosamente esprima il valor dell'area circolare? Nè si pensi che avvicinando più e più i poligoni, le loro aree si avvicinano alla rigorosa cognizione dell'area circolare, perchè ciò è escluso dalla natura del continuo, ed è escluso dall'avvicinamento dei poligoni, i quali seguono in questo una legge geometrica senza fine e procedente all'infinito.

Finalmente non giova il pensamento di Archimede il quale suggeriva dopo indefiniti appropinquamenti dei due poligoni l'uno inscritto e l'altro circoscritto, si dovesse prendere un voler medio, sperando, che questo dovesse riuscire

sensibilmente eguale a quello della periferia circolare; perchè a questo insegnamento si oppongono due insormontabili ostacoli; primo, che il valor medio che si prende non solo non è atto a darci la circonferenza del circolo, ma è inetto anco a darci la cognizione del poligono intermedio ed equidistante dall' inscritto e circoscritto, atteso che anch' esso non può corrispondere a valor medio aritmetico, bensì solamente a valor medio geometrico, di difficilissima determinazione; secondo, e perentorio ostacolo è quello, che la circonferenza circolare è di natura curva cioè affatto diversa dalle circonferenze poligonali di natura rettilinee.

Quelli finalmente che han voluto considerare il circolo come un poligono di un infinita quantità di lati, non hanno sciolto il nodo gordiano, ma l'hanno tagliato, distruggendo la curva e sostituendovi la retta, vale a dire, dando di spalle alla ricerca della verità di cui trattasi e riconoscendosi inetti a ben dimostrarla, più vergognosamente si sono appigliati ad altra ricerca di natura al tutto differente, distruggendo così la prima.

310. Queste non sono visioni; di fatti gli antichi geometri istessi, i quali cotanto si piccavano di esattezza nelle loro dimostrazioni, dopo aver impiegato tutti i mezzi razionali e pratici, altra conseguenza non si trovarono autorizzati a ricavare dalle loro speculazioni intorno al circolo se non quella, che la superficie del circolo era nota solo per indefinita approssimazione. E quando pure vollero più largamente ragionare, ritennero nota la superficie del circolo, non per identità reale che essa rigorosamente avesse con altra nota superficie, ma in riguardo alla pochissima differenza che presentava in comparazione di una superficie nota; cercando in loro pensiero di considerare questa piccola differenza come grandezza minor di ogni data. Ora, è egli modo forse più rigoroso quello di supporre che la

differenza sia inassegnabile, poi di ritenere che questa sia zero, di quello di avere per zero la grandezza infinitamente piccola? Ma ritorniamo a noi, quest' ultima maniera di considerare eguali le grandezze perchè vicinissime è appunto quella cui si appoggia il metodo dei limiti. Ora si osservi e si rifletta con piena cognizion di causa e piena libertà di ragionamento, se il metodo dei limiti meriti esser anteposto per filosofia al calcolo differenziale?

La inassegnabile grandezza si trascura in faccia alla grandezza finita, la infinitesima egualmente si trascura in comparazione della grandezza finita; la infinitesima è opera e posizione mentale speculativa, la inassegnabile è considerata erroneamente come un prodotto di operazioni reali; la infinitesima contiene la sola ipotesi che la immagina e la ammette, la inassegnabile contiene più ipotesi ed alcune presso che ripugnanti od almeno inamissibili, come si è provato innanzi.

Dunque D'Alembert è stato inconsideratamente sedotto dall'opinione universale prevalente, cioè che il metodo dei limiti fosse rigoroso.

Tutto questo nostro dire sia inteso in via solamente scientifica e sia considerato come semplice ragionamento nostro risguardante il metodo dei limiti, e non mai come risguardante il geometra D'Alembert al quale professiamo profonda estimazione, e prescindendo da questa sua filosofica maniera di esplicare il calcolo sublime, noi sentiamo per questo grande matematico tutta la nostra ammirazione e per le scoperte importantissime che ha fatto nell'analisi superiore e per l'aggiustatezza e vastità del suo ingegno dispiegato in tutte le parti della filosofia che ha impreso a trattare.

311. Le difficoltà che venivano poste in campo contro la dottrina del calcolo differenziale ebbero molto peso anco sull'animo del sommo geometra Leonardo Eulero, per cui

anch'egli si appigliò ad un'altra maniera di spiegare il calcolo differenziale, proponendo cioè di questo diversa metafisica o diversa filosofia di quella di Leibnitz.

E questa sua diversa filosofia consisteva nel considerare le differenziali o le quantità infinitamente piccole, quali quantità evanescenti. Questa maniera di evanescenza appartiene ad Archimede, e fu abbracciata anco da Newton. come abbiamo già dimostrato. Ma riportiamo i pensamenti di Eulero, e ciò perchè meglio ne sia palese l'indole e la natura del suo pensamento.

312. Nella sua opera intitolata: *Institutiones calculi differentialis,* (noi ci serviamo della edizione di Pavia) scrive nella prefazione pag. LVI e pag. seguente ecc.: = Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates quæ utcumque ab x pendent, seu per eam determinantur ejus functiones vocantur, cujusmodi sunt quadratum ejus xx, aliæve potentiæ quæcumque, nec non quantitates ex his utcumque compositæ; quin etiam trascendentes, et in genere quæcunque ita ab x pendent, ut aucta vel diminuta x, ipsæ mutationes accipiant.

Hinc jam nascitur quæstio, qua quæritur, si quantitas x data quantitate, sive augeatur sive diminuatur, quantum inde quaevis, ejus fonctiones immutentur, seu quantum incrementum decrementumve accipiant.

Casibus quidem simplicioribus hæc quaestio facile resolvitur: si enim quantitas x augeatur quantitate w, ejus quadratum xx hinc incrementum capiet $2xw + ww$, sicque incrementum ipsius x se habebit ad incrementum ipsius xx. ut w ad $2xw + ww$ hoc est ut 1 ad $2x + w$; similique modo in aliis casibus, ratio incrementi ipsius x ad incrementum vel decrementum, quod quævis ejus functio inde adipiscitur, considerari solet.

Est vero investigatio rationis hujusmodi incrementorum ipsa non solum maximi momenti, sed ei etiam universa analysis

infinitorum innititur. Quod quo clarius appareat, sumamus exemplum superius quadrati xx cujus incrementum 2 x *w* + *ww* quod capit, dum ipsa quantitas x incremento *w* augetur: vidimus ad hoc rationem tenere ut 2x + *w* ad 1; unde perspicuum est quo minus sumatur incrementum *w* eo propius istam rationem accedere ad rationem 2x ad 1. Neque tamen ante prorsus in hanc rationem abit quam incrementum illud *w* plane evanescat.

Hinc intelligimus, si quantitatis variabilis x incrementum *w* in nihilum abeat, tum etiam quadrati ejus xx incrementum inde oriundum, quidem evanescere; verumtamen ad id rationem tenere ut 2x ad I. Et quod hic de quadrato est dictum, de omnibus aliis functionibus ipsius x est intelligendum; quippe quarum incrementa evanescentia, quæ capiunt, dum ipsa quantitas x incrementum evanescens sumit, ad hoc ipsum certam et assignabilem rationem tenebunt. Atque hoc modo sumus deducti ad definitionem *calculi differentialis*, qui est *methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quæ functiones quæcumque accipiunt, dum quantitati variabili, cujus sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur.*

Hacque definitione veram indolem calculi differentialis contineri atque ideo exhauriri, iis, qui in hoc genere non sunt hospites, facile erit perspicuum. Calculus igitur differentialis non tam in his ipsis incrementis evanescentibus, quippe quæ sunt nulla, exquirendis, quam in eorum ratione ac proportione mutua scrutanda occupatur; et cum hee rationes finitis quantitatibus exprimantur, etiam hic calculus circa quantitates finitas versari est censendus. Quamvis enim præcepta, uti vulgo tradi solent, ad ista incrementa evanescentia definienda videantur accomodata, numquam tamen ex iis absolute spectatis, sed potius ex eorum ratione conclusiones deducuntur.

Simili vero modo calculi integralis ratio est comparata qui convenientissime ita definitur, ut dicatur esse: *methodus ex cognita ratione incrementorum evanescentium ipsas illas functiones quarum sunt incrementa inveniendi.*

Quo autem facilius hae rationes colligi atque in calculo repræsentari possint, hæc ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis, nihil obstat quominus iis certa nomina imponantur. Vocantur itaque differentialia, quæ cum quantitate destituantur, infinite parva quoque dicuntur; quæ igitur sua natura ita sunt interpretanda, ut omnino nulla, seu nihilo æqualia reputentur. (Vedi pag. 56, 57, 58 della suddetta opera) =.

313. Certamente che il grande Eulero con questo suo metodo, considerato come mezzo o metodo filosofico rigoroso e perciò acconcio ad evitare le difficoltà promosse contro il calcolo differenziale, non si presenta molto ragionatore. Imperciocchè se riesce a noi duro il concepire la quantità infinitamente piccola, dovrà poi riuscire facile cosa il formarsi una nozione della quantità infinitamente piccola evanescente? Per qual ragione si dice e si ritiene evanescente, e con qual mezzo se la ottiene in questo stato? Come mai la w incremento reale e costituente una reale o ideale variazione della x e sue funzioni si può senza altro cangiamento considerarlo evanescente o zero? E come la x e sue funzioni possono variare per un incremento w evanescente e zero? Qual ragione, o qual rapporto è possibile tra due evanescenti o due zeri? Senza rispondere e soddisfare a tutte queste interrogazioni o inchieste, e senza chiarire tutte queste oscurità che si presentano, come sarà mai fattibile di poter filosoficamente considerare rigoroso il metodo delle variazioni evanescenti, e ritenerlo come semplice, chiaro e da una piena evidenza accompagnato? Osservaremo per

sopra più, che la definizione del calcolo differenziale quivi dataci da Eulero risguarda più tosto le applicazioni di questo stesso calcolo, che la sua verace natura e proprietà, la quale abbraccia indistintamente tutte le grandezze algoritmiche tanto considerate separatamente che tra di loro comparate.

314. Lagrange, gloria di Torino, parlando della metafisica o della filosofia delle evanescenti grandezze di Eulero, scrive: = Ma questo metodo, come pure quello dei limiti, e del quale il primo non è propriamente che la traduzione algebrica del secondo, ha il gran difetto di considerare le quantità nello stato nel quale esse cessano, per così dire, di essere quantità; perchè sebbene si concepisca sempre chiaro il rapporto di due quantità intanto che esse dimorano in istato finito, questo rapporto non presenta più allo spirito un'idea chiara e precisa tosto che i suoi due termini divengono l'uno e l'altro nulli nel medesimo tempo =.

Portando attenzione a questo parere di Lagrange facilmente veniamo a conoscere, che egli ha tutta la ragione di dire, che niuna chiara nozione corrisponde nella nostra ragione delle quantità nulle; imperciocchè verun rapporto non esiste tra le non quantità.

Newton prima di Eulero fece buon viso alle quantità evanescenti, seguitando appunto l'antico metodo dei limiti, ma forse in vista della ragione qui sopra accennata da Lagrange, si studiò di evitare la forza di questa sconvenienza di idee col dire, che egli non considerava le evanescenti, non prima che svanissero, non dopo svanite, perchè prima sono ancora quantità finite, dopo sono puri zeri, ma le considerava nell'atto del loro svanire. Tuttavia convien ripetere il già detto, che con questo sutterfugio non poteva sostenere il suo sistema delle evanescenti, nè come facile, nè come chiaro e rigoroso, N. 307, perchè quest'atto dello sva-

nire niuna idea chiara presenta. L'atto dello svanire, non si può dire che appartenga al tempo od occupi parte del tempo, benchè abbia luogo durante il tempo e sia nel tempo come il punto geometrico ha luogo nella linea ed esiste nella linea, ma non come parte della linea. E che la faccenda sia così, lo si conosce osservando, che se all'atto dello svanire (se pure lo svanire si può appellar un'atto) può competere una ragione o un rapporto, questo è in forza della entità che durante quest'atto ha la quantità, altrimenti essa potrebbe aver ragione o rapporto anco dopo svanita. Ora siamo dunque sempre costretti a desumere questa ragione o rapporto dalla grandezza esistente, e l'esser la grandezza al contatto dello svanimento, questo non fa perder di vista la propria entità. Quindi è un verace inganno quello di credere di evitare le difficoltà che insorgono contro questo metodo in forza della ragione o rapporto delle grandezze finite, col richiamarci all'istante che le grandezze finiscono, perchè anche in questo istante la ragione ed il rapporto ultimo (e si dice ultimo, perchè la grandezza sta per mancare) è ragione e rapporto di grandezze; il quale cessa non prima nè dopo delle grandezze, ma insieme con esse si spegne e muore. E siccome tra l'essere ed il non essere, o tra l'essere ed il cessar dell' essere, non vi è cosa media, che nè indichi e nè costituisca questo passaggio o questa cessazione, perciò non si può rinvenire in questo istante o in quest' atto dello svanire alcuno schiarimento alle nostre nozioni; anzi l'animo richiamato su questo punto non trova di aver fatto altro guadagno che di aver addensate le primitive sue tenebre.

Onde questo atto dello svanire non giova menomamente a somministrare l'idea di una ragione ultima delle quantità finienti, quasi che questa sia la più piccola possibile; e ciò tanto più, che ove si tratta di ragioni o di rapporti, questi non procedono nel loro andamento per verun conto di con-

certo con lo impicciolimento delle grandezze, dalle quali dipendono; atteso che il rapporto, che esiste tra una unità e due unità, è identico con quello che passa tra una quantità minor di ogni data e due quantità minori di ogni data, come pure quello che passa tra un' unità ed un' altra, è identico con quello di un' unità finiente con un'altra simile. Questa esatta osservazione ben ponderata ci fa appieno comprendere un nuovo equivoco che esiste in questo modo di parlare di Newton, perchè o queste ultime ragioni o rapporti si pigliano in confronto delle grandezze diminuenti ed evanescenti, ed allora queste ragioni, o rapporti sono sempre finiti, costanti e simili a quelli che presentano le grandezze di qualunque altro valore; o queste ragioni ultime si considerano quelle che hanno le evanescenti con le finite grandezze, ed allora queste ragioni tendono in tal caso al divenir infinite; o finalmente si pigliano in confronto del limite o dello zero, cui tende la quantità nello svanire, ed allora mancano di significato, perchè lo zero non ha alcun potere sopra qualsiasi ragione o rapporto, ed è anzi ad ogni rapporto ripugnante.

315. Ma ripigliando il discorso delle dottrine di Eulero, egli nel Cap. III della succitata opera ove tratta *degli infiniti e degli infinitamenti piccoli,* si studia di far comprendere la sublimità di questi due concetti, uno dell'infinito e l'altro dell'infinitesimo, e perciò scrive: = Quantitas enim (pag. 58) continuis incrementis aucta, infinita non evadet, nisi jam sine fine increverit: quod autem sine fine fieri debet id non tamquam jam factum concipi potest.

Interim tamen non solum huiusmodi quantitatem ad quam incrementis sine fine congestis pervenitur, certo charactere indicare, sicque debito modo in calculum inducere licet, uti mox fusius ostendemus; sed etiam in mundo ejusmodi casus existere, vel saltem concipi possunt, quibus numerus infi-

nitus actu existere videatur, sic si materia in infinitum sit divisibilis, uti plures philosophi statuerunt, numerus partium quibus datum quodque materiæ frustum constat, revera erit infinitus; si enim statueretur finitus, materia certo non in infinitum foret divisibilis; simili modo si universus mundus esset infinitus, uti pluribus placuit, numerus corporum mundum componentium certo finitus esse non posset, foretque deo quoque infinitus =.

In questo passo Eulero confonde in modo antilogico l'oggettivo col soggettivo. Di fatti la grandezza geometrica dotata della proprietà del continuo si presenta soggettivamente divisibile all' infinito, ma che la materia reale o i corpi siano all'infinito divisibili, questo è ciò che niun filosofo ha mai considerato, perchè niuno ha detto, che la materia fosse dotata della proprietà del continuo, onde della materia reale ciò non poteva intendere.

Poi, dato per pura ipotesi di alcuni filosofi, che la materia fosse divisibile in infinito, o senza fine, come mai Eulero poteva da tale opinione ricavarne la conseguenza, che il numero delle parti costituenti un pezzo di materia, *revera erit infinitus,* mentre poco prima aveva detto, *quod autem sine fine fieri debet, id non tamquam jam factum concipi potest.* La stessa cosa si deve intendere avverarsi circa ciò che si riferisce all'ipotesi, che il mondo sia infinito, mentre in via di fatto è finito.

316. Inoltre confessar dobbiamo, che la nozione che egli dà in questo luogo del concetto infinito non è ammissibile per verun conto a rigor di ragione, atteso che la via su la quale si pone per condurci all'infinito, appoggiandosi all'aumento delle quantità finite accumulantesi senza fine, è un mezzo al tutto inetto e ripieno di oscurità.

Consimile osservazione pare che s'aggirasse anco nella mente del nostro gran geometra, poichè Cap. III, pag. 62,

aggiunge: = Sebbene alcuni si rifiutino dall'ammettere in questo mondo un numero infinito di parti realmente esistenti, tuttavia nelle speculazioni matematiche, soventi volte si presentano delle quistioni alle quali non si può rispondere se non ammettendo un numero di parti infinite =.

Pare però che questa necessità accennata qui da Eulero non sia una necessità ma sibbene un'apparenza di necessità, perchè è vero che alcune volte si presentano delle speculazioni che inchiudono un procedimento di aumenti o di decrementi senza fine, pure pigliando in filosofico esame tali nostri pensamenti si riconoscono figli unicamente del procedimento mentale ammesso senza fine, ma un tale procedimento non è già che conduca all' infinito, il che non può essere, ma solamente al concetto di lasciar sempre libero il campo di progredire innanzi; dunque la filosofia non ravvisa mai in queste quistioni la necessità di ammettere l'infinito reale, o l'infinito ideale, che anzi li esclude.

317. Ma si continui a riportare i pensamenti di questo insigne geometra.

Egli prosegue: = Così nel caso (pag. 62) che si cercasse la somma di tutti i numeri costituenti questa serie 1 + 2 + 3 + 4 ecc. poichè questi numeri progrediscono senza fine e senza fine crescono, certamente che la somma di tutti questi numeri sarà tale, che niun numero, per grande che sia, potrà essere a questa eguale; anzi non potrà mai presentare un valor tale, che anco un singolo termine della serie non possa oltrepassarlo; onde si ricava che questa serie è infinita. Ora quella quantità che è sì grande che riesce di ogni quantità finita maggiore, essa non può essere che infinita =.

318. Così una linea (pag. 57) per quanto sia allungata, può sempre e poi sempre esser allungata senza fine ed in modo che può divenir sempre maggiore di ogni data od

assegnata. Dal che ne seguita, che tanto i numeri, quanto le linee possono sempre esser accresciuti in infinito =.

319. = Questi (pag. 58) benchè siano concetti chiari, tuttavia avendo alcuni tentato di renderne ragione e di spiegare queste dottrine, non han fatto altro che oscurarli, riempiendoli di difficoltà inestricabili. Dal credere che la quantità si poteva accrescere all'infinito ne conchiusero, che si desse veramente una quantità infinita e se la figurarono di tale grandezza, che più non potesse essere accresciuta. Ma con questa immaginazione si distruggeva l'idea della quantità, la quale porta od esige, che sempre e poi sempre possa essere accresciuta. =

320. Intanto, Eulero, poco dopo soggiunge (pag. 62): = Spessissime volte accadono quesiti alli quali non si può soddisfare se non si ammette un numero infinito. Se si cercasse v. g. la somma di tutti i numeri della serie 1 + 2 + 3 + 4 + 5 ec. all'infinito: atteso che questi numeri progrediscono senza fine, e senza fine aumentano, certamente che la somma di tutti non saprebbe essere quantità finita, per cui ne viene che è infinita =.

Osserveremo però, che questa ultima non è un' induzione che legittima discenda o possa discendere dalle premesse. Forse perchè la somma può riuscire eguale o maggiore di qualunque assegnata grandezza, ne discenderà a parer di Eulero, che non possa esser quantità finita? Questo non mai; imperciocchè mutando parole non si fa altro che scambiare antilogicamente l'infinito con ciò che non ha fine, le quali due nozioni non hanno alcuna somiglianza o convenienza tra loro.

321. = Ad indicare si fatta quantità infinita (prosegue sempre Eulero) i matematici si servono del segno ∞, col quale si indica una quantità maggiore di ogni quantità finita od assegnabile =. Ma si osservi, che una quantità mag-

giore di ogni data finita quantità, non è in buona filosofia che un puro enigma. Ritener la quantità ed insieme maggior d'ogni quantità, è lo stesso, che ammettere che la quantità sia maggiore di sè stessa, il che ripugna.

322. = Questa dottrina (pag. 62 e 63) intorno all' infinito verrà (egli dice) meglio chiarita col presentare qualche nozione della grandezza infinitamente piccola. Non v'ha dubbio che ogni quantità si possa cotanto diminuire, che alla fin fine pienamante non isvanisca, o non sia ridotta ad esser nulla. Questa nozione della quantità infinitamente piccola è consimile al concetto delle quantità chiamate minori di ogni data, anzi di ogni assegnabile.

Imperciocchè se una grandezza è minore di ogni assegnabile, certamente che non può essere che zero; perchè se non fosse zero, si potrebbe assegnarne un'altra, la quale fosse eguale o minore, il che è contro la ipotesi ammessa, N. 180, 181. A chi, dunque, in oggetto matematico cercare cosa sia la quantità infinitamente piccola risponderemo, esser questa veramente zero. Nè in questa idea stanno riposti dei misteri quanti il volgo se ne immagina, e quanti rendettero sospetto il calcolo degli infinitamente piccoli. Frattanto se alcune dubitazioni rimangono ancora nell' animo, queste saranno a fondo distrutte nei seguenti calcoli che andremo instituendo =.

323. Qui ognuno vedè, che Eulero parla in via ipotetica. come appunto avevano fatto gli antichi geometri, considerando la minor di ogni data come zero, e cercando convalidare questa sua asserzione coll'assurdo. Ma preghiamo il lettore a considerare, che egli fonda la evanescenza della grandezza sopra la diminuzione, e noi abbiam dimostrato che tanto gli antichi, quanto i moderni geometri, non conoscono via alcuna di diminuzioni procedenti all'infinito, fondata sul continuo, la quale conduca all'esaurimento della gran-

dezza; quindi è, che allorquando egli crede di rinvenire la grandezza allo stato di infinitamente piccola o di evanescente, egli dice una cosa, che ricava da' mezzi inetti ed insufficienti ad ottenerla. Perciò la base del presente ragionamento di Eulero è base che vacilla, o almeno, che manca intieramente di ogni prova. Convien dunque abbandonare questo comune equivoco di indagare o ricercare la infinitamente piccola grandezza o la inassegnabile o la evanescente come proveniente o derivabile dalle diminuzioni, poichè apertamente sempre convien supporla e intieramente supporla, come abbiam veduto fare gli antichi e tutti quelli che hanno voluto ammettere sì fatte grandezze.

L' altro concetto poi di Eulero, comune anch' esso a quello degli antichi è, che la minor di ogni data sia evidentemente eguale allo zero, per la ragione che quando non fosse zero, si potrebbe ancora impiccolire; poichè questo ragionamento è pura petizion di principio, ed è una nozione nuova introdotta nell'idea della grandezza infinitamente piccola unicamente da Eulero, perchè alla fin fine gli antichi la supposero zero, solo in confronto della grandezza finita, e sopra di questa nozione fondarono il loro celebre principio.

Di più, invitiamo il lettore a considerare, che in questo luogo si commette un' altro non piccolo equivoco; si addossa cioè alla minor di ogni data la impossibilità di esser diminuita, non badando che questa impossibilità è tutta ipotetica e non intrinseca a questa minor di ogni data, poichè tutta l'assurdità che si vorrebbe derivare dalla diminuzione della inassegnabile, non è altra cosa, che la impossibilità nella quale la nostra mente finita e di ragione finita si trova di arrivare sino al confine dell' assoluto, o sino all'infinito; imperciocchè quando siamo stanchi di assegnar grandezze minori, ci poniamo, contro ogni filosofia a cre-

dere, che si dia assolutamente un punto di confine della diminuzione. Il qual modo di nostro pensamento ci serve di prova, che la impossibilità della nuova diminuzione della inassegnabile non deriva dalla sua natura, ma dal nostro limitato modo di vedere, o meglio dal nostro ipotetico modo di vedere.

324. Seguitiamo ancor per poco ad esporre i pensamenti di Eulero. Egli nel Cap. III, pag. 63, num. 84 succitata opera, scrive: = Avendo noi dimostrato che una quantità infinitamente piccola è una vera *cifra*, nasce il dubbio, perchè non adoperiamo una sola cifra per indicare tutte le differenziali, ma anzi all' invece adoperiamo diverse cifre per indicare diverse differenziali; tutti li zeri sono tutti fra di loro eguali, sembra dunque inutile indicarli con diversi segni; (e risponde): sebbene due cifre siano tra di loro così eguali, che la lor differenza riesca propriamente zero, tuttavia esistendo due modi di comparazione, aritmetico l' uno e geometrico l'altro, del primo de'quali la comparazione si risolve in differenza, e dall'altro in quoziente, la ragione aritmetica tra due cifre quali si vogliono sarà di uguaglianza, o zero differenza, ma tale non sarà la loro ragione geometrica.

Questo facilmente si intenderà da questa proporzione geometrica $2 : 1 :: 0 : 0$, nella quale il quarto termine è zero, come anco il terzo. Dalla natura poi della proporzione, il primo termine essendo doppio del secondo, ne viene di necessità, che anco il terzo sia doppio del quarto =.

E nel numero 85 prosiegue: = Queste cose sono apertissime anco nella comune aritmetica; imperciocchè è noto ad ognuno, che ogni cifra per qualunque numero moltiplicata produce una cifra, e perciò essere $N. 0 = 0$; da cui si ricava, $N : 1 :: 0 : 0$. Onde appare cosa chiara potersi dare, che due cifre aventi tra loro qualunque ragione geometrica, queste considerate aritmeticamente la loro ragione

sia sempre quella dell'uguaglianza, o zero differenza. Potendo dunque esistere tra le cifre qualunque ragione, perciò si adoperano ad indicare questa diversità di ragione anco diverse cifre, e specialmente allorquando si tratta di venire in cognizione della loro ragione geometrica.

Nel calcolo poi delle quantità infinitamente piccole, di nient'altro si tratta se non che di conoscere la loro ragione geometrica, pel qual negozio se non adoperassimo quindi diversi segni cadremmo in gran confusione, e non si potrebbe trattare o maneggiare questo calcolo =.

E nel num. 86 continua : = se dunque giusta il metodo adottato nell'analisi degli infiniti, si indica la quantità infinitamente piccola per dx, sarà tanto $dx = o$, quanto $adx = o$ indicando a quantità finita.

Ciò non ostante la loro ragione geometrica $adx : dx$ sarà finita, cioè come $a : 1$; e per questo motivo queste due grandezze infinitamente piccole, sebbene ognuna eguale a zero, tuttavia tra di loro non si potran confondere, quando si voglia aver riguardo alla loro ragione. Per simil modo, se si hanno due diverse quantità infinitesime dx, dy, sebbene ambedue = o, tuttavia non è nota la loro ragione; ma nella ricerca della ragione che passa tra queste due infinitesime, tutta consiste la forza e l'appoggio del calcolo differenziale; e benchè l'uso di questa comparazione sembri a prima giunta tenuissimo, tuttavia si trova esser estesissimo, e sempre meglio di più in più si rende manifesto =.

325. Esaminiamo con filosofia queste opinioni di Eulero. Pare che non abbisogni molto acume di ingegno per comprendere, che questo sommo geometra nei ragionamenti or ora arrecati si aggiri in un aperto equivoco. La proporzione qui sopra ricordata $2 : 1 :: 0 : 0$ è ripugnante; perchè uno zero non può esser doppio di un altro, e questa ripugnanza è tanto manifesta che non abbisogna di commenti per renderla palese.

Dal principio comune, che qualunque grandezza moltiplicata per zero somministra un prodotto zero, principio evidente, se ne ricava bensì $N \cdot O = O$; ma con questa precauzione, che nel caso presente questa espressione, che ha forma ed aspetto di equazione, non esprima veramente equazione; perchè manca nei due membri, (che la rappresentano) quello stato o sentore di grandezza che necessariamente è richiesto a costituire l'eguaglianza, o l'equazione. Ora da ciò ne viene, che sebbene in massima ogni equazione possa esser convertita in proporzione geometrica, o meglio, sebbene sia vero, che da una qualunque equazione, se ne possa ricavare una proporzione geometrica, tuttavia da questa, che non è equazione, ma pura larva di equazione, è manifesto inganno, ed aperta insussistente pretensione, quella di volerne ricavarne una proporzione; quindi si può apertamente ritenere che la $N : 1 :: O : O$ sia all'in tutto una proporzione falsa, insussistente ed assurda, specialmente considerata in riguardo alla di lei derivazione. Più è proporzione inamissibile perchè derivata non da una equazione, ma da una forma di equazione al tutto scempia, e perchè alla fin fine riducesi a significare, che il niente è eguale al niente. E sia finalmente anco notato, che quando ci riduciamo incautamente ad ammettere di questa sorta di proposizioni senza significazione, anzi assurde, ci mettiamo sempre dal lato dell'errore, e camminiamo sempre su la via delle illusioni e degli inganni.

Nel num. 86 prosiegue il suo dire sempre appoggiandolo sopra il medesimo equivoco, perchè scrive: = Se dunque come si usa nell'analisi degli infinitesimi, si noti o si scriva dx per indicare una quantità infinitamente piccola, sarà tanto $dx = o$, quanto $adx = o$, denotando a una nuova grandezza finita; tuttavia la ragion geometrica $adx : dx$ sarà finita, cioè come $a : 1$, e perciò sebbene queste due infi-

nitesime quantità dx, ed adx siano ambedue eguali a zero, tuttavia non si posson confondere tra di loro, quando si voglia aver riguardo alla loro ragione. Similmente se occorrono diverse grandezze infinitesime, come sono dx, e dy, sebbene ambedue eguali allo zero, tuttavia di loro non si conosce la ragione. =

Ma osserviamo, come Eulero in questo suo dire si aggiri sempre sopra lo stesso equivoco, di voler cioè trovare ed ammettere una ragion geometrica tra grandezze nulle, o zeri; di fatti, la comparazione delle grandezze qui sopra ricordate che sono dx = adx darebbe ancora $a = \frac{dx}{dx} = \frac{o}{o}$; equazione, che meglio larva di equazione insignificante ed insussistente si deve ritenere; in fatti tanto la moltiplica di un zero per un altro, quanto la divisione di un zero per un'altro, sono cose assurde e inconcepibili. Lo stesso è a dirsi di $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o} = 1$. Le ragioni in fine che si addicono alle grandezze tra di loro comparate non possono avverarsi delle non grandezze. Il che basta a far conoscere in quanta sconvenienza d'idee traducono il pensamento.

526. Oltre di queste filosofiche osservazioni, le quali fanno conoscere l' insussistenza della filosofia di questo geometra; rimane a considerarsi, che facendo egli l' infinitesimo precisamente eguale allo zero si allontana dal pensamento di tutti gli altri geometri; imperciocchè non è mai stato alcun geometra il quale abbia ritenuto che una grandezza infinitamente piccola fosse zero, prescindendo dalla comparazione di essa colla grandezza finita. Euclide si accontentava di dire, che la minor di ogni data si poteva considerare come zero, ma solamente allora che veniva pesata, o valutata in com-

parazione alla grandezza finita. Archimede fece sempre lo stesso, ragionando delle prime ed ultime ragioni, dei limiti, delle esaustioni.

Oltre questi due sommi, possiam dire, che egualmente la pensarono Galilei, Wallis, Fermat, Barrow, Keplero, Newton e Leibnitz, e tutti gli altri; e di questa universale opinione il solo Galilei è quegli, che tentasse e riuscisse a darne la miglior dimostrazione dell'incapacità nella quale si trova la grandezza infinitamente piccola di alterare il valor della quantità finita. E quando riandiamo la ragione per la quale la universale dei matematici non considerò mai la infinitesima, come un verace zero, si conosce, che si fu per non cadere in un contrasenso, come è quello di trovarsi obbligati ad ammettere delle ragioni o dei rapporti, tra gli zeri, tra i quali queste ragioni sono sempre impossibili.

327. Eulero pare che procuri con altri ragionamenti di convalidare e render verosimili questi paradossi filosofici, invitando i lettori a considerare che il valore della frazione $\frac{1}{z}$ è tanto più grande, quanto più piccola è la z. E nel caso che z sia minore di ogni assegnabile, il valor della frazione $\frac{1}{z}$ diviene maggiore di ogni assegnabile. Tutto questo discende precisamente dalla posizione qui premessa. Così quando fosse $z = \frac{1}{\infty}$, il valor di una tale frazione sarebbe $\frac{1}{\left(\frac{1}{\infty}\right)} = \frac{\infty}{1} = \infty = \frac{1}{z}$.

Ora benchè altrettanto con le debite restrizioni si possa ammettere queste equazioni, appoggiandoci sopra la comune nozione dell' infinitesima o dell'infinito, tuttavia non si può dimostrare che altrettanto sia vero, quando in luogo dell' infinitesima noi vogliamo porre lo zero, perchè allora si ha $\frac{1}{\left(\frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{0}$ (giacchè secondo Eulero $\frac{1}{\infty} = 0$) ed anco la seguente $1 = 0$, $\infty = 0$, il che ripugna; onde si appalesa apertamente, che Eulero nulla può guadagnare con queste considerazioni.

328. La sconvenienza delle idee, che ravvisiamo in queste posizioni di Eulero dipende dal voler ritener zero lo infinitesimo, e dal voler ammettere delle ragioni tra gli zeri; più deriva anco in parte dall' aver egli immaginato le sue evanescenti sotto forma di quantità per una parte, e per l'altra sotto quella di zero, il qual modo di disarmonia rifluisce anco su le idee e sopra i suoi ragionamenti. Si dice che ha voluto dare incautamente questo doppio aspetto all'evanescente, perchè la sua variazione w attribuita alla x ed alle funzioni di x aver deve per necessità qualche sentore di grandezza, poichè senza questo, la variazione della x sarebbe un sogno; ed intanto dopo ciò deve esser anco nulla la w acciò possa essere ritenuta o considerata come zero.

329. Le ragioni, che ci siamo qui permesse, risguardanti la filosofia, o la metafisica, che il grande Eulero ha creduto di introdurre nelle posizioni fondamentali del calcolo sublime non scemano in noi e non scemeranno mai quella profonda estimazione, che sentiamo per questo veramente sommo matematico, il quale fu per lo meno uno de'più grandi tra quelli che promossero l'analisi sublime.

Per altra parte i principii de'quali si è servito per fondare questa sua metafisica del calcolo, nulla tolgono all'esattezza del medesimo, perchè tutto appoggiato e conformato al metodo leibniziano. Onde chiuderemo il dire intorno Eulero con la seguente onorificentissima sentenza di Condorcet, esso pure grandissimo geometra : = Eulero fu uno degli uomini più grandi, e dei più istraordinarii che la natura abbia giammai prodotti, del quale l'ingegno fu egualmente capace dei più grandi sforzi, e del lavoro più continuato, onde perciò moltiplicò le sue produzioni al di là di tutto ciò, che aspettar si poteva dalle forze umane, e che nel medesimo tempo riuscì nuovo in ogni parte; che ebbe la mente sempre occupata e calma, e che per una ventura, per mala sorte troppo rara, riuscì e meritò di riunire una felicità quasi senza nube a una gloria, che non venne mai contestata =.

330. Arbogast, nella sua bellissima opera stampata in Strasburgo nel 1820, intitolata *Du calcul des derivations*, imprende a considerare il calcolo delle derivazioni sotto un aspetto tutto generale, e le dottrine che vi impiega, non che tutti i laboriosi calcoli che le contengono e le esprimono, come pure le molte e nuove applicazioni che fa di queste dottrine nelle derivazioni, lo dimostrano un geometra grande e versatissimo nella dottrina specialmente delle serie.

Per derivazioni egli intende di esprimere l'arte analitica di derivare le variazioni di tutte le fonzioni svolte in serie non che tutti i termini delle serie cui danno origine le variazioni di qualunque maniera attribuite alle funzioni di qualsivoglia natura esse siano.

Di queste dottrine intorno le derivazioni o derivate, egli ne aveva già molti anni prima presentata una lunga Memoria all'Accademia delle scienze di Parigi.

331. Questo gran scrittore di scienza analitica, benchè

direttamente non impugni il principio e le dottrine del calcolo differenziale, e benchè non pretenda sostituire alla metafisica di questo calcolo un' altra dottrina diversa da quella di Leibnitz, come una dottrina che possa essere più semplice o chiara, vorrebbe però almeno far credere, che il calcolo differenziale non sia che un caso particolare e concreto del calcolo delle sue derivate.

Nell'art. 6 pag. 305 della succitata sua opera, si esprime nel seguente modo: = Si vede adunque che i casi nei quali queste quantità istesse sono legate tra di loro, sia derivando realmente le une dalle altre, come le differenziali $\frac{dx}{1}, \frac{dx^2}{1 \cdot 2}$ ec. sia altrimenti, sono comprese nel calcolo generale delle derivazioni, e che così il calcolo differenziale può esser risguardato come un caso particolare del calcolo delle derivazioni =.

332. Noi riteniamo che Arbogast siasi altamente ingannato in questo suo modo di vedere, perchè lo sviluppamento delle funzioni in serie ed il precipuo loro andamento nei termini, era conosciuto anco molto avanti di Newton e di Leibnitz, e particolarmente si trovano le serie sotto ogni riguardo maestrevolmente trattate da Wallis nelle sue opere matematiche. Nello sviluppamento delle serie, o meglio, nello sviluppamento delle funzioni in serie, si devono ben distinguere due separati oggetti, i quali sono di natura molto diversi: 1.° la derivazione o piuttosto la filiazione dei termini costituenti l'architettonico, o la forma ordinata delle serie; 2.° il valor successivo dei termini il quale in una identica serie presenta un rapporto costante, specialmente nelle serie geometriche procedenti all' infinito, ma rapporto che può avere diverso valore, secondo la diversa natura della funzione, e molto più secondo il diverso valor della variazione, o di amendue riunite. Ora Arbogast ha benissimo dimostrato, che

l'andamento delle serie nei loro termini, a valore indeterminato, era sempre lo stesso, e nell'uniforme loro procedimento abbracciava (in modo però indeterminato) tutti i casi contingibili, i quali possono risultare dai diversi stati o dalle diverse variazioni della funzione; ma questo si avvera solamente in sino a tanto che la funzione e la variazione, e specialmente quest'ultima sia considerata in astratto e in maniera indeterminata, e solamente come capace a dar origine a funzioni derivate simmetriche, e di una regolare fisionomia architettonica analitica; poichè allor quando si voglion considerare la funzione e la variazione in relazione a tutti i diversi possibili valori che ad esse si possono attribuire, allora i rapporti dei termini presentar possono cangiamenti e valori tali, da alterare sostanzialmente l'ordinario valore di questi rapporti, e quello dei consecutivi termini della serie. Imperciocchè si fa presto a dire in generale che dalla x, o dalle di lei funzioni si deriva la $\frac{dx}{1}$.

poi la $\frac{dx^2}{1 \cdot 2}$; indi la $\frac{dx^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, e così prosiegui. Qui la relazione architettonica delle funzioni derivate è simile a quella delle funzioni derivate finite; ma i rapporti, o le ragioni che passano tra le funzioni derivate dx, dx^2, dx^3, dx^4 ecc. dipendendo dal valore infinitesimo della dx; questi termini allora non hanno più un valor finito, ma bensì un valor infinito relativo, per cui la dx è infinitamente maggiore in comparazione della dx^2, quest'ultima infinitamente maggiore in confronto della dx^3, e così segui. Questi valori infiniti gli uni rispetto agli altri, cangiano, o sospingono tutti i rapporti o le ragioni finite dei termini delle serie nell'ordine degli infiniti; la qual cosa induce nelle serie delle condizioni tutt'affatto particolari ed al tutto diverse da quelle dei valori finiti,

quindi danno all' andamento generale di uniforme conformità delle condizioni eccezionali, e che nulla hanno di comune con tutti gli indefiniti altri valori finiti.

333. Non basta adunque che la forma materiale dell'andamento della serie si accomodi anco alla sostituzione intellettuale dei valori infinitesimi attribuiti alle derivate in causa dei valori infinitesimi dati alla variazione o posti in luogo della variazione, poichè per aver diritto di considerare questa sorta di valori, come uno dei casi particolari indefiniti, che la funzione indeterminata x e la sua variazione dx possono assumere nello svolgimento in serie, esigerebbe che l'infinito e l'infinitesimo fossero un caso particolare della grandezza finita.

Ed acciò che l'andamento di tutti i termini e delle loro reciproche ragioni o rapporti, si mantenesse sempre (benchè sotto forma indeterminata) lo stesso in tutto il corso della serie sarebbe necessario che rimanesse sempre dell' ordine finito; ora quando poniamo v. g. in luogo della variazione una infinitamente piccola quantità segnata per dx allora i rapporti o le ragioni dei termini successivi della serie escono tutti fuori dell'ordine finito, divenendo anzi tutti infiniti nel loro valore, d'onde ne viene, che in luogo dei generali indeterminati rapporti, per questa particolare sostituzione o per questo particolar valore attribuito alla variabile e sua variazione, noi gli abbiamo tutti successivamente infiniti; per la qual cosa, l'animo nostro vien introdotto in un mondo tutto nuovo di ideali quantità che relativamente sono tutte infinitesime riguardo alle antecedenti, e le precedenti tutte infinite relativamente alle susseguenti.

Poste adunque queste innegabili verità, come mai si può dire in buona filosofia, che le differenziali dx, dx^2, dx^3 ec. siano da considerarsi nelle serie ordinarie communi, come un caso particolare dello sviluppamento delle funzioni ordi-

narie finite ed indeterminate? Come si può considerare che una serie contenente queste differenziali sia dell'ordine di tutte le altre indefinite, che hanno valori tutti finiti?

Quando la funzione $F(x)^m$ prova una variazione dx infinitesima si cangia in $F(x + dx)^m$, e svolta in serie presenta il noto sviluppamento $x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} dx + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m}{1} \frac{m-1}{2} \frac{m-2}{3} x^{m-3} dx^3 +$ ec.; nella quale il secondo termine divenendo infinitamente piccolo in comparazione del primo, ed il terzo in confronto del secondo, il quarto in riguardo al terzo, e così via via, si vuol dire, che la serie si può troncare a quel termine che più piaccia, e si posson considerare tutti i successivi termini come fossero di un valore insignificante e quasi nullo, comparativamente ai precedenti.

334. Da tutte queste certissime osservazioni ne conseguita, che la filosofia delle serie procedenti come qui è detto, è fondata sopra il concetto del quanto finito, dotato della proprietà del continuo, può ritenere una forma architettonica comune e simile alle forme delle funzioni finite e note, e può in quanto alla forma materiale della serie rappresentare od esprimere come caso concreto anco le funzioni differenziali; ma intanto convien confessare, che quando alla variabile della funzione si aggiunge un valore infinitesimo, allora le ragioni ed i rapporti dei termini sono per tal modo cangiati, che non si può più dire che la posizione del valor infinitesimo, la quale serve di fondamento al calcolo differenziale, possa esser considerata come un caso particolare delle formole generali di ordinaria derivazione ed attinenti all'ordine finito.

335. Forse alcuno dirà, che queste dottrine non sono

poi tanto evidenti quanto appajono; perchè, non sono forse le serie quelle che conducono all'infinitesimo, e quelle che guidano all'infinito? e se la cosa procede così, come si ha da credere, che esse non comprendano il caso del valore infinito e infinitesimo?

336. A queste osservazioni facilmente si fa risposta osservando, che l'infinitesimo e l'infinito considerati come risultamenti o quali effetti derivanti dalle serie non sono possibili, perchè le serie sono interminabili, e questi concetti essendo riposti ed appoggiati sul finimento delle serie divengono inamissibili. Laddove all'invece nel calcolo differenziale la infinitesima è tutta intieramente supposta; e se questo calcolo si appoggia soventi volte alle serie esso lo fa per facilitare le sue intellettuali speculazioni, piuttosto che per verace sentito bisogno o necessità, di ripetere la sua esistenza dalle serie.

337. Il calcolo differenziale in fatti, in quanto alle sue pratiche applicazioni non ha bisogno di molti termini delle serie, che anzi di regola ordinaria suole limitare la serie al secondo termine, o al terzo, o poco più, perchè l'ipotesi, che la variazione sia infinitesima rende i termini successivi infinitamente più piccoli, e come trascurabili in comparazione degli antecedenti, e quelli perciò si ommettono o non si curano nel calcolo come se non fossero. Anco per questa ragione adunque il calcolo differenziale non può esser considerato come un caso particolare dello sviluppamento generale delle funzioni in serie, ovvero come uno degli indefiniti valori che si posson porre in luogo della variazione della funzione.

La metafisica o la filosofia delle funzioni derivate, non può considerare il calcolo differenziale come uno dei casi ordinarii delle derivate, e quindi non può considerare il calcolo differenziale come partecipante della filosofia delle serie,

o delle derivazioni che le compongono. Non si niega però, che in quanto alla derivazione, considerata quale effetto delle note operazioni comuni, anco le cifre differenziali non siano dedotte o derivate dalla funzione primitiva proposta egualmente che tutte le altre funzioni finite, ma si niega, che in onta di questa comune maniera di derivazione rispondente alle comuni operazioni impiegate nel derivare i termini, si niega dico, che le differenziali rappresentino un vero caso particolare delle derivazioni delle serie finite.

338. Lagrange, sommo geometro, nella sua pregiatissima opera, che ha per titolo: *Théorie des Fonctions analytiques,* tenta dimostrare i principii del calcolo differenziale con le seguenti dottrine: = J' ai rappellé mes ancienne ideés sur ce dù calcul differentiel, et j' ai fait des nouvelles reflexions tendentes à les confirmer, ét à les generaliser; c' est ce qui a occasioné cet écrit =.

Nel ragionamento che faremo intorno al parere di questo grandissimo geometra deve esser allontanata perfin l'ombra di plagiario, a di lui carico, in riguardo ad Arbogast, il qual ultimo prima del Lagrange aveva presentato la sua *Memoria intorno alle derivate,* all'Accademia delle scienze di Parigi, e nella quale espone presso a poco le medesime idee di Lagrange; poichè Lagrange protesta bensì di sapere, che esisteva questa Memoria, ma di non averla mai nè veduta nè letta.

339. Venendo però a quello, che da vicino concerne le dottrine di Lagrange intorno alla filosofia del calcolo differenziale, ecco come egli scrive nella sucitata opera: = La maniera di dedurre da una data funzione delle altre funzioni derivate, e dipendenti essenzialmente dalla funzione primitiva è oggetto della più alta importanza nell' analisi. La formazione del calcolo di queste differenti funzioni sono, a parlare propriamente il vero oggetto dei nuovi calcoli, vale a dire del calcolo chiamato *Calcolo differenziale* =.

I primi geometri che hanno impiegato il calcolo differenziale, Leibnitz, Bernoulli, Hôpital ed altri, lo hanno fondato sopra la considerazione delle quantità infinitamente piccole di differenti ordini e sopra la supposizione, che si possono risguardare e trattare come eguali quelle quantità che non differiscono tra di loro che per una quantità infinitamente piccola, in loro confronto. Contenti di arrivare coi procedimenti di questo calcolo in una maniera spedita e sicura a risultamenti esatti, essi non si sono occupati di dimostrarne i principii. Quelli che son venuti dopo, come Eulero e D'Alembert, ec. han cercato di supplire a questo difetto, facendo vedere con pratiche applicazioni, che le differenze, che si suppongono infinitamente piccole, devono essere assolutamente nulle, e che i loro rapporti o ragioni, sole quantità che entrino realmente nel calcolo, non sono altra cosa che rapporti dei limiti delle differenze finite o indefinite.

340. — Ma convien confessare (prosiegue Lagrange) che questa idea, sebbene giusta in sè stessa, non è abbastanza chiara per servir di principio ad una scienza di cui la certezza deve esser fondata sopra la evidenza, e sopra tutto per poter essere presentata ai principianti. D'altra parte mi sembra, che nel calcolo differenziale, tale e quale lo si adopera, si considerino e si calcolino in fatti le quantità infinitamente piccole o supposte tali. La vera metafisica di questo calcolo consiste in questo, che il risultato di questa supposizione è rettificato e compensato da quello che nasce dai procedimenti medesimi del calcolo, secondo i quali non si ritengono nella differenziazione che le quantità infinitamente piccole del medesimo ordine; p. e. considerando una curva come un poligono di un numero infinito di lati, e ciascheduno infinitamente piccolo, del quale il prolungamento è la tangente della curva, egli è chiara cosa, che si fa una supposizione erronea, ma l'errore si trova corretto nel calcolo

per l'omissione che si fa delle quantità infinitamente piccole. Egli è ciò che si può dimostrare facilmente con degli esempii, ma dei quali sarebbe forse difficile darne una dimostrazione generale =.

Esaminiamo filosoficamente questi pensamenti del grande geometra Lagrange.

341. Primieramente noi riteniamo, che alcuni suoi pensamenti non siano conformi a verità, perchè non si può comprendere come possa chiamare erronea la supposizione, che pure è supposizione, e che ritroviamo in Euclide, in Archimede, in Galilei, in Wallis e generalmente in tutti i più grandi geometri, di considerare cioè, la curva come un poligono di infiniti lati, ciascheduno di essi infinitamente piccolo (se pure non intende erronea questa supposizione sotto l'aspetto che tende nulla meno che a distruggere di netto perfino ogni sentore di curva); ma se appella erronea la supposizione della curva denominata poligono di infiniti lati, qual profitto può egli ricavarne per istabilire che vi siano nel calcolo differenziale compensi di errori? Non entriamo per ora in questi dettagli, sopra dei quali ritorneremo in seguito.

342. Intanto cerchiamo di portare la nostra attenzione sopra lo scopo principale inteso da questo sommo geometra, che appunto è quello di sostituire una nuova metafisica a quella del calcolo differenziale dataci dagli inventori di esso. Egli in fatti annuncia la sua opera in questa maniera: = Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul differentiel, degagés de toute consideration d'infiniment petits ou d'evanouissans, de limites, ou des fluxions, et reduit à l'analyse algebrique des quantités finies =. La prima edizione delle Funzioni analitiche era dell'anno V della Repubblica francese, ma anco prima, cioè nel 1772 aveva letto una Memoria all' Accademia di Berlino nella quale parimenti annunciava che la dottrina dello sviluppamento

delle funzioni in serie conteneva i veri principii dimostrativi del calcolo differenziale, e questi principii scevri da ogni considerazione di quantità infinitamente piccole, di limiti, di evanescenti, di prime ed ultime ragioni ecc. E lo sviluppamento generale che egli presentava delle funzioni in serie era del seguente tenore, che poscia ha ritenuto ancora nella sua opera delle funzioni analitiche qui sopra citata.

Si proponeva la F (x), intendendo significare per la F *funzione*. Ora se questa funzione prova una variazione indicata per j si avrà la funzione variata ridotta a questo sviluppamento ed espressa per $F(x + j) = fx + pj + qj^2 + rj^3 + $ ec. ec., ove le p, q, r, ec., fanno le veci dei coefficienti, ed ove la j sta in luogo della dx quale trovasi nello sviluppamento: $F(x + dx) = f.\ x^n + f.\ n\ x^{n-1}dx$ ec. ec. (Num. 333). Qui le j, j^2, j^3, j^4, ec. occupano il luogo delle dx, dx^2, dx^3, dx^4 ecc., e le p, q, r, s, ec. quello delle coefficienti. $\frac{nx^{n-1}}{1}$, $\frac{n}{1}\ \frac{n-1}{2}\ x^{n-2}$ ecc.

Ora Lagrange facendosi a ragionare sopra la sua formola di sviluppamento della funzione variata F (x + j), dice: = Si può sempre prendere la j così piccola nel valore, che ogni termine della serie riesca sempre maggiore della somma di tutti quelli che vengono dopo di pj ; si deve risguardare questo teorema come uno dei principii fondamentali della dottrina della teorica, che noi ci proponiamo di sviluppare. Se lo suppone tacitamente anco nel calcolo differenziale, ed in quello delle flussioni, ed è per questo motivo, che si può dire, che questi calcoli hanno il loro maggior pregio e specialmente nelle applicazioni ai problemi geometrici e meccanici =.

243. Ora consideriamo un poco attentamente questi suoi pensamenti i quali risguardano direttamente i suoi cal-

coli, e servono loro di verace sostegno. Ritorniamo alla serie lagrangiana $F(x + j) = f x + p j + q j^2 + r j^3 +$ ecc. ecc. Siccome Lagrange vuol sostituire il calcolo delle funzioni al calcolo detto differenziale, e nel quale la funzione F

$$(x + dx)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} dx + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} x^{n-2} dx^2$$

contiene la variazione dx infinitesima, perciò vediamo in qual modo e con quale filosofia possa la j rappresentare la dx, la j^2 la dx^2 e così via via; cioè possa la j rappresentare la differenziale in discorso, stando ed essendo la j e le sue successive funzioni sempre quantità finite algebriche.

L'autore delle *Funzioni analitiche,* era troppo avveduto per non comprendere pienamente, che il vantaggio che presentano le differenziali nello sviluppamento della $F(x + dx)^n$ in serie, consisteva nel rendere i termini successivi infinitamente minori degli antecedenti, ed in questo stava riposta la possibilità di ommettere tutti i termini successivi dello sviluppamento, ritenendo quelli o quello solo, che occorreva alla ricerca, che si imprendeva da fare.

Ora per poter porre in luogo della dx nello sviluppamento qui sopra, eseguito sopra la nozione della dx infinitesima, per poter porre, diciamo, la indeterminata j, rappresentante la dx, fa duopo che si possa ommettere nella serie $j p + j^2 q + j^3$ ecc., que'termini, che a noi piace, onde raggiungere le conclusioni, alle quali con tanta semplicità arriva il calcolo differenziale.

Ecco dunque la ragione per la quale si dice da Lagrange, che la sua idea di considerare la j tanto piccola (senza però esser nulla), per cui ciascun termine della serie qui sopra divenga più grande della somma di tutti i seguenti costituisce un teorema fondamentale delle funzioni analitiche

ed un teorema tacitamente supposto nel calcolo differenziale.

Si supponga adunque, inerendo alla sua ipotesi, si supponga la j piccola quanto si voglia, però tale sempre, (per posizione) nella sua piccolezza, che si verifichi, che essa j è quantità algebrica finita, perchè nelle funzioni analitiche i principii del calcolo differenziale sono *dégagés d'infiniments petits, et reduits à l'analyse algebrique des quantitées finies ;* ora in tale supposizione, quando si verificherà, che assunto v. g. il termine jp, questo riesca non solo maggiore sensibilmente della somma di tutti i successivi $q\,j^2$, $+\,r\,j^3 + s\,j^4 +$ ecc. ecc., ma abbia anco una maggioranza tale, che tutta la serie delli successivi si presenti in minoranza sì rimarcabile da poter esser considerata questa serie di tutti i termini $j^2 + r\,j^3 +$ ecc. come nulla o di niuno finito sensibile valore ? Quando sarà vero che si possa in forza di questo teorema fondamentale considerare la serie $F\,(x + j) = F\,x + p\,j + q\,j^2 + r\,j^3 + s\,j^4 +$ ecc., ridotta anzi limitata ai due soli termini $f\,x + p\,j$, e tutto questo in causa del tenue, ma algebrico valore dato alla j? Non occorrono su questo punto d'analisi, lambicate e profonde vedute, per comprendere ed appieno conoscere, che sino a tanto che la j è dell'ordine algebrico finito, il termine j p, è finito, e che anco la somma dei successivi termini $q\,j^2 + r\,j^3 +$ ecc., è sempre di valor finito, anzi è certo che ognuno di questi termini istessi considerato anco da solo è di un valor finito.

Ora a fine che il nuovo calcolo delle funzioni analitiche possa soddisfare allo scopo cui soddisfa il calcolo differenziale, cioè a fine che si possa ottenere per mezzo della j o meglio del di lei valore, quella esattezza e quel rigore di esattezza che si ottiene con la differenziale dx, conviene che la j sia posta in parità di circostanze o meglio in parità

di valore colla dx, altrimenti non si potrà mai pretendere di soddisfare alla posizione della dx con la posizione della j. Imperciocchè ognuno sa, che nel calcolo differenziale si pone la dx in luogo di j per questa serie; e la dx^2 in luogo della j^2; la dx^3 in luogo della j^3 ecc. ecc. Nel calcolo differenziale si ritiene come nullo il valore della dx in confronto della x, come nullo il valore della dx^2 in paragone di quello della dx; e come insignificante quello di dx^3 in faccia di quello della dx^2, e così segui.

344. Ora se queste ipotesi relative ai valori degli infinitesimi di tutti gli ordini, sembrano non avere tutto il desiderabile rigore di ragione, perchè le quantità infinitamente piccole di primo ordine si ritengono e si trascurano come fossero nulle in comparazione delle quantità finite, e quelle infinitamente piccole di secondo ordine come nulle, poste che siano a petto delle infinitesime di primo ordine, come mai diciamo, si potrà poi rinvenire rigor geometrico nella ipotesi di Lagrange, nella quale invece di supporre, nella serie il valore della j infinitamente piccolo, si accontenta all'invece di supporlo solamente assai piccolo, e tale che basti a fare, che il termine contenente la j riesca in modo indeterminato solamente maggiore della somma di tutti i termini successivi? Potrà forse esser permesso in filosofia e sopra queste basi, di considerare come nullo od insignificante il valor della somma di tutti i termini successivi della serie', che vengono dopo il termine p j? La terra che è più di un milione di volte più piccola del sole, sarà forse da considerarsi come un bel non nulla in confronto al sole? In tutte le ipotesi possibili di diversi o tenui valori attribuiti alla j, se quello viene escluso di infinitamente piccolo, come poco esatto e rigoroso, non è chiara ed aperta cosa che tutti gli altri, niuno eccettuato, saranno in suo confronto inettissimi anzi inesattissimi? Non occorre essere forniti di una grande

penetrazione per comprendere di buon ora, con quali insufficienti principii si tenti fondare e stabilire la metafisica o la filosofia del calcolo delle funzioni analitiche? Nè deve a nessuno apparire strano pensamento il nostro di chiamare cioè a comparativo esame la j che si trova nelle funzioni di Lagrange con la dx che risiede nel calcolo di Leibnitz, perchè avuto riguardo, che nelle funzioni analitiche le serie, e specialmente la variabile j è destinata a rappresentare in esse la variabile dx del calcolo differenziale, ed a rappresentarla senza alcuna nozione di grandezza infinitamente piccola, apertamente si comprende, che la j finita algebrica e tenuissima, dovrebbe prestare tutto ciò che Leibnitz otteneva dalla sua soggettiva posizione della dx infinitesima, il che ripugna.

345. E circa questo matematico oggetto non dobbiamo illuderci imaginando coi fautori di Lagrange, che nella condizione indeterminata della j si comprenda anco il caso, che essa abbia un valore infinitamente piccolo, o un valore presso che nullo; poichè in tal caso contradirebbero apertamente alle dottrine di Lagrange istesso, nelle quali espressamente dichiara, che esse presentano una filosofia sgombra al tutto da ogni nozione di infinitamente piccoli valori e di evanescenti, di limiti ec. ec. Poi qui si tratta di sapere, se una serie ove entra la j indeterminata, possa servire a fondare la filosofia che regna nel calcolo differenziale, nel quale oltre tutto ciò, che ne risguarda il valore della dx, la stessa dx si suppone pienamente determinata.

Se noi diamo alla j un valor nullo, tutta la serie si annienta e resta la sola funzione fx invariata. Se diamo alla j un valore qualunque finito algebrico, ancorchè tenuissimo, questa nostra posizione renderà bensì in molti casi la pj maggiore nel suo valore che la somma di tutti i termini successivi, ma questa maggioranza di valore non autorizzerà mai nessuno a trascurare il valor minore della somma di

tutti gli altri termini, perchè presentando per necessità un valor finito per l'attribuito finito valore alla j, riuscendo, diciamo, la somma degli altri termini anch' essi di valor finito, non sarà mai lecito trascurare una quantità finita minore in comparazione di una quantità finita maggiore. E quando vogliamo dare alla j un valore equivalente alla grandezza infinitamente piccola, allora il termine pj della serie lagrangiana sarà bensì infinitamente maggiore del valor della somma di tutti gli altri successivi, ma è cosa aperta, che in tal caso questa ultima posizione incontra e s' abbatte in due insormontabili ostacoli; prima si appoggia al valore infinitamente piccolo dichiaratamente escluso dall' autore delle funzioni analitiche; secondo, cade apertamente in un circolo vizioso di provare e stabilire la filosofia dell' infinitesimo coll' infinitesimo, e del calcolo differenziale con la dottrina del medesimo.

346. Lagrange in questa sua bellissima ópera ha chiarito il metodo delle deduzioni, e delle derivazioni delle funzioni analitiche, e sotto questo riguardo merita lode ed estimazione non poca; ma questo pregio della sua opera risguarda unicamente l'andamento delle serie, cioè la nuova derivazione delle funzioni successive, che compongono la serie, e non concerne se non l'ordine finito e finito relativo valore delle derivate funzioni o il loro finito rapporto; perciò questa sua bellissima maniera di derivazione è affatto estranea alla filosofia del calcolo differenziale, il quale si fonda tutto esclusivamente sopra il valore infinitesimo attribuito alla variazione ideale di x, espressa per dx.

347. Se gli ammiratori delle dottrine lagrangiane avessero distinto la derivazione analitica delle funzioni dal loro relativo valore, cioè se avessero ben separato la forma materiale delle derivate dal valore che esse presentano e che possono rappresentare, si sarebbero facilmente accorti, che cadevano in un grande abbaglio, quando si imaginavano di scambiare

la filosofia che accompagnava la semplicità e l'eleganza delle derivate con la filosofia dei rapporti o delle ragioni delle derivate medesime, nei quali rapporti e ragioni è basata e tutta consiste appunto la filosofia del calcolo differenziale.

548. L'andamento dei termini della serie, i quali nascono dallo sviluppamento della F (x) si ritenga pure per esatto (in via di ipotesi), e sia precisamente espresso per $fx + pj + qj^2 + vj^3 +$ ec. ec.; (si dice solo in via ipotetica esatto questo sviluppamento, perchè riteniamo che abbiano un gran peso le ragioni che Wronski ha prodotto per confutare la legittimità di questo sviluppamento, sotto il riguardo che proceda solo secondo le potenze di j intiere, e non frazionarie, come appare dalla sua opera intitolata: *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, stampata in Parigi nell'anno 1813).

Ora dell'esattezza della $F(x + j) = fx + pj + qj^2$ ec. qual profitto se ne deriva per la filosofia del calcolo differenziale con questa supposizione? Certamente niuno.

In fatti inerendo nell'ipotesi che tale sviluppamento sia esatto, (giacchè allo scopo nostro nulla importa il titolo della rigorosa sua esattezza,) osserviamo, che la derivazione delle funzioni in esso compendiosamente espresse per mezzo dei coefficienti indeterminati, p, q, r, s, ecc. nulla ha di comune coi valori della j; (e per esser pienamente convinti di ciò, basta la sola osservazione, che la j vi è considerata come indeterminata), e pure dal valore attribuito alla j dipendono unicamente e sempre, in ogni singola serie, tutti i valori dei rapporti o delle ragioni dei termini da essa serie.

Nel caso di $j = 0$, la serie tutta si annulla; sostituendo in seguito tutti gli altri escogitabili valori finiti alla j la serie tutta sussiste, e tutti i termini di essa hanno tra di loro delle ragioni che sono sempre finite. Qualunque sia il diverso valore, che piaccia sostituire alla j nella serie, il

materiale o la forma analitica dei termini si mantiene sempre la stessa inalterata; ma quando si voglia dare alla j un valore infinitamente piccolo (come appunto si fa nel calcolo differenziale), allora le ragioni o i rapporti dei termini della serie escono fuori dell'ordine finito, e diventano infinitamente grandi. E quel che merita qui da esser ben rimarcato si è, che la forma analitica coi termini della serie si mantiene perfettamente la stessa inalterata; dal che ne conseguita, che solamente per aperta illusione noi possiamo indurci a credere di arrivare alle dottrine del calcolo differenziale appoggiandoci alle serie; poichè esse si mantengono le stesse e inalterabilmente le stesse nella loro forma analitica, qualunque sia il valore che ci piaccia di attribuire alla j il quale entra in tutti i termini delle serie meno il primo. La filosofia adunque del calcolo differenziale, che tutta riposa e risiede nel valore attribuito alla j non si deve cercare nelle funzioni dei termini, ma nei loro rapporti di valore infinitamente grande.

Ora tali valori non possono mai essere infinitamente grandi sino a che alla j si danno valori finiti algebrici; dunque nella dottrina dei valori algebrici ripugna, che possa esservi contenuta la filosofia del calcolo differenziale.

349. Queste ragioni servono a disinganno di coloro, che si inducono a voler ravvisare identità di filosofia delle funzioni derivate col calcolo differenziale.

Nè si creda, che si possa fondare questa identità in su la considerazione, che basti attribuire alla j nelle formole lagrangiane un valore il quale sia minor di ogni dato, perchè così adoperando si verrebbe ad escludere ogni filosofia dalle funzioni analitiche, le quali si limitano a valori algebrici finiti; poi ci appoggeremmo ad un vecchio principio, al quale qualche volta ebbero, e con poco loro onore, ricorso anche Leibnitz e Newton. Più il valore di quantità minore

di ogni data attribuito in tal caso alla j, sarebbe un valore che presenterebbe un concetto anch'esso indeterminato, e tale che lo farebbe escire fuori all'in tutto dell'ordine finito algebrico.

Noi ne abbiamo già discorso a sufficienza parlando di Euclide e di Archimede, e della matematica anteriore alla scoperta del calcolo sublime.

350. Poi abbiamo già più che a sufficienza fatto rimarcare, che nessuno può provare, che la minor di ogni data grandezza, presenti una idea od un concetto più chiaro e preciso della quantità infinitamente piccola, tanto più poi quando la minor di ogni data e la infinitesima si vogliano risguardare come nulle in comparazione della quantità finita.

Ma ritornando alle *Funzioni analitiche,* opera non mai abbastanza lodata, per i molti e bellissimi trovati analitici in essa spiegati, considerando, dico, quest'opera in relazione al fine principale contemplato dal di lei autore, a quello cioè di servire di filosofia fondamentale al calcolo differenziale, si vede, che la j qualche volta vi è considerata come zero ma questo caso nulla significa per il nostro fine, e tal'altra si dà alla j un valore assai piccolo, ed in allora il secondo termine delle funzioni espresse in serie e rappresentato per pj, può superare col suo valore la somma di tutti gli altri della serie che vengono dopo di lui. Ma in tutta questa indefinita varietà di valori, che attribuir si possono alla j, niuno può rappresentare la filosofia del calcolo differenziale.

L'ipotesi poi di que'geometri che son venuti dopo Lagrange e che hanno attribuito alla j un valor minore di ogni dato, credendosi essi settatori di Lagrange, in via di fatto si fanno seguaci di Leibnitz, il quale pure si ridusse qualche momento ed assai prima delle dottrine lagrangiane a questo passo di dichiarare, che la sua dx poteva esser

assomigliata alla minor di ogni data, ed in questa ipotesi si stabiliva $j = \frac{1}{\infty} = dx$, valori tutti espressamente esclusi dalla dottrina delle funzioni analitiche.

351. Non dimentichiamo adunque, che fino a tanto, che la j rimane di valore indeterminato, niuna induzione precisa si può ricavare, la quale serva a manifestare la relazione o la ragione che passa tra i termini delle serie; quindi insino a tanto che nello stupendo edificio delle funzioni non si avrà attribuito alla j un valore che possa dare alli termini o alle analitiche funzioni con cui sono espressi, un rapporto di valore infinito tra loro non potrà mai aspirare alla filosofia del calcolo differenziale, anzi nemmeno a qualsivoglia altra concreta filosofia.

352. Pare che questa sconvenienza di idee, che regna nelle funzioni analitiche, considerate in riguardo alle dottrine leibniziane si affacciasse anco alla mente dello stesso Lagrange, e specialmente quando si accinse a scrivere la seconda parte delle *Funzioni analitiche,* nella quale trovandosi egli appunto nel bisogno di determinare le sue idee indeterminate a fine di render le sue formole suscettive di applicazioni concrete, allora si fa vedere incerto o titubante. In fatti quando vuole incominciare le applicazioni delle funzioni alle curve, egli scrive: = Dopo che le curve sono state sottomesse all' analisi, allora anco le tangenti si sono considerate sotto diverso aspetto, cioè si sono considerate come se fossero delle secanti, delle quali li due punti di intersezione sono riuniti, o come il prolungamento di lati infinitamente piccoli della curva considerata come un poligono di un infinità di lati, o come la direzione del moto composto, pel quale la curva può esser descritta; e queste differenti maniere di considerare le tangenti hanno dato luogo

a'metodi algebrici fondati sull'eguaglianza delle radici delle equazioni, e ai metodi differenziali fondati sul rapporto delle differenze infinitamente piccole, o delle flussioni delle coordinate.-Questi metodi lasciano nulla a desiderare per la loro generalità e semplicità; ma queglino, che ammirano con ragione l'evidenza ed il rigore delle antiche dimostrazioni, si lagnano di non trovare simili vantaggi in questi nuovi metodi. La teorica delle funzioni che noi abbiamo esposto nella prima parte, ci pone in istato di trattare il problema delle tangenti, e gli altri problemi del medesimo genere, con le nozioni, e con i principii degli antichi, e di dare così ai risultamenti dell'analisi il carattere che distingue le loro soluzioni =.

333. In questo luogo Lagrange doveva riporre tutta la sua confidenza nelle sue dottrine analitiche, e non doveva raccomandarsi come qui fa alle dottrine antiche; le quali erano anche espressamente escluse dalla sua analisi sotto il nome di minori di tutte le date ecc. Tuttavia sorpassando queste cose che pure non sono frottole o piccolezze, ma son cose che disdicono la prima parte delle sue funzioni, veniamo a questo solo dilemma: o i metodi degli antichi si considerano rigorosi, ed in allora, prima dell'autor delle *Funzioni analitiche* vi eran ricorsi e Newton e Leibnitz, perciò non sarebbe veruna novità in questo metodo delle funzioni analitiche, ovvero quelli degli antichi erano metodi di non pieno rigore, ed in tal caso perchè accontentarsi di questi, per farli in questo luogo supplire all' evidenza del calcolo differenziale. Più ci pare che questa maniera di comportarsi di Lagrange, sappia non poco dell'indiretto e dell'oscuro, perchè egli dichiara semplici, generali ed esatte le soluzioni dei nuovi metodi infinitesimali, e poi ricorda che alcuni non trovando in esse il rigor degli antichi, si sono appigliati ad altre dottrine; indi dice, che le sue dottrine

pongono in istato di trattare il problema delle tangenti ed altri analoghi dietro le nozioni ed i principii degli antichi! cose tutte che non lasciano vedere intima connessione con la dichiarazione di voler ridur tutto alla semplice algebra finita; e non lasciano comprendere, come nella mente di questo grand'uomo l'idea di minor di ogni data, idea che ha dell'indeterminato, possa esser stata anteposta a quella incomparabilmente più filosofica e più precisa della quantità infinitamente piccola.

Ma veniamo alla soluzione che Lagrange ci presenta quando viene ad applicare le sue dottrine alle curve: = Per considerare (egli dice) queste quistioni di una maniera generale, sia $y = Fx$ l'equazione di una curva qualunque proposta, e $q = Fp$ l'equazione d'una linea retta o di un'altra curva che si voglia comparare alla prima; x ed y sono l'ascissa e l'ordinata della prima curva; p e q sono l'ascissa e l'ordinata dell'altra curva, riferite ai medesimi assi cui sono riferite le x ed y.

Acciò queste due curve abbiano un punto comune relativo all'ascissa x, bisogna, che facendo $x = p$, si abbia $q = y$; dunque $y = Fx$, e per conseguenza $Fx = fx$.

Ora per comparare queste curve al di là di questo punto, si metterà nelle loro equazioni $x + j$ in luogo di x e di p; e si avrà $f(x + j)$ e $F(x + j)$ per le ordinate rispondenti al medesimo punto dell'asse delle x, e allontanate della quantità j dell'ordinata, che passa per il punto commune. Dunque la differenza di queste ordinate sarà $F(x + j) - F(x + j)$, cioè sviluppando le funzioni, ed osservando che si ha in precedenza $Jx - Fx = o$, j

$$(f'x - F'x) + \frac{j^2}{2} x (f'' - F''x) + \frac{j^3}{2 \cdot 3} (f'''x - F'''x) + \text{ec.}$$

e questa differenza esprimerà la distanza dei punti delle due curve che corrispondono alla stessa ascissa $x + j$.

354. Si vede tosto in generale, che questa distanza sarà tanto più piccola, e per conseguenza le curve si avvicineranno tanto più, qnanto più saranno i termini che dispariranno, o s'annienteranno in sul principio di questa serie.

Quindi il ravvicinamento sarà più grande, se si ha Jx = F'x, cioè se le funzioni prime delle coordinate delle due curve diverranno eguali per la medesima ascissa x; e sarà più grande ancora se per di più le funzioni seconde J''x e F''x delle stesse coordinate diverranno egualmente eguali, e così segui.

Ma per comprendere più e più in che cosa consistano questi differenti gradi di appropinquamento, noi considereremo una terza curva qualunque, riferita ai medesimi assi per mezzo delle coordinate r ed s, e l'equazione delle quali sia s = Qr; e noi supporremo da principio, che essa abbia con le altre due un punto commune con la stessa ascissa x, ciò che esige che le ordinate a questa ascissa siano eguali, e per conseguenza, che si abbia Qx = Jx = Fx =.

355. Ognuno intende che qui Lagrange si pone in la via degli avvicinamenti, o delle approssimazioni, ma in pari tempo ognun s' accorge ancora, che non si trova avere in mano alcun risultamento rigoroso poichè il ricorrere allo impiccolimento della j, il quale per quantunque portato innanzi, non volendo contraddirsi convien lasciarlo sempre nel campo dell' indefinita piccolezza, e non mai infinita (come suppone di primo tratto il calcolo differenziale) e non volendo spingere la j a questo estremo, è costretto esibire delle semplici indeterminate approssimazioni là, ove il calcolo di Leibnitz tocca a'risultati finali e precisi.

E ponendo attenta riflessione alla realtà dell' annientamento dei termini della serie si vede che persino l' istessa possibilità di questo annientamento tutta dipende dal valore che si attribuisce alla j. Nessuno dei termini può sparire

stando finito il valore di j come pure stando indeterminato; perchè anco in quest'ultimo caso niun giudizio si può pronunciare con fondamento appartenente alla annichilanza dei termini.

Non essendo adunque nemmen possibile la disparizione di alcun termine della serie se non in forza di un valore analogo attribuito alla j, ne viene, che parlando a rigore il solo valor di $j = \frac{1}{\infty}$ porta che si possono ritenere come zeri tutti i termini successivi della serie, come quelli che sono tutti infinitamente più piccoli della $j = dx = \frac{1}{\infty}$.

Così il valore o il supposto della j eguale alla grandezza minor di ogni data, è quello che rende il termine pj maggiore della somma di tutti gli altri della serie.

Adunque dopo tutto il più elaborato apparecchio di funzioni analitiche, di derivate, di sviluppamenti in serie, se non si dà alla j un valore eguale a quello che Leibnitz dà alla sua dx, non potrà mai la j per verun conto fare le veci della dx, e starle a petto, nei risultamenti del calcolo; e per questo, ripetiamolo, la filosofia delle funzioni analitiche non potrà mai, non solo perfezionare, ma nè pure prendere il posto di quella del calcolo differenziale.

In vero, lo stesso sommo geometra Lagrange dopo molto uso e quasi lusso di formole analitiche e di bene ordinati relativi sviluppamenti delle medesime in serie, è costretto a confessare che: = a propriamente parlare, queste curve non coincidono che nel punto ove le ordinate sono eguali e l'eguaglianza delle funzioni prime, seconde ecc. di queste ordinate non le rende meglio coincidenti in altri punti, ma essa le fa solamente avvicinare di maniera, che

verun altra curva, per la quale la stessa eguaglianza non abbia luogo, non potrà passare tra esse; pag. 122, num. 112.

Queste stesse dottrine egli adopera nelle sue bellissime ricerche dei massimi, e dei minimi valori delle grandezze; pag. 152, 153 ecc. Nella stessa maniera si esprime, o almeno con simili dottrine alle pag. 154, 155, 157, ove tratta della applicazione delle sue derivate alla quadratura delle curve.

Così egli fa, alle pag. 174, 175, 188, 189, 202, 205, e più distintamente alle pag. 224, 225, ed in molti altri luoghi. (I.ª edizione, *Funzioni analitiche* an. V.) Si deve pure ancor ricordare la licenza che spessissime volte si prende di far uso delle grandezze, o dei valori di j minori di tutti li dati valori, concetti tutti impiegati dagli antichi geometri; con la qual licenza parrebbe che voglia far credere, che questi valori minori di tutti i dati, siano grandezze ordinarie algebriche finite, e quasi che usando di queste posizioni si possano conseguire evidentemente i valori che dipendono e derivano dalle grandezze evanescenti, o da quelli dei limiti, o delle infinitamente piccole.

356. Abbiam voluto arrecare in campo queste osservazioni non già per titolo di critica a quest'opera delle *Funzioni analitiche*, la quale non può mai essere soverchiamente lodata, ma unicamente per mettere sott'occhio al lettore che la base delle dottrine delle funzioni analitiche, non è base per verun conto atta ed opportuna a presentare la filosofia del calcolo differenziale e dei principii altissimi sopra dei quali questo calcolo si regge; e che l'unico caso nel quale le funzioni derivate o analitiche possono stare a petto o prendere il posto del calcolo differenziale o della filosofia che domina in esso, è quel caso solo ed unico, nel quale le funzioni analitiche, deposto il loro stato indeterminato, e deposta tutta la indefinita serie dei possibili valori finiti algebrici, esse

funzioni assumono e prendono, per così dire, a prestito i valori delle differenziali, o le posizioni istesse del calcolo differenziale; il che vuol dire, che le funzioni analitiche possono rappresentare la filosofia di questo calcolo nel solo caso che le j, j^2, j^3, j^4 ecc. si facciano rispondenti ed eguali rispettivamente alle dx, dx^2, dx^3, dx^4, ecc. una ad una cioè $j = dx$; $j^2 = dx^2$; ecc. ecc. e non mai sotto forma di valori algebrici finiti, come promette Lagrange nell' intestazione della sua opera.

Il che vuol dire, che il pensamento di Lagrange, di sostituire al calcolo differenziale le funzioni analitiche, è il più inetto che potesse esser concepito dal pensiero umano.

CAPO SETTIMO

Esame comparativo delle diverse opinioni dei geometri.

357. È giunto il tempo di comparare i ragionamenti dei matematici fra di loro e di porli su la bilancia, per così dire, della filosofia. E qui per filosofia non intendiamo indicare quella che si fregia di questo nome, ma che si perde dietro alle larve dell'idealismo, dello scetticismo, del panteismo ec., ma quella razionale ed irrefragabile, che serve a dare a tutte le nostre nozioni quel peso che esse meritano.

358. Le matematiche sino dal loro incominciamento si fondarono sopra principii ideali ipotetici astratti. Tale è il punto geometrico, tale la linea, la superficie, il solido. Questi concetti meramente soggettivi ed astrattissimi non hanno prototipi loro rispondenti nel reale oggettivo, ma sono tutta opera della nostra intelligente attività.

Questi enti o concetti razionali soggettivi si sono imaginati e ritenuti come essenzialmente rivestiti della proprietà del *continuo*. La nostra percipiente attività ha pure ideato un tempo ed uno spazio soggettivi, e perciò informati essenzialmente pur essi della proprietà del *continuo;* più a questo modo e sotto queste ideali condizioni si sono ammesse le entità numeriche, algebriche, algoritmiche, meccaniche, astratte, e tutte queste pure assoggettate pienamente alla proprietà del *continuo.*

359. Questi concetti primi mentali, considerati e ritenuti quali basi o posizioni fondamentali della scienza matematica, si sono ritenuti sempre quali precisamente si sono ideati e

posti, e ciò appunto, perchè con queste loro attribuite od assegnate proprietà divenissero suscettivi di essere pienamente sottoposti al principio evidente di nostra ragione il quale prescrive che una cosa non possa essere e non essere nel medesimo tempo.

Quindi al punto geometrico ripugnano tutte le dimensioni, alla linea la larghezza e la profondità, alla superficie od al piano geometrico la profondità ec. ec. Lo stesso si verifica di ogni altra entità fondamentale della scienza di cui si tratta, alla quale non competono che le proprietà ad essa attribuite.

360. Il creare l'esistenza, ed il determinare le proprietà assegnate a questi enti ideali ipotetici costituenti queste prime posizioni della scienza fu atto arbitrario della nostra facoltà intelligente, attiva e libera; il considerarli e ritenerli inalterabilmente quali si sono posti, fu atto di nostra volontà, ma necessariamente richiesto dal bisogno di potere così ad essi sempre applicare il principio di contraddizione di piena e perfetta evidenza.

361. Quando poi il nostro pensiero si ferma a contemplare la natura di queste sue arbitrarie posizioni, e cerca di scandagliarne tutta l'intima loro natura e di comprenderne tutta la filosofia che contengono, allora si ritrova innanzi ad un campo quanto vasto e nuovo, altrettanto impervio e di difficile discoprimento; perchè si ritrova in faccia a delle sue opere delle quali non ne conosce, nè la generazione loro, e non ne comprende adequatamente la stessa loro estensione od entità.

362. Il punto geometrico ideato e concepito come non avente veruna dimensione, ben addentro considerato in sè stesso, pare che si dilegui e sfumi innanzi alla nostra attività intelligente, allorquando essa si studia e si affanna a volervi riconoscere una qualche entità che crede avervi riposta.

Come può in fatti ravvisare alcuna cosa di sussistente in questa sua posizione la quale manca perfino di ogni sentore di grandezza? Dove è il geometra, che con ragionamento filosofico possa assegnare la differenza che passa tra il nulla ed il punto geometrico? E se niuna cosa lo distingue dallo zero, perchè fu ammesso e fu ritenuto per un'ente, ideale bensì, ma capace di indicare un sito della linea, e di ogni altra grandezza? Quando la nostra facoltà mentale lo ha imaginato come spoglio di tutte le dimensioni, cosa ha in esso collocato, che possa farlo considerare come un'ente, e come principio e base di scienza? Speriamo che ci verrà condonato il tedio di queste poche osservazioni, perchè proveremo, che alla fin fine sono queste, che danno vita a quella poca luce, che ci rischiara nelle più elevate speculazioni.

363. Tutti i geometri convengono nell'attribuire alla linea la dimensione della lunghezza, ricusandole tutte le altre dimensioni. Il concetto di questa linea, entità di lunghezza, a prima giunta pare facile e chiaro; ma quando fermiamo sopra di esso la nostra attenzione, siamo costretti a dimandarci: in qual maniera ci siamo potuti rappresentare una sì fatta grandezza lineare rettilinea? Cosa può mai essere questa lunghezza ideale indefinita priva di tutte le altre dimensioni eccetto quella di semplice lunghezza? Considerarla come prodotta o ingenerata dai punti geometrici non si può, anco in onta che si ritengano essi esistere in ogni sito della linea e nelle sue estremità. In fatti la linea ritenuta piena di punti, gli uni collocati e disposti a lato degli altri, questi punti per moltiplicati che si suppongano, fossero anco infiniti nel numero, non possono comporre o ingenerare la linea o una distensione, che la costituisca, come si è già detto num. 25. E quando questi punti si vogliano considerare cotanto stirati tra di loro, che tutti si tocchino, allora è gioco forza che si confondano in un punto solo; e ritenuto che siano

tra di loro poco o molto discosti, essi divengono affatto estranei alla lunghezza continua della linea, e sussistono, come dicevano anco gli antichi, solamente quasi modi saltuarii nella linea medesima, la quale è dimensione continua e non mai interrotta pei punti.

Ora se i punti sono all'in tutto inetti a formare la linea e quindi a somministrare un'idea della linea, sotto qual punto di veduta si puosson concepire ed ammettere nella linea? Al contatto non valgono a formarla, discosti o lontani, la suppongono bella e fatta; e siccome non esiste via di mezzo tra l'esistere dei punti nella linea, cioè tra l'esistere essi al contatto, o discosti, e se tanto nell'uno che nell'altro modo non giovano a farci conoscere la linea, qual'altro mezzo ci resta per idearne questa distribuzione o specie di esistenza dei punti della linea? E come mai si concepirà, che ogni luogo o sito della linea possa esser indicato o segnato dai punti? Eccoci risospinti sempre, anco dopo ogni considerazione in una confusione di idee, ed eccoci sempre rinchiusi in una specie di labirinto da cui non appare via alcuna al sortirne!

364. Nè si può concepire, che la linea sia segnata e prodotta dal movimento di un punto geometrico, il quale passi da un luogo ad un'altro, perchè questo movimento presenta tante difficoltà quante ci vogliono a gettar l'animo nostro nella più grande perplessità; imperciocchè, come intendere si può che al punto geometrico possa convenire il moto, come segnare una linea movendosi, se è privo, all'in tutto di ogni dimensione? Come può il punto passare da un luogo all'altro, mentre non occupa alcun luogo? E finalmente dato che si possa concepire, che il punto passi successivamente per tutti quelli luoghi, che si possono immaginare in sul corso di una linea, come avrà il potere di segnare la linea passando per que' punti che non valgono a produrla, nè a poterla ingenerare nè tampoco segnarla o tracciare?

365. Non presentandosi adunque al nostro animo niuna via la quale valga a condurlo alla formazione della linea, qual chiaro e preciso concetto sapremo formarsi di essa? Niun altro certamente fuor di quello che gli può somministrare la pura supposizione. Archimede sorpassando di netto la verace nozione della linea la supponeva intieramente e la definiva appoggiandosi cioè ad una sua proprietà, chiamandola: *il più corto cammino fra un punto ed un' altro;* ma come ognuno comprende che questa definizione è al tutto estranea alla natura della linea, e solamente ne inchiude una sua proprietà.

366. Nessuno ha forse mai posto attenzione, che la linea retta, che Archimede e tutti i geometri concepiscono distesa tra due punti o luoghi, e che si ritiene che li congiunga, niuno dico ha posto attenzione, che si può definire tanto per il più corto cammino tra questi punti, quanto per il più lungo; imperciocchè una sola è la linea retta che congiunger possa due dati punti; dunque perchè chiamarla la più corta piuttosto che la più lunga? Se fosse possibile congiunger due punti con più linee rette, allora si potrebbe anco riconoscere la possibilità, che una riuscir potesse più corta comparativamente alle altre, ma non essendone possibile che una sola, che sia retta in tutta la sua entità, ne viene, che la definizione del grande geometra or ora citato è insignificante. Probabilmente, anco il magno Archimede avrà detto: la linea retta esser il più corto cammino che congiunga due punti in riguardo o in comparazione delle linee spezzate o delle curve; ma in tal caso, che è poi l'unico nel quale sia vera la sua definizione, essa non annoncia una intrinseca proprietà della retta ma evidentemente una estrinseca relazione di essa, relazione desunta dalle linee spezzate o dalle curve.

367. L'oggetto però che più da vicino importa di considerare circa queste prime elementari posizioni della linea è la proprietà del *continuo* ad essa attribuita. Abbiam già

parlato di una tal forma intellettuale nel Cap. II. di questa filosofia. Qui non ci resta che a vedere, a quali considerazioni essa dia luogo, appropriata che venga particolarmente alla linea retta.

La forma ideale del continuo si appoggia per tal modo sopra la nozione dell'infinito, che da quest'ultimo ne deriva perfino la stessa sua possibilità. Altrettanto è abbastanza manifesto dal pensare, che questa proprietà del continuo pone nella grandezza lineare l'infinito aumento, l'infinita diminuzione, e l'infinita divisibilità.

Questa proprietà del continuo di cui n'è informata la linea, entra anco per questo solo aspetto a far parte di tutte le posizioni prime geometriche, quali sono le superficie, i solidi, ec. ec. e ci somministra un'alta idea della generazione ideale di tutte le grandezze geometriche di ogni maniera, presentandole come risultanti da infiniti elementi infinitesimi e generatori di esse. E ciò non basta, questa proprietà del continuo risospinge questi elementi generatori oltre ogni limite di lor piccolezza, atteso che tale proprietà è considerata dai geometri come essenziale, tanto alla grandezza, quanto a tutte indistintamente le sue parti generatrici e componenti.

368. Queste considerazioni, che legittime discendono da questa forma soggettiva del continuo, pare che avrebbe dovuto aprir gli occhi anco agli antichi (che furono i primi ad idearla e ad ammetterla) intorno a questa sublime nozione delle parti elementari e costitutive delle grandezze, e intorno alla necessità di ammettere l'infinito; pure la faccenda su questo oggetto non andò così. Resta dunque per noi una specie di mistero la premura con la quale gli antichi, sommi geometri e ragionatori, si sono sempre astenuti gelosamente dall'infinito e dall'infinitesimo. Euclide si presentò, in certo modo, come alla porta dell'infinito quando prescrivendo la

sua serie delle diminuzioni, dice: *e così si faccia sempre;* tuttavia noi lo vediamo far alto su questa via e fermarsi ad un punto non ben determinato, cioè là, ove supponeva, che la grandezza diminuitasi fosse pervenuta allo stato di minore di ogni data o assegnata. Si dice punto non ben determinato, perchè se gli potrebbe domandare, dove sia posto su questa via del *così si faccia sempre,* il limite ove pervenuta la grandezza diminuentesi sia divenuta minore di ogni data? Se questo limite non è in fine della via, cioè delle diminuzioni, cosa significa il suo dire: *e così si faccia sempre?* e se questo limite si pone alla fine della serie, dunque la serie è infinita e nel medesimo tempo anco finita, perchè ha un fine. Euclide non dichiara ove sia questo punto e nessuno ha pensato a fare altrettanto. Solamente vediamo, che egli era nel bisogno di comparare tra di loro delle grandezze tra le quali esisteva una differenza finita e che gli conveniva tòrre di mezzo con delle continue successive diminuzioni. Le diminuzioni perchè si presentassero sufficienti, anzi più che sufficienti alla nostra facoltà imaginativa le fondò sopra la proprietà del continuo, e sopra una legge geometrica interminabile. Ognun vede però che il procedimento delle diminuzioni da lui ideato, per divenire rigoroso geometricamente, non doveva arrestarsi che alla verace rigorosa consunzione di questa differenza, che intendeva ridurre al nulla. Ora il suo precetto di poter sempre fare così, escludeva la possibilità di finire questa diminuzione e di arrivare allo stato di zero differenza; perciò questo è di già una specie di equivoco non piccolo quando pure non si voglia più propriamente appellare inganno.

Più la stessa legge geometrica da esso proposta e che veniva mordendo la differenza continuamente, via asportandone parti finite di essa, era una tal maniera di diminuzione che sempre lasciava parte finita da diminuire, onde essa pure presentava una geometrica dimostrazione dell' im-

possibilità nella quale essa era di poter arrivare allo zero della differenza con questa serie.

369. Tuttavia insino dai più remoti tempi della nascente matematica si volle supporre, che questa legge di diminuzione portasse la differenza fuori dell'ordine finito, (giacchè tale necessariamente doveva essere l'altissimo supremo residuo inassegnabile, per poterlo considerare e trattare come zero). Si dice, che si volle supporre, ma anzi conviene dire, che si dovette supporre, perchè niuna dimostrazione essi arrecano nè seppero arrecare dello stato del valore minore di ogni dato proveniente come residuo dalla differenza finita. Si dovette pure supporre che rinvenuta, o meglio ammessa (per pura ipotesi), questo valore minore di ogni dato, esso fosse eguale allo zero.

370. Ora in queste ipotesi si ritrova forse quel rigor geometrico antico, cotanto decantato e ancora al giorno d'oggi cotanto ammirato da molti? Ovvero a queste ipotesi si posson forse, (come a sicure basi chiare, precise) applicare il principio di ragione evidente e in maniera che renda nel ragionamento qualche cosa di più di quello, che esiste nelle basi assunte? Le basi sono ipotesi, e ipotesi vestite dell'aspetto di verità dimostrate, ma sendo sole e purissime ipotesi ne viene e ne è sempre derivato e sempre ne deriverà la impossibilità di applicare queste ipotetiche posizioni a veruna concreta reale dimostrazione, quando prima non sia in maniera verace e concreta, comprovata la realtà o la verità di queste posizioni o supposizioni. Un'altra prova evidente e chiara che le dimostrazioni pratiche, fondate sopra queste posizioni non inchiudono rigore geometrico dimostrativo evidente, noi l'abbiamo dagli stessi geometri antichi i quali conoscendo, che il principio di contraddizione non poteva illuminare queste loro dimostrazioni con evidenza reale irrecusabile, ma solamente le rischiarava di una evidenza ipo-

tetica, essi, gli antichi, ebbero ricorso all' argomento ricavato dall' assurdo; ma questo argomento si è dimostrato riuscire ad una petizione di principio in molte applicazioni che ne fecero gli antichi, e specialmente quando lo adoperarono a sostenere le dottrine di cui trattammo nei num. 280, 281; perciò ecco comprovato quale e quanto sia tutto il millantato rigor degli antichi!

371. In aggiunta a ciò che si è detto ne' paragrafi 280, 281, osserveremo, che dato e non concesso, oppure supposto, che fossero arrivati alla grandezza minor di ogni data, restava loro un passo a farsi, ed era quello di provare, che essa, la minore di ogni data, fosse zero. Ora questa dimostrazione o questa prova manca, e tutta quest' ultima sentenza è supposta, giacchè è ridicola la pretesa di far sinonimo il non esser più possibile di diminuirla, coll' idea di zero.

372. Siccome però qui trattasi dell' argomento dall'*assurdo*, argomento innegabile in sè stesso e convincentissimo, vediamo qual profitto se ne ricavi dai geometri quando lo chiamano in sussidio delle dimostrazioni loro appoggiate sopra la dottrina della minor di ogni data.

Per ben comprendere a che cosa giovi questo celebre argomento in queste particolari dottrine, siaci permesso richiamare a memoria le principali circostanze nelle quali fu adoperato.

La mente col sottopporre a diminuzione indefinita la grandezza, ha sempre avuto bisogno di appoggiare a legge geometrica le diminuzioni, perchè solo con questa legge si tien aperta la via indefinita o infinita alle diminuzioni. Tal bisogno fu sentito da Euclide, da Archimede e da tutti quelli che hanno voluto mettersi su la loro via delle speculazioni. Una legge che va all' infinito, non può mai aver fine; dunque richiamare il pensiero sopra il fine di una così fatta serie geometrica, è richiamarlo sopra una cosa assurda. Un

così fatto ipotetico pensamento inchiudente il fine di questa serie, non può esser altro, che una ardita e stranissima assurda ipotesi: ipotesi, che essa pure ha bisogno di esser sussidiata da un'altra ipotesi cioè, che la minor di ogni data sia anco eguale allo zero. Sin qui adunque non siamo che sul campo delle ipotesi.

373. Un altra osservazione che ci interessa riguardo a questo metodo degli antichi è la seguente, cioè che i geometri appoggiati a queste ipotesi non potevano fare a meno di supporre e considerare la diminuzione diversa da quella che può e deve presentare un supremo residuo di grandezza finita, e quindi non erano in diritto di spogliarla della proprietà del continuo, la quale non perde, nè scema nè anco per poco la proprietà del continuo dopo qualsivoglia diminuzione. Esiste dunque nella supposizione degli antichi grave incongruenza di idee anco in forza di questa impreterribile osservazione, e questa incongruenza si riversa sopra le loro ipotesi. Galilei, Leibnitz, e tutti gli altri che vennero dopo ragionando su la loro infinitamente piccola grandezza, non rifiutarono mai ad essa la proprietà del continuo, anzi ve la riconobbero sempre tutta ed inalterata; dissero bensì, che in riguardo al di lei valore infinitamente piccolo, essa in questo stato diveniva incapace di alterare il valor di una grandezza finita, ma in pari tempo la riconobbero infinitamente divisibile nè più nè meno della grandezza finita. Questa maniera di vedere, e che discende legittima dalle premesse posizioni, è fondata sopra una filosofia irreprensibile: perchè tutti i termini della serie infinita sono sempre tutti indistintamente divisibili all'infinito, e tutti possono esser decomposti in serie infinita; come abbiam già notato; ragion dunque vuole, che tutti ed anco l'ultimo godano di questa proprietà del continuo.

374. Presupposte queste irrefragabili dottrine vediamo se

e come l'argomento dell'assurdo possa tornar utile agli antichi, che lo invocarono, e lo adoperarono a compiere le loro incomplete dimostrazioni, che si riferivano specialmente alle curve, e che si addossavano in pari tempo alle grandezze minori di tutte le date. Dapprima l'argomento dall'assurdo, suppone e non prova, che la minor di ogni data sia conseguita.

Secondo, questo argomento inchiude la tacita ipotesi che questa minor di ogni data non sia più divisibile, e l'altra ipotesi che sia perciò eguale allo zero; dunque contiene e presuppone tutto ciò che occorre di provare in questo caso; quindi niun sussidio può prestare questo argomento il quale giovi a completare questo genere di concrete imperfette dimostrazioni. Per la qual cosa ci pare che possiamo indiriggere ai fautori di questo antico metodo (quando però risguardi le ricerche relative alla determinazione delle curve), il seguente dilemma: o il ragionamento antico delle diminuzioni arriva al verace conseguimento della minore di ogni data, o non vi arriva. Se ci arriva, è inutile il ricorso all'assurdo, e se non vi arriva con tale argomento, che la suppone e non prova la minor di ogni data e non si fa altro che abbandonarsi in braccio ad una patente puerile petizion di principio. Dunque in questa sorta di ricerche il ricorso all'argomento dall'assurdo non giova per niun conto al perfezionamento dell'argomento degli antichi.

375. Intrattenendo ancor per poco il nostro pensiero sopra la proprietà del continuo, invitiamo i filosofi a riflettere che tale proprietà conduce il pensiero all'infinito, ma non mai allo zero; e tradotto che sia l'animo anco all'infinito ci dà solamente e ci presenta l'ordine delle quantità infinitesime, e quest'ordine esso pure come dotato della proprietà del continuo ci suggerisce e ci traduce in un'altro ordine di infinitesime parti infinitamente più piccole delle prime, e

così via via, per cui entriamo in una perpetua o interminabile risoluzione delle grandezze, o in un oceano sempre infinitamente più grande di sfuggevoli elementi generatori. E per vedersi aperta innanzi sì interminabile successiva serie di infinitesimi, i geometri ed i filosofi non han bisogno d'altro dato, se non della pura e semplice posizione del continuo; posizione indipendente da ogni valor di grandezza; e perciò perpetuamente intiera in ogni più piccolo valore della grandezza medesima.

376. Questi altissimi principii delle grandezze ci presentano una stupenda origine ideale di tutte le entità geometriche; ed in pari tempo ci fanno comprendere, quanto estesa, quanto sublime, quanto incomprensibile sia la proprietà del continuo che ci conduce in questo mondo di tante ed impensate generazioni.

377. Siccome niun'arte analitica, niuna serie geometrica, fondata sul continuo conduce al reale o razionale infinitesimo, perciò la sua origine e la sua ideale realità si è dovuta supporre o fondare sull'ipotesi. Galilei dopo molte ricerche si ridusse all'ipotesi. Barrow, Leibnizio, Newton dovettero fondarla sull'ipotesi. Gli antichi parimenti solo in via ipotetica posero le prime ed ultime ragioni, le minori di tutte le date, le ragioni dei limiti, delle evanescenti ecc. In forza di queste ideali soggettive posizioni si sono procacciate queste tenuissime entità quali generatrici dalle grandezze finite, ed insieme quali entità incapaci ad alterare il valor delle grandezze finite.

378. La via delle ipotesi è adunque l'unica che hanno seguita e che si possa seguitare, e ciò per non cadere in assurdità. Lungi perciò dal pensiero umano, lungi la presunzione, che le serie procedenti all'infinito conducano a queste sì stremate entità, che rigorosamente si possano avere per zero.

Chi bramasse conoscere, anco in via indiretta, l'assur-

dità o l'impossibilità nella quale sono le serie di poter condurre a grandezze zero col loro infinito procedimento, si metta a considerare, che se le diminuzioni che si possono ottenere con le serie conducessero allo zero, ne conseguitarebbe, che da questo estremo si potesse principiare con passi retrogradi a ritornare alla riproduzione perfetta della grandezza decomposta o diminuita. Ora essendo assurdo che dallo zero si incominci la riproduzione di qualunque quantità; perciò lo zero è un punto cui non può condurre veruna diminuzione, che non abbia del saltuario, e che sia perciò dominata da legge geometrica.

379. Alcuno forse dirà: il moto incomincia dalla quiete, che è poi zero moto, e diventa a poco a poco di quel valore, che più ci piace; dunque anco dallo zero entità o grandezza si potrà retrocedendo pervenire a far ridiventare grandezza, quella, che si è spenta. Ma si risponde: che questa istanza si appoggia a falsa ipotesi, giacchè il moto si considera o in astratto e soggettivamente, o si considera moto reale effettivo; il secondo incomincia da una forza viva finita qualunque, che lo ingenera, e lo fa crescere con gradi replicantisi di forza viva: e quando sì fatto movimento reale si spegne, ciò avviene per contro colpo, o contraria forza ritardatrice, o meglio consumatrice del moto, la quale ad ogni momento ne morde successivamente le parti finite di esso moto, o tutto anco lo spegne colla distruzione dell' ultima parte. Quando poi si considera il moto ideale soggettivo, e rivestito della proprietà del continuo, allora, o questo momento di moto si considera come risultante da tante parti aliquote componenti lo stesso moto, o come divisibile all'infinito, e quindi risultante da infinitesime parti. Nella prima supposizione il movimento si spegne di salto, quando si distrugge in modo discontinuo l' ultima sua parte aliquota: nella seconda ipotesi converrà distruggere tutte le infinitesime

parti da cui risulta, una ad una, o molte per volta per ridurlo allo zero. Ora come si possono ad una ad una staccarne parti infinite? se ciò si fa per qualsivoglia legge, e specialmente geometrica, altrettanto riesce sempre impossibile; come qui avanti si è più volte dimostrato.

Ma tutti questi casi riescono diversi dal nostro ragionamento, che traduce l'animo su la via dell'infinito, quindi in tutti siamo sempre fuor di proposito; nell'unico poi, che è quello della diminuzione del moto per legge geometrica, in questo moto pure la nostra maniera di vedere o di immaginare non può prescindere dal considerare spento il moto che quando è spenta l'ultima infinitesima parte, ovvero di considerarlo come spento quando non resta che questa ultima infinitesima parte. Se rimane distrutta anco l'ultima infinitesima parte sarà sempre vero, che ciò sia avvenuto per salto, e quindi per ragione fuori del potere della legge geometrica, e non si potrà più risalire dallo zero al ridiventare moto e moto finito; e se partiamo dall'idea dell'ultimo residuo infinitesimo di moto, allora si vede la possibilità d'incominciare da questo infinitesimo, e che con una somma infinita ideale di questo residuo, si possa riavere la ricomposizione del moto perchè principiamo, e ci apponiamo ad una grandezza ideale infinitesima.

Così appunto fecero tutti i sommi meccanici, quali sono stati Galilei, Newton, Eulero, Laplace, Lagrange. Il primo ne' suoi: *Ragionamenti attinenti a due scienze nuove;* il secondo nella sua opera: *Princìpii matematici della filosofia naturale;* il terzo nel suo *Trattato del moto dei corpi duri;* il quarto nella sua *Meccanica celeste,* ed il quinto nella sua *Meccanica analitica;* e così han fatto tutti gli altri scrittori di meccanica analitica. Ella è dunque una cosa di fatto, che tutti i geometri han dovuto per necessità di nostra ragione incominciare ed esordire ogni moto anco ideale, dalle velo-

cità virtuali di Galilei, o dalle ragioni o dalle primitive entità di moto.

Pronunciare la proposizione, che il moto incomincia dalla quiete o zero moto, è mettere in campo una sentenza, che non ha nè potrà mai avere significanza alcuna. Il corpo che non ha moto e che è in quiete incomincia a muoversi in causa di una forza viva, che lo fa cangiar di stato, ed in questa sta tutto il principio e l'entità del moto; ma tal causa o forza viva nulla inizia nè può incominciare dallo zero, ma bensì con qualche velocità finita o infinitesima che essa sia.

380. Altri forse potran replicare, che siccome il moto finito ed ogni grandezza finita si concepisce, che abbia un valore il quale ci pare collocato tra l'infinito, e lo zero, e ciò perchè con infiniti aumenti si suppone divenga infinita, e con infinite diminuzioni divenga infinitesima o zero; così lo infinito e lo zero, si possono considerare come due limiti dello stato finito, il primo per gli aumenti, il secondo pei decrementi; perciò come dal limite si può ritornare alla grandezza che a lui si è avvicinata, così anco dallo zero grandezza, limite dell'impiccolimento, si potrà incominciare dal risalire alla grandezza finita.

A così fatto pensamento però si risponde; che parlando filosoficamente, è mal detto, che il finito medii tra lo zero e l'infinito perchè quest'ultimo è come la pienezza della grandezza o dell'essere quantitativo, e lo zero è l'assoluta negazione della grandezza medesima. Oltre di questa innegabile osservazione, preghiamo il lettore a riflettere, che la grandezza finita è quella a cui sempre si addice aumento, e diminuzione, è questa sua intrinseca ed ammessa di lei proprietà la rende tale, che a lei ripugna lo stato infinito, e lo zero; per la qual cosa si vede esistere manifesta incongruenza di idee nel voler considerare limiti della grandezza finita lo zero e l'infinito: perchè l'infinito non è un

infinito cumulo di finiti, nè lo zero è un residuo supremo delle diminuzioni.

381. Altri soggiungeranno, se queste dottrine sono vere, perchè dunque si ammette questo infinito come limite di tutti gli aumenti, e questo zero come limite di tutti i decrementi delle grandezze finite? Prima osserveremo, che si può ammetterlo l'infinito nella scienza geometrica in modo soggettivo ipotetico, ma non per questo ci è mai permesso di poterlo considerare come una immensa o indefinita riunione di finiti; in secondo luogo, non solamente la somma ma nemmeno qualsivoglia altra escogitabile operazione dell' animo, può guidare la nostra ragione alla nozione dell' infinito pigliando le mosse da qualunque dato finito.

Se dunque si vuol ammettere in matematica l' infinito, sarà sempre gioco forza introdurvelo in modo ipotetico soggettivo, cioè come dato ideale bello e fatto, e non mai come entità derivata da alcuna deduzione. Molti geometri vinti dalla forza di queste ragioni hanno creduto di giustificare, e di fondare la nozione dell' infinito chiamandolo solamente *grandezza maggiore di ogni data* od assegnata. Questa definizione però riesce poco soddisfacente perchè è troppo vaga ed indeterminata; poi perchè ben addentro considerata si presenta assurda; di fatti si può loro dimandare, come mai posson provare, o presumere di poter dare vita ad una grandezza maggiore di ogni data od assegnata grandezza? È forse cosa fattibile, e nè tampoco possibile alla nostra facoltà pensante e percipiente l' assegnare una grandezza maggior di ogni data, mentre questa supera la facoltà percipiente finita del nostro animo. Più se questa grandezza non è veramente infinita, per necessità sarà finita, e quindi aumentabile; e non già quantità maggior di ogni quantità, il che è sempre oscurissimo enigma.

382. Da queste osservazioni si comprende parimente che

all' infinito matematico ipotetico ideale ripugna egualmente la nozione dell'aumento e quella della diminuzione, perchè proprietà essenziale della grandezza finita. Ed è appunto su questa posizione che i grandi geometri hanno considerato e stabilito, che lo infinitesimo comparato al finito non può accrescerlo nel suo stato finito, perchè ogni finito secondo l'idea soggettiva del continuo riesce appunto infinito in confronto di ogni sua ideale infinitesima particella.

383. Se questa maniera di ragionare intorno all'infinito ed all'infinitesimo sembra non troppo chiara e precisa, noi pregheremo il lettore ad osservare che si tratta di quantità incomprensibili, l'una per la troppa grandezza, e l'altra per la troppa piccolezza; la prima ci opprime per la troppa estenzione, la seconda ci sfugge per non averne abbastanza.

Ad ogni modo però appare chiara cosa, che all'infinito debba ripugnare ogni aumento, perchè ammettendo che un aumento fosse possibile all'infinito, sarebbe riconoscerlo per infinito e non infinito. Pare egualmente che ripugni all'infinito una diminuzione finita, perchè quando la si supponesse possibile, si supponerebbe ancora che l'infinito possa per questa scemare, e quindi per l'opposto esser infinito in causa di questa grandezza finita, che gli si verrebbe ad aggiungere, il che inchiude solenne ripugnanza.

384. Volendo però chiarire per quanto ci è dato la nozione che noi possiamo avere dell'infinitesimo, ci resta a considerare, che esso non può mai confondersi con lo zero, sebbene, come è detto, non valga a cangiar lo stato del valore finito di una grandezza analitica. L'infinitesimo anzi che andar confuso con lo zero, si deve all'invece considerare quale particella suprema della grandezza finita o ideale, e perciò avente tutta intiera la proprietà del continuo della grandezza stessa, il che è lontano dallo zero, quanto l'essere lo è dal non essere.

I geometri che hanno voluto considerare lo zero come limite delle grandezze che decrescano indefinitamente si sono permessi una nozione impropria e veramente disapprovata dalla filosofia, perchè il non essere non può esser considerato limite di ciò che impiccolisce senza inchiudere la contraddittoria posizione di comparar l'essere al non essere. La posizione dell'infinitesimo dotato della proprietà del continuo traduce l'animo nell'indefinito pelago degli infinitesimi di tutti gli ordini all'infinito.

385. Ponderando attentamente queste filosofiche altissime posizioni concernenti l'ideale risoluzione indefinita delle grandezze geometriche, ci viene veduto come anco il metodo dei limiti, quello delle prime ed ultime ragioni, non che quello delle evanescenti, o delle esaustioni si appoggino sopra una filosofia manchevole ed inetta; poichè tutti questi metodi assumono lo zero per vero limite delle decrescenti grandezze, mentre esso è sempre infinitamente diverso da qualsivoglia entità. Più questo zero stato delle grandezze dai geometri vagheggiato nelle loro concrete dimostrazioni non contiene mai effettivamente avverato lo zero, ma sempre vi è intieramente presupposto.

386. Per le stesse ragioni tutti i metodi di derivazione tanto di Arbogast, quanto quelli dell'insigne Lagrange e suoi seguaci, non sono metodi che abbiano dimostrativo appoggio nella verace e rigorosa filosofia; atteso che con li principii che essi pongono per base non arrivano tutto al più, che a supporne (ed anco questo in contraddizione delle loro basi) che il residuo ultimo della grandezza riesca minor di ogni data. Ora questa quantità minor di ogni data, presenta un concetto assai più indeterminato dell'infinitesima, e per soprapiù si fonda nei metodi antichi, dei quali ne abbiamo sin qui esposta la poca filosofia che li sostiene. Ed allorquando col metodo delle derivate vogliamo accingerci alla

soluzione dei problemi, che si risolvono col calcolo differenziale siamo costretti attribuire alle loro variate o derivate ed in concreto, alla loro variazione j dei valori, i quali o riescono inesatti ed improprii, o sono quelli stessi che si pigliano a prestito del calcolo differenziale istesso; e dopo tutto questo si potrà forse aver intenzione di voler, con questi mezzi, dimostrare il calcolo differenziale?

Conchiudiamo adunque, che infino a tanto che noi vorremo dare alla j dei valori finiti, e fino a tanto, che lo sviluppamento si considera esprimere valori algebrici ed escludenti le nozioni degli infinitesimi, dei limiti, degli evanescenti ec; come si protesta il suo autore Lagrange, la soluzione dei problemi, che si risolvono col mezzo del calcolo differenziale, riesce sempre e sempre riescirà impossibile all'analisi delle funzioni analitiche.

387. Lo abbiamo già detto, che quando il nostro animo si ferma a contemplare le grandezze ideali e minori di tutte le date, e che vuole ostinarsi a considerarle come effetti delle indefinite diminuzioni, si trova in una oscurità di idee non piccola ed incontra in molte assurdità. Lo stesso gli accade quando tenta voler comprendere l'infinito matematico. Tutte queste trascendenti riflessioni vincono sempre la nostra penetrativa facoltà. Non esistono calcoli, formole, o elaborate espressioni analitiche od algoritmiche posizioni, le quali possano illustrare o render chiari così fatti concetti superiori alle forze umane. Onde conviene persuadersi, che ogni filosofia è insufficiente ad appianare e renderci facili sì alte nozioni. Nulla ostante si può asserire, che da quel poco che se ne intende, si arriva a conoscere, che dal finito non si può risalire all'infinito, nè dal finito pervenire all'infinitesimo con operazioni pratiche o intellettuali, che niuna somma, niuna serie, niun'altro escogitabile artificio conducono a questi inarrivabili entità, e que'geometri che credono rap-

presentarci e non senza eleganza, lo infinito, invitandoci a considerare la espressione analitica $\frac{1}{0} = \infty$, ovvero, come altri meno erroneamente fanno, proponendoci innanzi quest'altra analitica espressione $\frac{1}{\left(\frac{1}{\infty}\right)} = \infty$, poichè essi non fanno altro, che supporre ciò, che vorrebbero darci ad intendere, come apertamente si comprende contemplando queste espressioni; delle quali la prima si presenta assurda od un paradosso, e la seconda, pone l'infinito per provare lo infinito.

388. E per renderci più che possiamo facili queste verità imaginiamo una serie al tutto indeterminata, fuorchè nel formato della sua derivazione, perchè questo formato dipende sempre dalle nostre operazioni adoperate nel costituirla o nel derivarla. Osserviamo dunque il di lei andamento.

La serie che pigliamo a decifrare esprima dunque lo sviluppamento di una funzione indeterminata; sappiamo che da una parte si usa porre la funzione primitiva contenente esplicitamente o implicitamente la variabile; nell'altra parte come nel secondo membro dell'equazione si mette lo sviluppamento di questa funzione espressa in una interminabile serie di termini procedenti, o succedentisi secondo una legge determinata e fissa, e con queste due funzioni, una non sviluppata, e l'altra sviluppata, se ne forma la equazione che notammo al num. 380.

389. Sia v. g. la funzione di Lagrange, cioè sia $F(x)$ e variata $F(x + j) = fx + pj + qj^2 + rj^3 +$ ec. ec. Ora insino a tanto, che la funzione, la variazione ed i consecutivi termini della serie che servono di misura per parte della funzione variata conservano uno stato indeterminato. tutto e persino la stessa possibilità dello sviluppamento con-

siste nella supposizione arbitraria di nostra volontà, la quale ritiene, che sotto alcune condizioni ed in sequela di alcuni principii sia fattibile questo sviluppamento, e possa rappresentarsi la funzione proposta per detto sviluppamento.

Ma se a questo tipo generale esprimente la misura della funzione per parti, noi vogliamo attribuire dei valori determinati, e derivanti dalla funzione, o specialmente dalla di lei variazione, allora la funzione, la variazione e la serie che esprimano, tutte e tre passeranno dallo stato indeterminato ad uno stato concreto. Ma quante singolarità non vedremo allora specialmente nello sviluppamento? Attribuito alla variabile valor finito, e dato simile valore anco alla variazione, la serie che procede per potenze continue della variazione non potrà andare all'infinito; come sarebbe se la $F(x)$ fosse $= x^3$ e la variazione fosse n, noi avremmo $F(x + n)^3 = x^3 + 3x^2n + 3x\,n^2 + n^3$. Non accade però così quando l'esponente della funzione sia di forma radicale, perchè allora in onta che sia finito il valor della funzione, e finito ancora quello della variazione, lo sviluppamento in serie in molti casi procede all'infinito, ma questo ha luogo perchè alcune radici sono inesprimibili in valori finiti e non per causa dei valori della funzione e della variazione. Ma considerando questo oggetto dal lato che più ci interessa noi vediamo, che dalla natura e valor della funzione, dal valore attribuito alla variazione, e da quello dell'esponente, cioè dal valore finito, infinito, infinitesimo, intiero, frazionario, radicale, logaritmico, ec. ne conseguitano altrettanti cangiamenti nello sviluppamento, e specialmente nella ragione e nel rapporto dei termini che lo compongono.

390. Lo sviluppamento di una funzione considerato sotto forma generale, deve in tale stato esser atto a rappresentare tutti i diversi valori, che attribuir si possono a tutti

gli elementi che costituiscono la funzione. Ora chi non vede quali mutamenti avvengono v. g. nelle ragioni e nei rapporti dei termini nello sviluppamento quando diamo alla variazione un valore infinitesimo? tutti i rapporti che i termini dello sviluppamento avevano tra di loro in istato finito, uscendo dall'ordine finito diventano di valore infinito. Di quà ne viene per facile e legittima induzione, che niun valore algebrico finito ed indipendente dalle quantità infinitamente piccole dei limiti delle evanescenti ec. può stare in luogo degli infinitesimi, niuno finito valore può rappresentarli, e la filosofia degli infinitesimi anzi che essere dalle quantità finite espressa, riesce all'invece infinitamente diversa. Imperciocchè convien pensare, che i valori infinitesimi attribuiti alla variazione e quali si trovano nel loro sviluppamento, non sono valori nè posti nè assegnati alla variazione per capriccio o senza un gran perchè, ma allo invece sono stati ideati e posti dietro elaboratissime speculative considerazioni razionali; cioè sono stati ammessi quali principii fondamentali, onde prepararsi con la loro posizione la possibilità di risolvere altissimi problemi insoluti, con le ordinarie posizioni delle grandezze finite.

391. Pervenuti a questo punto delle considerazioni filosofiche relative alla filosofia delle matematiche, ci conviene riferire anco l'opinione del grande geometra polacco Hoënè Wronski. Questi nella sua opera matematica intitolata: *Introduction à la philosophie des mathematiques*, stampata in Parigi 1811, alle pagine 31 32 33, parlando del calcolo differenziale si esprime come segue: = La possibilità del calcolo differenziale si trova dedotta a *priori* da quanto abbiam detto, e la di lui esistenza o piuttosto la sua *effettività* è contestata a *posteriori;* ma i procedimenti di questo calcolo involgono una antinomia o contro legge, che lo fanno apparire di tratto in tratto come privo di una rigorosa esat-

tezza. Questa antimonia, o piuttosto il suo risultamento ha sparso sopra la natura del calcolo differenziale, e sopra la sua metafisica una specie di scetticismo. Portati del resto dalla direzione materiale, che si è introdotta generalmente nella metafisica, i geometri dei nostri tempi hanno considerato il calcolo differenziale, come un processo indiretto e artificiato, ed hanno cercato di sostituirgli un processo diretto e naturale, il quale secondo essi ne formarebbe la verace base. Egli è a questa tendenza, che noi dobbiamo il calcolo delle *Funzioni analitiche* di Lagrange, e tutte le altre teoriche di derivazione. Ora noi proveremo nella quarta Nota (la quale poi stà alla fine di un'altra sua opera denominata: *Refutation de la Théorie des fonctions analytiques*), che il punto di veduta del calcolo delle funzioni di Lagrange, e di tutte le teoriche delle derivazioni in generale è assolutamente falso. Noi lo proveremo matematicamente, e con una evidenza irrecusabile, e convien sperare che i geometri rinuncino a tutte queste teoriche, le quali oltre alla loro forzata e artificiata complicazione non sono evidentemente possibili in sè stesse che per la natura del calcolo che pretendono di spiegare.

392. I procedimenti del calcolo differenziale non sono che delle regole *soggettive*, delle regole di nostra speculazione intorno alla generazione delle quantità per somma delle parti infinitamente piccole, e per niun conto delle regole *oggettive*, o delle leggi di realtà di questa generazione. La prima di queste regole, è fondata, come algoritmo primitivo della somma nelle leggi *costitutive*, dell' intelletto rigorosamente inteso. Ora dipende dal confondere questi due cotanto distinti punti di veduta che ne risulta la antinomia, che si ritrova nei procedimenti del calcolo differenziale. In fatti essendo considerati questi procedimenti quali semplici regole di nostra speculazione, essi si presentano rigorosi; ed essendo considerati come vere leggi della realtà istessa della

generazione algoritmica, questi procedimenti sembrano difettosi. Ecco il segreto, o la vera metafisica del calcolo differenziale. Basterà adunque di dedurre li procedimenti di questo calcolo sotto il primo aspetto, e si otterrà la dimostrazione rigorosa dei procedimenti = :

393. Nell' opera intitolata: *Refutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* edita in Parigi 1812, ritorna sopra questo oggetto della metafisica del calcolo sublime e scrive: = Noi ci limiteremo qui a far osservare, che la metafisica, o la derivazione dei principii del calcolo differenziale, è intieramente fuori dei confini delle matematiche, e per conseguenza, che sono un mero perditempo tutti gli sforzi fatti dai geometri per derivare questi principii da' mezzi puramente matematici. La metafisica o la derivazione appartiene ad un'ordine superiore di cognizioni; questa impresa appartiene alla filosofia, egualmente che la derivazione generale dei primi fondamenti della scienza del geometra: un poco di riflessione dovrebbe bastare a farci riconoscere questa verità. Intanto siccome essa pare pochissimo conosciuta, noi aggiungeremo alcune parole per farla pregiare.

394. Le scienze matematiche, e specialmente i loro rami puri, l' algoritmica e la geometria formano manifestamente certe operazioni dello spirito umano, e presentano perciò un'ordine particolare di fenomeni intellettuali. Il voler spiegare questi fenomeni per sè stessi, è aggirarsi in un circolo vizioso, e rendersi simili a que'fisici, i quali per ispiegare cosa sia la materia, suppongono di già la materia. Bisogna necessariamente risalire ad un' ordine più elevato di fenomeni o di funzioni intellettuali, per ispiegare que'fenomeni intellettuali che costituiscono le scienze matematiche; quest' ordine più elevato è visibilmente ciò che forma la filosofia.

Noi conosciamo bene, che per quanto vera e ragione-

vole sia questa asserzione, i geometri si rifiutano a ricevere le loro leggi prime da una scienza differente dalla loro propria; e questo tanto più, che al giorno d'oggi la filosofia non ha potuto far fruttificare il suo diritto di legislatrice delle scienze, diritto che essa ha per sua essenza istessa.

Ma questa ripugnanza non è una ragione; lasciandosi trasportare da questo sentimento, e sforzandosi di spiegare i principii delle matematiche per mezzo delle matematiche istesse, non si può che compromettere la scienza; perchè ponendo a scoperto la sua propria insufficienza in ciò che è estraneo alle matematiche, si sparge con poca avvedutezza un dubbio su tutto ciò che realmente appartiene al loro dominio.

395. Noi non ci prenderemo la vaghezza di ricordare qui i differenti errori commessi dai geometri ogni qual volta si sono messi a derivare i principii delle scienze matematiche; noi ci limiteremo ad un solo esempio. Quanti sforzi non si sono fatti per dimostrare la teorica delle parallele, o la eguaglianza degli angoli chiamati corrispondenti. Ebbene vi sono arrivati? Si leggano negli *Elementi di geometria* di Legendre gli argomenti i più recenti, e per conseguenza secondo tutta la probabilità i più perfetti, destinati a porgere questa dimostrazione, e non potremo rattener le risa dal combattimento veramente puerile, che l'autore di quest' opera presenta per così dire alla sua ombra, e sopra tutto della soddisfazione nella quale si trova d' esser uscito vittorioso dalla battaglia. Noi siamo sicuri, che non vi sarà un'allievo tra le mani del quale posti questi elementi non concepisca qualche dubbio intorno alla sagacità dell' autore; e quello, che è peggio, sopra l'esattezza del metodo geometrico, in vedendo quest'autore persuaso e contento di aver dimostrato la teorica delle parallele con un principio avente un'evidenza eguale ed anco inferiore a quella di questa teorica mede-

sima. Ecco il guadagno che si fa, a voler uscire dai confini prefissi dalla ragione.

396. Ma che? se per un'avvenimento inaspettato la filosofia si fosse realmente elevata alla sublimità delle scienze esatte, ed anco alla sublimità di una scienza infallibile; e se essa avesse alla fine realizzato il suo ideale sublimissimo, dando la soluzione rigorosa di tutti i problemi proprii alla ragione dell'uomo; e se essa avesse così acquistato o legittimato il diritto di dare le leggi alle scienze; più se essa avesse di già realmente dedotti i principii primi della scienza del geometra; se essa avesse di già data la legislazione delle matematiche, e l'avesse guarentita con la spiegazione rigorosa di tutte le difficoltà, e sopra tutto con la scoperta delle leggi fondamentali di questa scienza, leggi che devono alfin condurre alla soluzione dei grandi problemi, che non si sono potuti risolvere insino ad ora, qual cosa le resterebbe a fare? Due cose: l'una volendo limitarsi alla propria scienza, ricevere dalla filosofia li primi principii e le leggi fondamentali delle matematiche; l'altra, volendo risalire insino alla sorgente di queste cognizioni, approfondire la filosofia delle matematiche, e per meglio arrivarvi, studiare la filosofia trascendentale, che è la base di quest'ultima.

397. In questa supposizione noi dobbiamo qui esporre i risultamenti che la filosofia, di cui trattasi, ha ottenuti per il calcolo differenziale costituente il principale oggetto di quest'opera.

Il calcolo differenziale quale è conosciuto dalla sua scoperta costituisce un'algoritmo primitivo; esso presenta le leggi della generazione delle quantità, e non le leggi della quantità di già prodotte e determinate. Come tali, tutte le leggi del calcolo differenziale, sono di una *verità assoluta*, e per conseguenza di una *esattezza rigorosa*. Così senza aver bisogno di veruna condizione i geometri possono abbandonarvisi intieramente.

398. Gli antichi geometri, che non avevano alcuna idea di una generazione indefinita, erano assai consentanei a sè stessi, escludendo dalle loro ricerche matematiche l'idea dell'infinito, e di tutto ciò che sembrava inchiuderla; ma dopo che Leibnitz ha fatto la incomparabile scoperta di questa generazione indefinita, e che ha dimostrato la possibilità di concepire l' infinito in tutte le sue determinazioni ideali, e tutto ciò col mezzo di leggi precise e rigorosamente logiche, la premura di evitare l'idea dell'infinito nelle ricerche matematiche, prova incontestabilmente, oltre ad un circolo vizioso, una vera ignoranza della significazione di questa idea.

399. E noi non abbiamo timore di confessare, che crediamo di anticipare sul giudizio della posterità in dichiarando, che per quanto grandi possano essere per una parte le fatiche di certi geometri, la premura che essi mettono ad imitare gli antichi nell'escludere l'idea dell'infinito, prova di una maniera irrefragabile, che essi non sono arrivati alla sublime altezza, alla quale la scienza è stata portata da Leibnitz; poichè essi evitano questa regione elevata, ove si ritrova il principio della generazione della quantità, e per conseguenza la vera sorgente delle leggi matematiche, per ridursi a strisciare nella regione dei sensi, la sola conosciuta dagli antichi geometri, e dove non si ritrova che il grossolano meccanismo dei calcoli =.

400. Intratteniamci un poco a ponderare queste dottrine del geometra Wronski, e perchè risguardano direttamente la filosofia dell' analisi superiore, e perchè presentano la opinione di un grande pensatore.

Egli dunque incomincia dal far conoscere l' antinomia apparente, che ci pare di ravvisare nei procedimenti del calcolo differenziale, nel quale in faccia del finito si suppongono nulle le infinitesime parti, e confessa esser cosa naturale il sembrare men che rigoroso un sì fatto calcolo, nel

quale appare che si trascurino delle entità, entità sempre sufficienti a torgli il pieno verace rigore. Ma a quale partito si appiglia egli per torre di mezzo queste difficoltà, quale via siegue per dimostrare, che questo calcolo sia rigorosamente esatto? Egli ricorre alla seguente considerazione già notata, che i processi del calcolo differenziale non sono altra cosa che regole *soggettive*, regole di nostra speculazione esprimenti la generazione delle quantità per mezzo della somma delle parti infinitamente piccole, e non sono per verun conto regole *oggettive* o leggi della realtà istessa di questa generazione. Ora col supporre soggettiva la generazione della quantità, qual guadagno ci può mai essere per riguardo all'esattezza del calcolo differenziale? Le leggi soggettive sono leggi della nostra mentale maniera di ideare e di concepire, queste maniere tutte indistintamente sono sottoposte alla nostra ragione, la ragione non ci insegna di poter trascurare una minima grandezza in confronto di un'altra assai più grande, anzi la ragione ci fa pienamente conoscere, che due grandezze non sono eguali insino a tanto che esiste tra loro una qualunque differenza, e ci dice, che il rigore e l'esattezza dell'eguaglianza, non esiste se non quando sono rigorosamente eguali, o rigorosamente mancanti di ogni differenza ancorchè questa sia infinitamente piccola. Acciò l'argomento del nostro geometra fosse concludente esigerebbe, che vi fosse per parte nostra un modo di vedere razionalmente e di ragionare intorno alle cose soggettive, ed un'altro ben diverso di ragionare intorno alle cose oggettive; ma non essendo che un solo ed identico il nostro modo di ragionamento sì nel soggettivo, che nell'aggettivo ci appalesa a chiare note, che la distinzione prodotta in campo, nulla affatto giova a procacciare al calcolo differenziale una certezza rigorosa, o come egli dice, un evidenza a *priori* o una evidenza *assoluta apodittica*.

401. Non si può dunque riconoscere che i procedimenti soggettivi si presentino rigorosi per questo che siano soggettivi. Imperciocchè la nostra intelligenza, proposte che abbiasi delle grandezze non è autorizzata a trascurarle senza un giusto motivo, quantunque siano dell'ordine ideale, come sono pure dell'ordine ideale tutte le posizioni primitive geometriche. Per le leggi risguardanti la realtà e per le leggi risguardanti il soggettivo, non vi sono regole separate di diversa natura onde poter noi pronunciare sopra di esse un giudizio diverso. Anzi come ognun sa, unica è la forma, unica la base del nostro giudizio; quindi quello che è diffettoso in realtà, è diffettoso anco in idea soggettiva. Passa bensì infinita distanza, anzi tutta la diversità escogitabile tra l'oggettivo ed il soggettivo, ma sì l' uno come l' altro son sottoposti alla medesima regola o forma di ragionamento, e questo è regolato sopra il medesimo principio fondamentale di nostra ragione; l'uno e l'altro riescono in eguali condizioni in faccia della nostra ragione; perciò quello che è diffettoso in uno lo è sempre anco nell'altro.

402. Considerando i pensamenti di Wronski, relativi al soggettivo, mi pare che siano manchevoli per aperto equivoco; imperciocchè il suo modo di spiegarsi, lascerebbe luogo a credere, che le difficoltà promosse contro il calcolo differenziale si fondassero sopra qualche principio oggettivo, o pure si fondassero sopra la realtà delle parti infinitesime, mentre questo non è vero. Poichè sebbene i geometri in questo calcolo pongano a confronto le infinitesime soggettive con le grandezze finite oggettive, questo contegno dei geometri non giustifica il ragionamento del nostro autore, perchè i geometri comparano bensì il finito all'infinitesimo, e dichiarano l' ultimo come nullo in confronto del primo, ma ciò fanno appunto se non con una comparazione appieno soggettiva; di fatti in questa comparazione nella quale la

grandezza finita vi figura come uno dei termini di comparazione è considerata sotto un'aspetto pienamente soggettivo, cioè è considerata soggettivamente quale grandezza infinitamente grande in confronto della sua parte infinitesima. Nulla dunque di oggettivo reale esiste nel principio, e nella dottrina del calcolo differenziale; perciò sempre si avvera che la distinzione del nostro matematico è al tutto inutile, fuor di luogo, e pienamente inconcludente.

403. Riguardo al bisogno nel quale si trova ogni scienza, e segnatamente la matematica di ricevere i primi principii fondamentali o le primitive nozioni sopra delle quali essa si fonda e si innalza, di riceverli cioè dalla filosofia comune, questa è verità manifestissima; (quando per filosofia comune s'intenda esprimere la nostra facoltà percipiente conoscitiva e ragionatrice).

Ora non è vero che questa verità sia universalmente disconosciuta dai geometri, come egli vorrebbe farci credere; poichè anco gli antichi hanno sempre usato di premettere alle loro opere, i principii comuni, gli assiomi, i postulati, le dimande ec., e queste posizioni non le consideravano scienza matematica, ma principii e posizioni su cui da loro si fondava e si appoggiava questa scienza; il che vuol dire espressamente, che anch'essi presero dal lume naturale filosofico e razionale queste basi, e le ritenevano come patrimonio comune del sapere umano, e sopra questo, come sopra base universalmente assentita eressero la scienza geometrica. Non è dunque vero che i geometri ignorassero il bisogno di prendere dalla filosofia comune le prime posizioni inservienti alla loro scienza geometrica, che anzi tutti, ed indistintamenti tutti, vi ebbero effettivamente ricorso; e questo loro ricorso non fu già una eventuale o volontaria loro convenzione, ma fu e sarà sempre una verace necessità. Come dunque ha potuto imaginare il nostro Wronski, che i geometri disconoscessero questa verità?

404. So per altro, che alcuni moderni, per un mal inteso uso di analisi, pare che abbiano perduto di vista sì patente verità, e circondati dalle voluminose formole di calcoli lungamente protratti, sembra che siansi come indotti a pensare che, da queste loro formole ed elaborate analitiche espressioni si potessero in certo modo dimostrare le matematiche, ma questi non valevano la fatica di farne titolo di critica ai geometri.

405. Più osserviamo che le dimande, gli assiomi, i postulati ec. sono tutti principii soggettivi, il punto geometrico, la linea, la superficie, il solido, il tempo, lo spazio, il numero ec. sono tutte forme intellettuali, sono principii o concetti presi dalla filosofia comune, o meglio dal sapere comune ed universale, che egli chiama filosofia trascendentale.

Gli antichi geometri, che tutte le posero per basi della loro scienza aggiunsero a tutte queste prime nozioni di grandezze la proprietà del continuo, in forza della quale esse divennero infinitamente divisibili, e tutte si improntarono dalla nozione e del conio dell' infinito. E se per una mal'intesa maniera di pensamento essi credettero di evitare l'infinito; tuttavia l'idea dell'infinito era un' idea sì implicitamente inchiusa nei loro principii, che non si sa comprendere in qual modo, e per qual ragione si possa dire o meglio ritenere, che essi non conoscevano e non avevano veruna idea di una generazione indefinita dei numeri e delle grandezze geometriche. In fatti incominciando dai Pitagorici insino a noi, tutti hanno ammessa pienamente l'infinita divisibilità della grandezza geometrica; più hanno ammesso la prolungazione infinita delle linee, ed hanno fondate delle leggi di diminuzioni tutte procedenti all' infinito sopra serie decrescenti e procedenti all'infinito.

406. Non fu Leibnitz (nè Newton, altro inventore del calcolo differenziale) quegli che abbia fatto la *incompara-*

bile scoperta della generazione soggettiva della grandezza geometrica, ma è stato più di lui e prima di lui il Galilei, il quale estendendo fin dove è concesso all'umano intendimento, le dottrine fondamentali degli antichi, ne dedusse le necessarie ultime induzioni, e ne ricavò le supreme loro parti infinitesime che appellò *indivisibili;* fu Galilei il primo che dichiaratamente cercò dimostrare, come ogni grandezza finita dotata della proprietà del continuo si poteva, anzi si doveva, considerare soggettivamente come ingenerata da una infinità di indivisibili, o di infinitesime parti, e Leibnitz medesimo ha concesso l'onore a Galilei, come principale inventore delle infinitamente piccole grandezze come abbiam già provato al num. 293 ec. Leibnitz ha bensì per parte sua, e con la forza del suo grande ingegno generalizzato ed esteso, e di più ridotto a sistema filosofico queste sublimi nozioni del nostro sommo italiano, ma non ha egli stesso inventata e discoperta la grandiosa generazione indefinita delle grandezze geometriche; imperciocchè al solo Galilei esclusivamente appartiene la grandiosa idea degli infinitesimi. Leibnitz ha però dato a questa nozione una forma analitica semplicissima e spedita, più di tutte le altre inventate dai geometri per esprimere questo dilicato concetto; e questa è tutta gloria sua.

Più lo stesso principio famoso del calcolo differenziale, cioè che un' indivisibile o un' infinitesimo si possa ritenere come zero in comparazione di una grandezza finita, esso pure questo famoso principio è tutto di Galilei; anzi questi unicamente, e non Leibnitz, si è ingegnato di dimostrarlo, laddove l'ultimo si è accontentato di supporlo e di considerarlo come chiaro ed evidente per sè stesso.

Anzi appare, che sebbene Leibnitz avesse tolto dal fiorentino il principio di cui si tratta, tuttavia non avesse ben addentro letto nelle opere di questo nostro filosofo italiano,

perchè con un studio verace di esse opere, ed anco con uno studio mediocremente attento avrebbe conosciuta e ritrovata la dimostrazione del principio, e questa dimostrazione espressa nel modo più persuasivo che fosse possibile alla mente umana; ed allora il filosofo di Lipsia non sarebbe stato costretto per evitare le difficoltà promosse contro questo principio di ricorrere alle nozioni degli antichi assomigliando a queste il principio in discorso.

Similmente nella lettura delle opere di Galilei avrebbe rinvenuto fondato appoggio a giustificare il principio del calcolo differenziale assai meglio che non gli sia riuscito col compararlo ai principii antichi.

407. La più grande scoperta di Leibnitz consiste nella estensione indefinita, e dichiaratamente formulata degli infinitesimi di tutti gli ordini senza fine, imperciocchè egli è il primo che camminando su la traccia, segnata da Galilei, ed anco seguita da Cavalieri, abbia compreso in modo veramente filosofico, che all'indivisibile o all'infinitesimo, competevano le proprietà della grandezza finita, della quale mentalmente, ed in forza unicamente di nostra speculativa ideale ipotesi, si supponea la infinitamente piccola esserne una parte; ed in forza di questa supposizione ne veniva, che la proprietà del continuo si conservava tutta intatta anco nella infinitamente piccola grandezza; e perciò che razionalmente parlando, la grandezza infinitamente piccola era ancor essa infinitamente divisibile in altrettante infinitesime parti, le quali in faccia alla quantità finita, riuscivano infinitesime di secondo ordine, e queste anch'esse infinitamente divisibili, e così seguì sempre senza fine; onde fu Leibnitz che ha tradotto l'animo in un mondo infinito di ordini diversi di infinitesimi tutti gli uni infinitamente minori degli altri; fu Leibnitz che ha date ed assegnate formole od espressioni analitiche appropriate a tutti questi infinitesimi.

Più Leibnitz è stato il primo a far conoscere il valore del principio del calcolo differenziale rinvenuto da Galilei ponendo a computo le infinitesime parti ideali, con nuove semplicissime forme espresse, e così accingendosi ed elevandosi pel primo alla soluzione di problemi che si ritenevano generalmente per insolubili; o ciò che si riduce alla stessa cosa, inventando l'analisi infinitesimale.

Questi sono i veraci titoli di gloria di questo sommo geometra, e non già quelli troppo estesi ed esagerati espressi e predicati da Wronski.

408. Il bravo geometra di Polonia ha tutta la ragione di pronunciare un giudizio anticipato su la posterità, che essa cioè riconoscerà per una verità innegabile, che tutti gli sforzi fatti per evitare queste sublimi nozioni dell' infinito e degli infinitesimi riusciranno sempre vani ed inutili, e non serviranno ad altro che a monumento comprovante, che tutti queglino che procurano di evitare questa regione elevata di geometriche altissime sublimi posizioni, per abbracciare quella dei principii più triviali ed antichi non sono sicuramente capaci di comprenderne il merito, e si mostrano perciò inetti e superficiali filosofi.

409. Il principio del calcolo differenziale che sia un'algoritmo primitivo, come asserisce Wronski, questo è ciò che noi non possiamo di leggieri concedere; perchè non abbiamo nessuna prova che ci induca ad ammetterlo; in fatti ogni algoritmo primitivo, come ogni nozione o concetto primitivo è evidente per sè stesso di evidenza intuitiva, ovvero a *priori* come dice il nostro autore. Ora Leibnitz medesimo, che doveva al paro di ogni altro apprezzare le sue scoperte *incomparabili* (398), e le leggi precise e rigorosamente logiche, che le accompagnavano, non ha mai dichiarato che il principio del calcolo differenziale fosse rigorosamente certo di evidenza a *priori*.

Anzi la stessa dimostrazione che Galilei ci ha lasciata di questo principio, non si potrebbe chiamare evidente di evidenza *apodittica* o a *priori*, perchè anco tale dimostrazione si appoggia alla nozione incomprensibile dell'infinito; il che la rende bensì aperta e concludente, ma non mai assolutamente e pienamente evidente a *priori*.

L' invito adunque che Wronski indirige ai filosofi di abbandonarsi intieramente all' evidenza di questo principio non si può largamente accettare, perchè i filosofi non possono accettare questo principio se non con quella adesione con cui lo ammetteva Leibnitz medesimo, o meglio con quella persuasione, che migliore ci presenta la dimostrazione che di esso ne dà Galilei.

410. In riguardo al dirci, che la filosofia è arrivata alla soluzione di tutti i problemi proprii alla ragione umana, ella è questa una opinione di Kant, o di molti altri suoi connazionali, ma è opinione che noi non ammetteremo giammai per dimostrata; tuttavia non ci occuperemo in questo luogo di tale oggetto, perchè non interessa dirittamente la filosofia delle matematiche, in quanto che questa scienza in molta parte è ancora lontana dalla compiuta perfezione. D'altra parte, questa asserzione non è che una larga e non provata proposizione del Wronski.

Per quello poi che asserisce, cioè che i geometri antichi non avessero nessuna idea di una generazione infinita dei numeri, noi non sapremmo qual peso attribuire a così fatta sua opinione, atteso che tutto l' aspetto di verità che può presentare questa sentenza, risguarda più tosto alle espressioni degli antichi che al fatto loro, poichè essi ammettevano ed usavano le serie procedenti all' infinito, essi credevano arrivare con queste serie a' valori tenuissimi, o a' grandezze cotanto piccole, che chiamavano per questo minori di tutte le date; essi usavano le serie per arrivare alle ul-

time ragioni, e per giungere insino all'evanescenza o all'esaustione.

Ora presupposte queste innegabili verità e di dottrina e di fatto, con quale fondamento si può mai pronunciare che essi non avessero veruna cognizione, e persino nè anco verun sentore di una generazione infinita delle grandezze, come, diciamo, si può pronunciare altrettanto, mentre si ponevano apertamente quasi a cavallo a queste serie, per essere da queste tradotti sino all'infinito come vogliono le espressioni di Euclide e *così si faccia sempre*?

411. Intanto osserviamo che la distinzione del soggettivo applicata alle idee razionali astratte o ideali di ogni maniera non è scoperta da attribuirsi alla filosofia trascendentale, se per filosofia di questo nome si intende quella di Kant e di molt'altri filosofi di Germania; poichè la filosofia che sotto questo nome si vorrebbe indicare da Wronski è filosofia conosciuta anco avanti di Kant ed era appellata sotto il nome di metafisica generale astratta, di ontologia, o di concetti generali razionali, ec.

412. Raccogliendo queste sparse considerazioni si comprende, che la distinzione del soggettivo e dell'oggettivo non somministra verun vantaggio per giustificare il principio del calcolo differenziale, perchè è una distinzione che non fa che porre nome nuovo a cosa vecchia e pienamente nota; e finalmente perchè concesso ancora che la distinzione risguardasse un concetto nuovo, questo di sua natura non si presenta pienamente evidente. Imperciocchè anco tutte le ideali astratte posizioni, o sono evidenti per sè stesse, ed allora sono anco posizioni prime indemostrabili, o sono evidenti per dimostrazione ed allora ricavano tutta la loro evidenza dal principio di contraddizione. Per altro tutte le nozioni ora appellate soggettive si rinvengono tutte in Platone, in Aristotile, nei Pitagorici, in Plotino, ed in molti Padri della

Chiesa cattolica. Tanto sia accennato per far conoscere qual conto si debba fare dell'opinione di Wronski, la quale in gran parte appare fondata sopra le categorie di Aristotile, e del peripato, che dopo poi furono predicate da Genovesi, e da altri Italiani, e finalmente da Kant.

413. Ci piace di richiamare il lettore sopra di un'altra filosofica considerazione la quale crediamo diretta a chiarire, quale e quanto sia il bisogno nel quale si trova la matematica di pigliare i suoi principii primi della filosofia comune. E per ben comprendere quanto la matematica tenga dalla filosofia comune, si ponga attenzione, che tutti i concetti primi, quali sono il principio evidente di nostra ragione, più volte ricordato, gli assiomi che immediatamente da esso principio derivano, quanto tutte le altre cognizioni primitive indemostrabili, compresi pure tra queste cognizioni tutti i fatti primi interni ed esterni, essi pure perchè primi, indemostrabili; tutti diciamo questi principii o posizioni o fatti primi, sono la base o il fondamento sopra del quale si innalza tutto l' edificio dello scibile umano. Ora questi principii, ben considerati, sono un patrimonio del nostro animo, e sono il fondamento primitivo di nostra ragione. A questo patrimonio ricorre il geometra, a questo il filosofo comune, a questo tutti gli uomini, che intendono ragionare sopra di qualsivoglia parte del sapere. Tutto lo scibile umano ha dunque bisogno per necessità di fondarsi sopra questi primi indemostrabili concetti, e questi perciò si devono giustamente risguardare come un patrimonio comune a tutti i filosofi di qualunque nome e di qualsivoglia colore o denominazione essi siano. Questi principii non sono la scienza, o la filosofia comune o geometrica nè quella di altra qualità, ma sono fondamento e principio di ogni qualunque scienza, di ogni e qualunque filosofia. Di fatti non è il filosofo che faccia che il principio di contraddizione sia evidente, non è

il filosofo che infonda l'evidenza negli assiomi, e nei fatti primi interni ed esterni, nei principii primi del giusto e dell'onesto ec. ma all'invece è una luce infusa e connaturale, o essenziale del nostro animo, che ci fa vedere l'evidenza e la certezza che in essi risiede, e vedutala, l'animo ne rimane convinto e pienamente pago, ed a questa evidenza si appoggia in tutti li suoi ragionamenti.

414. L'attribuire adunque tante obbligazioni alla filosofia comune, quante alcuni pretendono, tutto dipende dalla posizione nella quale si pongono a prospettare in certo modo queste fonti originarie e connaturali al nostro spirito; imperciocchè riposti questi principii nel dominio della filosofia comune, in tale ipotesi la matematica deve tutte le sue fondamentali posizioni e tutti li suoi principii alla filosofia comune, e lasciate e considerate che siano queste primitive fondamentali posizioni come costituenti e formanti un patrimonio comune a tutto lo scibile, allora la matematica nulla deve alla filosofia comune, ed allora anco ogni altra scienza sorge in certo modo come una a lato dell'altra senza veruna reciproca dipendenza. Generalmente però si considerano queste primitive posizioni o fondamentali prime verità come spettanti alla filosofia comune, e perchè essa le abbraccia e le ammette tutte, e di tutte ne forma basi di scienza, mentre la matematica non usa che di poche, ed anco di queste in modo soggettivo, e poi ancora perchè la filosofia comune è quella che si occupa di assegnare a tutte queste primitive fondamentali posizioni quella evidenza, quella certezza o probabilità che risponde esattamente alla loro natura.

Più la filosofia comune è quella che dietro profondo esame, addita i metodi di saviamente usare di questi fondamentali principii onde evitare tutti gli errori e schiarire tutti gli inganni e rendere rigorosamente legittime tutte le parti del ragionamento umano. Per queste ragioni, generalmente

si considerano queste fondamentali posizioni di spettanza della filosofia comune; e sotto questo punto di veduta razionale la filosofia comune si ritiene quale legislatrice suprema di tutto lo scibile umano, e per tale motivo la matematica ed ed ogni altra parte delle scienze umane, devono tutti i fondamentali loro principii alla filosofia comune, tutte bevono ad una stessa fonte, tutte si nutriscono dello stesso umore, salvo ad ognuna delle scienze a scegliere dalla massa comune di questi primitivi principii quelli che sono ad essa appropriati.

Da ciò ne viene, che dovrebbe esistere tra le diverse parti del sapere più armonia, che non si vede, e più universale benevolenza e più verace fratellanza. Il geometra ha torto di ostinarsi a risguardare la filosofia comune con indifferenza e quasi con una specie di maniera dispettosa, il filosofo comune prova indegnazione per questo irragionevole contegno del geometra e lo dichiara indegno della scienza che professa. È esso forse un destino degli uomini che li tragga a contrariarsi anco nel santuario istesso del sapere, e ciò solo in causa del diverso modo di vedere!

415. Ma ritornando al nostro scopo di esaminare le opinioni di Wronski non possiamo convenire con lui, che molti geometri credano di ricavare dalle loro formole analitiche le fondamentali posizioni delle matematiche; poichè sarebbe la stessa cosa, che supporli troppo disavveduti, imperciocchè non possono ignorare, che queste loro formole non sono che le pure espressioni dei loro interni concetti; e perciò che queste formole hanno quel solo significato e quella sola importanza che la nostra intelligenza loro ha voluto e saputo dare.

Quindi è, che sarebbe fare troppo gran torto il ritenere, che molti dei matematici potessero incappare in così grossolano equivoco di darsi a credere di ricavare e di riporre

nelle loro formole qualche cosa di più di quello, che vi hanno posto essi medesimi.

E venendo anco ai fautori delle dottrine delle derivate o delle funzioni analitiche ai quali pare che specialmente voglia alludere il nostro autore, osserveremo a loro discolpa, che i fautori delle diverse derivazioni fin' ora conosciute in matematica, si saranno bensì ingannati nel credere che le loro formole rappresentanti grandezze algebriche finite, e procedenti secondo leggi di grandezze finite, potessero anco convenire ed appropriarsi alle grandezze infinite ed infinitesime, ma non avranno certamente mai creduto di rinvenire in queste loro formole le dimostrazioni delle medesime.

In questo consiste l'equivoco di que' pochi matematici, e specialmente di quelli che amano di soverchio il calcolo indeterminato delle derivate, appunto perchè credono che le formole indeterminate siano suscettive di ogni valore e possano rappresentare anco quelli del calcolo differenziale, non avvertendo, che i valori dei termini delle serie del calcolo indeterminato escono all' in tutto fuori dell'ordine finito, quando si sostituiscono nei diversi termini valori rispettivamente infiniti.

416. Circa la capacità che hanno, secondo alcuni, le formole di rappresentare qualsivoglia valor finito, infinito o infinitesimo conviene osservare, che ogni forma di cifra indeterminata è per sè stessa insignificante e per ciò appare, che possa assumere benissimo quel valore qualunque che più piaccia; ma sebbene l'indeterminato possa adattarsi o piegarsi a rappresentar tutto ciò che ci piaccia, non è però vero, che ogni forma di funzione, ed ogni serie di essa si presti egualmente ad ogni valore. La filosofia delle serie è riposta per la maggior parte nei valori delle funzioni e delle variazioni, e assai per poca parte dipende dalla forma dei termini, onde anco per questo lato si vede, come l'indeterminato mal si presti ai valori infiniti o infinitesimi.

417. L'andamento materiale delle serie non è dunque quello che serva di base alla filosofia del calcolo differenziale, ma sibbene il valor dei termini e la relativa loro ragione. Ora si possono forse dare delle formole cotanto indeterminate che valgano a rappresentare tutte le indefinite maniere di funzioni, e tutti i valori, cioè i finiti, gli infiniti, e gli infinitamente piccoli non esclusi? E dato pure, per ipotesi, che valessero a tutti esprimerli, si potrà poi dire che valori infinitamente differenti, ed aventi una filosofia infinitamente diversa possono essere indistintamente rappresentati e bene espressi per una identica forma o analitica espressione? Ecco quante difficoltà si incontrano tutte le volte che tentiamo di voler credere che una formola generale possa reggere ad una cotanto diversa filosofia.

Considerando la cifra in istato indeterminato è bensì vero che si può prestare a qualsivoglia valore, ma considerando il rapporto che governa i termini, sotto questo aspetto non può la cifra esprimente una funzione finita, presentare un identità di filosofia, attesa la infinita diversità del valore dei termini.

418. Mettendo v. g. nel binomio di Newton, o in qualsivoglia altra formola di sviluppamento diversi valori, e diverse funzioni, e diverse variazioni ovvero diverso esponente, e sostituendo le diverse funzioni di differenti algoritmi, logaritmici, circolari, trascendenti, non che tutti i valori intieri, frazionarii, radicali, ec. si vedrà quante metamorfosi accadono anco nel materiale dello sviluppamento; metamorfosi procedenti dalla diversa natura delle funzioni, e che inducono nelle serie cangiamenti nei termini e nella ragione di essi e cangiamenti li più grandi possibili.

Ora questi fatti, che ognuno può rendersi familiari coll'ordinario uso del calcolo e, camminando su le tracce dei calcolatori non fanno apertamente conoscere che per

molti riguardi l'andamento dello sviluppamento del binomio e di altra funzione sviluppata rimane sostanzialmente alterato specialmente nella ragione che governa i termini? Ora queste metamorfosi dimostrano in via irrefragabile, che un solo sviluppamento non è pienamente adattato a rappresentare tutte le modificazioni, che rispondono a tutte queste posizioni.

419. Si sono dovute accennare queste particolarità non per titolo di critica a chicchessia, nè perchè sia nostra intenzione di presentare con esse dei ragguagli filosofici intorno alla natura delle espressioni in serie delle funzioni, ma per fare conoscere, che la asserzione di Wronski, nella quale dichiara espressamente, che la formola generale delle differenze finite, comprende come caso concreto il valore delle differenze infinitesime questa non è vera; imperciocchè per il già detto qui pocanzi questa anzi si presenta una proposizione, che ha bisogno di prova, e di molte restrizioni per renderla persuasiva e verace.

420. Per quello poi che concerne la definizione, che questo geometra ci presenta del calcolo differenziale (397) e che egli crede evidente e certissima, come algoritmo primitivo di nostra intelligenza, questa definizione, diciamo, non ci si presenta di quella certezza di cui, il nostro geometra la vuole fornita. E per presentarne l'analisi con sufficiente cognizione di causa, ci sia permesso premettere alcune filosofiche osservazioni dirette a chiarire la filosofia, che esiste in questa definizione di cui si tratta.

La filosofia di Kant, cui Wronski si appoggia intieramente come a suprema legislatrice della scienza matematica non ha procurato all'intelletto nostro, nè maggior esattezza ne' suoi giudizii, nè più precise forme ne' suoi concetti; quindi non ha di molto accresciuto il patrimonio delle umane cognizioni; perchè tutta platonica, aristotelica, e tutta, salvo

alcune nuove espressioni, italiana (veggansi Genovesi Vico, Mammiani ec.). Niente adunque di importante, che avanti Kant non fosse evidente, lo è divenuto in causa di lui. Che l'algoritmo del calcolo differenziale sia algoritmo primo, evidente, indemostrabile, questo è ciò, che si dice dal nostro geometra, e che non si prova. Tuttavia ognun di noi comprende, che la evidenza del principio del calcolo differenziale, dovrebbe essere o dimostrativamente fatta conoscere, o pure dovrebbe appalesarsi spontanea ed apertissima da sè stessa.

421. La principale premura di Wronski quella dunque esser doveva di dimostrare o almeno appalesare precisamente, che l'algoritmo del calcolo differenziale fosse certo ed evidente per sè stesso, e di una certezza come egli dice intuitiva apodittica. E quando il principio del calcolo differenziale fosse evidentemente certo non si sa comprendere, come tutti gli uomini culti non l'abbiano conosciuto per tale. Ora la universale di tutti i geometri non l'hanno riconosciuto di questa natura.

Non avendo egli adunque appalesato con sufficiente chiarezza questa spontanea verità del principio in discorso, rimane la sua proposizione involta in una oscurità impenetrabile. In fatti, sia poi che la nostra mente si faccia a considerare l'oggettivo, che a lei si appalesa per mezzo dei sensi; sia poi, che si occupi a contemplare il soggettivo, che ritrova in sè stessa, qual patrimonio o prodotto della sua percettiva e conoscitiva attività, certo si è, che nel riconoscere evidente o no tanto l'oggettivo, che il soggettivo, la nostra intelligenza non ha altra regola o altro mezzo se non che quella luce evidente e chiara che accompagna le sue percezioni o posizioni, e nelle quali vi ravvisa così effettivamente la verità, che in questa rinviene a nitidi caratteri compresa anco la impossibilità del contrario. Trasportando adunque il nostro pensiero sopra il principio del cal-

colo differenziale, chi mai può persuadersi e ravvisarvi per entro la piena verità intuitiva?

422. Venendo dunque a più concreto ragionamento, o queste leggi soggettive della generazione indefinita ideale della grandezza sono evidenti in sè stesse, o lo sono solamente per induzione ed in forza di apposito ragionamento; ma nè l'una nè l'altra cosa dal nostro geometra si prova, dunque il suo dire si risolve in mera asserzione. Nè giovano a lui le dicerie, che le leggi del calcolo differenziale non sieno leggi della generazione effettiva delle grandezze, ma leggi della cognizione di questa generazione medesima; imperciocchè anco le semplici idee, nozioni, o intuizioni della nostra cognizione, sono sempre interni fenomeni di nostra intelligenza, sono mere funzioni di essa, quindi, sempre è vero, che o debbono essere evidenti per sè stesse o per dimostrazione. Insino dalla più remota antichità le grandezze prese in considerazione dai cultori della scienza geometrica sono sempre state considerate grandezze ideali, astratte e mentali, o se più piace, regole razionali di nostra maniera di vedere, di conoscere, o di ideare, di percepire ec. onde poco importa, che adesso si chiamino regole soggettive, piuttosto che regole di nostro ideale pensamento, giacchè sarebbe forse meglio appellarle leggi nostre ipotetiche ideali conformate e concepite secondo il nostro particolar modo di conoscere, di vedere e di intendere.

Per riguardo poi al nostro geometra che cerca tradurre il nostro pensiero dalla grandezza alla generazione che noi conosciamo della nostra cognizione della grandezza, noi non insisteremo di avantaggio perchè, con questo suo dire trae l'animo fuori dal principale oggetto, anzi lo devia da esso sostanzialmente; imperciocchè in un ragionamento di grandezza, passare alla maniera con la quale noi veniamo in cognizione della generazione della cognizione della stessa, se

questo non è fourviare del principal soggetto, qual'altra cosa lo sarà?

Più sia detto e rimarcato, che il contegno di Wronski pecca anco pel seguente lato. La generazione della cognizione versa e porta, come egli dice, sopra il modo col quale si ingenera in noi la cognizione della grandezza; quindi questa cognizione non appartiene alla dottrina delle grandezze, e quindi non appartiene a quella del calcolo differenziale, il quale parla e tratta di grandezze già date e poste, ed è all'in tutto estraneo alla generazione della loro cognizione.

Più queste grandezze geometriche astrattamente considerate sono dotate della proprietà del continuo, la qual proprietà non è altra cosa fuor che una legge ipotetica volontaria di nostra cognizione, quindi sempre all'in tutto perfettamente soggettiva.

423. Questi ragionamenti sono facili, chiari ed innegabili, e perciò basta l'averli accennati perchè se ne appalesi alla nostra intelligenza la loro verità. È dunque cosa certa, che anco le antiche speculazioni geometriche, ovvero le loro posizioni astratte ideali si aggirano sempre sopra la generazione delle quantità soggettive, e soggettivamente considerate. Le quantità minori di tutte le assegnate ed assegnabili, le prime ed ultime ragioni delle grandezze, le evanescenti ec. ec. che cosa esse sono se non leggi o nozioni elaboratissime di nostra maniera di immaginare e di percepire? Sopra quale altro appoggio adunque il geometra di cui parliamo vuol dare od attribuire al soggettivo algoritmo del calcolo differenziale la proprietà di algoritmo primitivo e perciò dotato di verità piena intuitiva?

424. E qui siaci permessa un'altra osservazione, e questa pure di non lieve importanza; cioè, che altra cosa sono le leggi geometriche con le quali gli antichi ed i moderni spingono innanzi li loro ragionamenti intorno alla diminuzione

indefinita della grandezza finita, altra cosa e ben diversa, sono le leggi alle quali si appigliano nel trattare gli ultimi risultamenti finali della stessa grandezza finita (che erroneamente ritengono di avere conseguiti). Con le prime leggi essi sperano di arrivare alla minor di ogni data, con le seconde si permettono di pensare, che questa sia cotanto stremata da poterla avere come zero.

Ora insino a tanto, che essi prosieguono l'andamento ed il processo delle loro serie, sempre si trovano tra valori finiti, e di natura finita, e da questa per essi penosa condizione non sanno mai liberarsi. Che fecero adunque per vedere di conseguire lo scopo propostosi? Abbandonate le serie conducenti a diminuzione, si librarono, per così dire, sulle ali del loro pensiero, ed in onta della effettiva impossibilità di arrivare al fine delle loro serie, si trasferirono ipoteticamente alla loro fine o all' infinito corso delle serie medesime e con tale ardito ipotetico pensiero cercarono di affissarsi in questo supremo confine e colà di vedervi la minor di ogni data ridotta allo stato di quasi zero. Ora con questo sforzo di spingersi col pensiero alla fine di serie interminabili, certamente che non è un' operazione oggettiva, ma invece di natura al tutto soggettiva e puramente soggettiva. Dunque anco li antichi si appigliarono al soggettivo e lo trattarono con famigliarità. L' inassegnabile grandezza è idea soggettiva, l' infinita divisibilità delle grandezze è idea soggettiva, la proprietà del continuo, fonte di questa divisibilità, è idea soggettiva, eminentemente soggettiva ed ipotetica insieme è la serie infinita, ed il di lei protraimento all' infinito; e dopo tutte queste nozioni soggettive, e nelle quali si può dire, che essi miravano alla generazione soggettiva infinita delle grandezze, perchè si ha da dire, che essi ignoravano all' in tutto sì fatta generazione? L'infinitesima entità ideata da Galilei, ritenuta da Kleplero, Fermat, Barrow ed altri,

dava pure questa generazione infinita e sublime delle grandezze; e per qual ragione si dirà che da essi si tratta e si considera cosa oggettiva e non soggettiva. Ha essa forse questa idea cangiato natura nella mente di Leibnitz? L'ha egli forse purificata, lambicata in modo da averla elevata dallo stato oggettivo al soggettivo? Certamente che no; perchè quale era in mano di Galilei e degli altri, tal è in mano sua.

Ma quello che più da vicino ci interessa si è, che gli antichi ritenendo il lor principio: che due grandezze erano eguali quando differivano tra di loro solamente di una quantità minor di ogni data, non hanno ritenuto un principio secondo essi di certezza apodittica rigorosa. Se tale fosse stato il pensamento degli antichi, non avrebbero annunciato il principio in modo contenente il confronto della minor di ogni data con la quantità finita. E se gli antichi, riguardo alla loro inassegnabile soggettiva la consideravano in confronto della grandezza finita, ciò voleva dire, che sebbene la minor d'ogni data fosse quantità ideale soggettiva, pure la consideravano ancora come avente qualche sentor di grandezza, o come un supremo residuo di grandezza finita, altrimenti non sarebbe stato possibile di porla in comparazione col finito, come sarebbe sempre impossibile comparare l'infinitesimo al finito, se per essere il primo infinitamente piccolo ideale soggettivo nulla avesse a che fare col finito, o nulla avesse di comune col finito medesimo.

425. Per simile maniera le leggi del calcolo differenziale le quali vogliono che la variazione sia una grandezza infitesima, presentano nello sviluppamento della funzione $F(a + dx)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} dx + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\, a^{n-2} dx^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\, a^{n-3} dx^3 +$ ec. presentano, diciamo, le seguenti osserva-

zioni: cioè che a^n primo termine di valor finito dello sviluppamento riesce infinito in confronto del secondo, che è $\frac{n}{1} a^{n-1} dx$; e che questo secondo è infinito in confronto del terzo che è $\frac{n}{1} \frac{n-1}{2} a^{n-2} dx^2$, e così via via senza fine. Ora che ne viene da ciò? Forse che sia evidente, di evidenza piena rigorosa intuitiva che $a + dx$ sia $= a$, il che vuol dire esser evidente che $dx = \frac{1}{\infty} = 0$? Questo non mai. Eppure il filosofo di Polonia non poteva ignorare, che la principale difficoltà promossa contro il calcolo differenziale consisteva appunto nella libertà che si pigliavano i geometri di considerare la dx quale zero in confronto della quantità finita.

426. La filosofia del calcolo differenziale non è mai stata tacciata di inesattezza se non sotto questo punto di veduta intellettuale. Ora questo calcolo, secondo il filosofo di Polonia, è fondato sopra questo principio eminentemente soggettivo; dunque diremo noi il principio del calcolo differenziale leibniziano non è mai stato evidente di perfetta evidenza in forza della sua *soggettività*. Leibnitz che ne è il famoso inventore, o meglio lo scientifico formolatore di esso principio, Leibnitz non lo spacciò mai di tanta evidenza apodittica, di quanta adesso si vorrebbe dichiarar fornito. E sia anco notato, che si accontentava invece di ritenerlo per evidente specialmente in vista dei risultamenti veraci che si ottenevano per mezzo del calcolo differenziale fondato e regolato sopra questo principio medesimo.

427. Non è vero che Leibnitz abbia fatto la incomparabile scoperta della generazione indefinita della grandezza, e

basta il fin qui detto a dimostrare questa asserzione; poi la confermano pienamente le dottrine di Galilei, adottate da Fermat, da Wallis, da Barrow e da altri. Invece egli ha più dichiaratamente manifestata, e se anco piace meglio, discoperta la generazione indefinita delle grandezze in quanto si considera estesa a tutti gli indefiniti ordini degli infinitesimi; e questo volentieri si concede al sommo geometra di Lipsia. Tuttavia dopo tutte queste sublimi nozioni, e dopo aver con tanta maestria sviluppate queste grandi idee, egli non si è nè pur cimentato alla dimostrazione del principio del calcolo differenziale, e non già che lo ritenesse evidente di evidenza spontanea, perchè il già detto lo smentisce, ma unicamente perchè conduceva a risultamenti esatti.

428. Il principio del calcolo differenziale dichiarato da Wronski giustamente principio tutto soggettivo, significa esser principio tutto ideale razionale e pienamente dell'ordine intellettuale speculativo. Ora non ci occorrono profondi pensamenti e difficili o dilicate induzioni per conoscere, che anco le entità nostre ideali soggettive esigono nè più nè meno delle oggettive, esigono cioè di essere, o verità prime evidenti, o verità dimostrate; nulla adunque di vantaggio ci procura la nozione o la avvertenza, che sia principio soggettivo, anzi che oggettivo. Che più, l'opinione universale di tutti i filosofi si è, che in queste elevate nozioni ideali astrattissime si debba procedere con un rigore di ragione supremo, e dove non siavi tutta la luce piena dell'evidenza, e quale precisamente si ravvisa nel principio di nostra ragione giammai non debbasi riconoscere e ritenere verità, e certezza esatta.

429. Ma proseguiamo a riferire i pensamenti di questo bravo geometra di Polonia. Questi nella sua opera intitolata: *Philosophie de l'infinit*, edita in Parigi 1814, alla pag. 34, scrive: = Prima di tutto bisogna riconoscere che l'idea dell'infinito è un prodotto intellettuale, tutto affatto diverso da

quello che costituisce il concetto della quantità finita. (Dottrina già insegnata da Galilei, vedi num. 142, 143). Queste due funzioni del nostro sapere sono affatto eterogenee.... Una la concezione della quantità finita è un prodotto dell'*intelletto* che serve a legare intellettualmente le intuizioni, che noi abbiamo degli oggetti, o se più piace, gli oggetti medesimi: cioè parlando un linguaggio più filosofico, la concezione di una quantità finita è un prodotto dell'*intelletto*, il quale sotto le condizioni del tempo, che gli sono proprie, introduce una unità intellettuale, o una significazione nell'essere opposto al sapere; (fortuna per noi che tutti abbiamo una chiara idea della grandezza finita, poichè se la dovessimo apparare da questo linguaggio filosofico, non sapremmo qual costrutto ricavarne). L'altra delle due funzioni delle quali si parla, l'idea dell'infinito, è un prodotto della *ragione*, che in sè stesso si ritrova fuori delle condizioni del tempo, e per conseguenza inapplicabile, o trascendente nell'uso costitutivo, che noi facciamo del sapere per la cognizione dell'essere; vale a dire, inapplicabile in quest'uso particolare del sapere, il quale costituisce le leggi delle nostre cognizioni immanenti, o delle nostre cognizioni che possono essere contestate per mezzo dell'esperienza, della quale la prima condizione è il tempo. Ma impiegato almeno di una maniera regolativa, sottomettendolo per l'influenza del giudizio alle condizioni del tempo, le quali gli sono estranee, questo prodotto della ragione, l'idea dell'infinito, trasformata così nell'idea dell'*indefinito*, serve a legare le nozioni istesse, che noi abbiamo della quantità, vale a dire parlando una lingua più filosofica, l'idea dell'infinito ove traspare *l'assoluto* trovandosi in forza della mediazione del giudizio trasmutata nell'idea dell'indefinito, per l'applicazione delle condizioni del tempo, serve almeno regolativamente nella sfera immanente delle nostre cognizioni, e tutto questo introducendovi l'ultima

unità, o l'ultima significazione non nell'oggetto del sapere, nell'essere, ma sibbene nella funzione istessa del sapere, relativa alla cognizione della quantità. Onde quello, che qui importa di ben rimarcare, si è, che la concezione di una quantità finita s'aggira sempre sull'oggetto del sapere, sopra l'essere, il quale è opposto al sapere, e che costituisce l'oggetto della cognizione; in tanto, che l'idea dell'infinito, che per sè stessa si trova fuori delle condizioni del tempo, e che per conseguenza non trova applicazione immediata all'oggetto del sapere, all'essere, che è opposto a quest'ultimo, non può in sottomettendola, coll'intermedio del giudizio, alle condizioni del tempo, per utilizzare nella sfera delle nostre cognizioni immanenti, vale a dire, in trasmutandola nell'idea dell'indefinito, non può dico, aggirarsi che sopra le funzioni istesse del sapere, nelle quali essa introduce la più alta unità intellettuale, o la più alta significazione nella produzione istessa della cognizione della quantità. (Nessuno può avere una adequata idea dell'infinito o della quantità infinita, ma in fe' di Dio, che con questa maniera di indeterminate ed oscure circonlocuzioni, certamente, che si procura di far perdere di vista anco quel poco di questa nozione che il buon senso ci permette di comprendere); in breve, perchè la concezione di una quantità finita serve di legge costitutiva alle relazioni possibili nell'essere opposto al sapere; e l'idea dell'infinito trasmutata nell'idea dell'indefinito per l'applicazione delle condizioni del tempo, non serve che di legge regolativa o di regola alla funzione istessa del sapere concernente la generazione della cognizione della quantità.

430. Ella è questa importante distinzione trascendentale il nodo della metafisica del calcolo infinitesimale. In fatti le quantità finite e le quantità indefinite, vale a dire, le quantità infinitesimali, appartengono a due classi di cogni-

zioni tutt' affatto differenti, ed anco eterogenee: le quantità finite versano sopra gli oggetti delle nostre cognizioni e le quantità infinitesimali versano sopra la generazione istessa della loro cognizione; di maniera che ciascheduna delle due classi di cognizioni, deve avere delle leggi proprie, ed è nella distinzione di queste leggi che si ritrova evidentemente il punto capitale della metafisica delle quantità infinitesimali.

431. Per meglio distinguere queste leggi noi chiameremo leggi *oggettive* le leggi delle quantità finite, e leggi *soggettive* le leggi delle quantità infinitesimali; perchè esse non versano che sopra la generazione delle nostre cognizioni relative alla quantità. Ora il primo risultamento scientifico che noi conseguiamo da questa distinzione trascendentale è il *precetto negativo* di non confondere nell' algoritmia, le leggi oggettive delle quantità finite, con le leggi puramente soggettive delle quantità infinitesimali.

Questa confusione è quella che costituisce la sorgente della inesattezza che si crede annessa al calcolo infinitesimale. In fatti confondendo le leggi soggettive delle quantità infinitesimali, le quali non sono che delle regole di nostra speculazione sopra la generazione della cognizione della quantità, con le regole oggettive delle quantità finite, le quali sono le regole della realità istessa della quantità, si cade in equivoco; ed è così, che siamo naturalmente portati a confonderle, e crediamo scoprire nei procedimenti del calcolo differenziale o infinitesimale una specie di contraddizione logica od una assurdità proveniente come se lo vede qui dall' antinomia trascendentale, che si ritrova nei prodotti della ragione e con quelli dell' intelligenza.

432. Avendo così evitata la confusione delle leggi oggettive delle quantità finite, con le leggi puramente soggettive delle quantità infinitesimali, come lo prescrive il *precetto negativo,* che è il primo risultamento della distinzione trascen-

dentale di queste due leggi, per metter fine e compimento alla metafisica del calcolo infinitesimale, bisogna dedurne il principio delle leggi soggettive, che sono l'oggetto di questo calcolo ed è questo evidentemente il *precetto positivo* risultante dalla distinzione trascendentale di cui si tratta. Ora questo precetto delle leggi soggettive, costituente l'oggetto del calcolo infinitesimale non è altra cosa che il seguente: *Due quantità che non differiscono tra di loro se non se di una quantità infinitamente più piccola, sono rigorosamente eguali.*

433. È questo principio, che ha tanto imbarazzato i geometri. Questi sapienti invece di non riconoscervi che una regola soggettiva per la generazione della cognizione della quantità, vi hanno voluto costantemente ravvisare una regola o una legge oggettiva della relazione istessa delle quantità; ed in allora non fa sorpresa, che abbiano sconosciuto evidentemente per fino la natura delle cose, se possiam dire così, e conveniva bene, che si sconoscesse nel medesimo tempo la verità che si ritiene nelle cose. In tanto, malgrado questo errore, per sè un poco grossolano, la certezza apoditica attaccata al principio di cui si tratta, ha forzato i geometri, tutti indistintamente, a pagare il tributo che si deve alla verità; perchè tutti i geometri indistintamente, ed era impossibile altrimenti, hanno supposto questo grande principio esplicitamente o implicitamente nelle loro argomentazioni concernenti il calcolo infinitesimale. Ecco del resto la deduzione metafisica rigorosa di questo gran principio.

434. Poichè, come abbiam veduto più sopra, le leggi delle quantità infinitesimali sono puramente soggettive, cioè non sono, che mere regole per la generazione della cognizione della quantità, e non delle leggi oggettive della relazione istessa della quantità, egli è vero immediatamente, e questo non solo in maniera intuitiva, e per un giudizio sintetico *a*

priori, come negli altri principii delle matematiche, ma anco per di più in una maniera discorsiva per il solo principio logico di contradizione, egli è vero diciamo noi: = *che due quantità A e B che non differiscono fra di loro, che di una quantità indefinitamente piccola C sono rigorosamente eguali; perchè l' idea della quantità infinitesimale C non essendo, che una regola per la generazione della cognizione della quantità dell' ordine di quelle che si trovano qui in relazione, cioè dell' ordine delle quantità A e B, e non già una cognizione acquistata o ingenerata da qualche quantità, perchè come abbiam conosciuto, la quantità infinitesimale più piccola C non ha nè essa stessa, nè le sue parti qualunque esse siano, alcuna realità oggettiva nella sfera delle grandezze, nella quale si ritrovano le quantità A e B, egli è chiaro, che la relazione delle quantità A e B, delle quali si tratta, considerate nella loro realità oggettiva, non è per verun conto cangiata dall' influenza puramente soggettiva della quantità infinitesimale C* =.

455. Ho qui voluto porre sott' occhio al lettore per intiero la dottrina di questo valente geometra, acciò possa da sè stesso portarne quel giudizio, che crederà migliore, ed ancora perchè possa meglio intendere ed apprezzare anco quel poco che diremo nel farne l' analisi.

Omettendo di seguirlo nei minuti rapporti che egli ci porge dell' idea oggettiva e soggettiva, giacchè nell' epoca in cui scriviamo ogni filosofo pienamente conosce la differenzà che passa tra queste due distinte nozioni: sorpassando pure i due precetti *negativo e positivo*, giacchè tutti e due si trovano riuniti e sottintesi nella *deduzione metafisica rigorosa del gran principio del calcolo differenziale*, esaminiamo solo quest' ultimo principio, e vediamo con tutta l' attenzione, se in esso esista tanta evidenza o metafisica rigorosa quanta crede ravvisarvene il geometra di Polonia.

436. Primamente osserveremo, che ammesso per vero, che le due grandezze A e B, sieno rigorosamente eguali quando non differiscano tra di loro che di una quantità infinitamente piccola C, conviene che la C non abbia valore finito capace di accrescere o di diminuire (secondo i diversi segni) l'una o l'altra delle due grandezze A e B. Ora come può avverarsi questo per parte della C? Forse perchè la C sia cotanto stremata nel suo valore che più non valga di quello che valga lo zero? No, secondo il pensamento di Wronski, perchè anzi egli vuol far credere che la C non turbi l'eguaglianza delle A e B, per il motivo che la C non è idea di quantità, ma una semplice regola soggettiva intellettuale della nostra cognizione della generazione della quantità, e perciò la C è cosa affatto eterogenea e diversa dalle A e B, le quali sono in relazione finita tra di loro, ed hanno una realtà quantitativa finita, mentre la C come egli dice, non ha nè essa stessa, nè le sue parti qualunque esse siano alcuna realità oggettiva nella sfera delle grandezze nella quale si trovano le grandezze A e B.

Questo ragionamento quale da lui si produce ci presenta è vero una verità innegabile, e la verità consiste nell'esser certo, che la C considerata a modo suo, non può alterare la relazione che passa tra A e B, perchè nulla ha a che fare con esse. Ma qual pro da sì fatto argomento si può ricavare a favore del celebre principio del calcolo differenziale? certamente nessuno; perchè con sì fatto argomento non si può dimostrare per verun conto il principio del calcolo differenziale di cui si tratta. E venendo a più stretto ragionamento osserviamo, che se la C per esser ritenuta quantità soggettiva è cosa eterogenea e di diversa natura delle grandezze, che sono nella sfera, nella quale si trovano le A e B, egli è certo che la C nè altera, nè può alterare il loro stato, o la loro reciproca relazione; anzi

altrettanto è assolutamente impossibile o ripugnante. Ma è altresì certo ed indubitato, che il principio del calcolo differenziale viene per questa maniera di pensare ad essere al tutto snaturato e tramutato in una proposizione scempia, ed in tale stato nulla affatto più significa; imperciocchè supponiamo che niun concetto soggettivo influisca nè alteri qualsivoglia cosa concreta oggettiva (come noi pure abbiamo lungamente dimostrato cap. 16 *Teorica e pratica del probabile*); appunto per questo si rende manifesto, che secondo il pensamento di Wronski, il principio del calcolo differenziale nulla più assolutamente significa; atteso che si risolve nella seguente sentenza, che sopra A e B non ha azione alcuna, ciò che ad esse non è omogeneo, ma che anzi per verun conto loro non appartiene, e che giace anzi in un altra sfera al tutto diversa delle A e B. Ed in quel modo, che l'equilibrio di due corpi non rimane soventi volte alterato dalla presenza di un imponderabile aggiunto ad uno di essi, così le due date grandezze A e B non possono mutare il loro stato oggettivo di eguaglianza per la sopravenienza di una C loro eterogenea e di natura soggettiva affatto diversa. Or bene acciò il principio del calcolo differenziale abbia una significazione nel modo con cui viene annunciato, (e come si annuncia da tutti i geometri), importa che la C sia posta in comparazione colle grandezze A e B; (diciamo in comparazione, poichè si annuncia come segue, che due grandezze A e B le quali non differiscono tra di loro che di una grandezza infinitamente piccola C, queste grandezze sono eguali), poichè quando non fosse la C posta in comparazione, essa sarà bensì incapace in tal caso di non turbare le grandezze A e B, ma in questo modo il principio di cui si tratta è distrutto da capo a fondo, e si cangia come è detto, in una proposizione al tutto scempia. Se adunque l'enunciato del principio del calcolo differenziale è tutto di

sua natura fondato sopra questa comparazione, se non consiste in altro fuori che in questa comparazione medesima, egli è fuori d'ogni dubbio, che la C, contemplata dai geometri nel principio del calcolo differenziale, è fuor di dubbio diciamo, che la C sia della stessa natura e qualità e nella stessa sfera delle A e B; ed è fuor di ogni dubbio che i geometri fondano la incapacità nella quale trovasi la C di non alterare il loro stato, sopra tutt'altro titolo anzi che sopra quello della di lei diversa natura. In fatti essi fondano o ripongono questa incapacità della C nella di lei infinita relativa piccolezza. Onde si comprende apertamente, che in questo luogo il filosofo di Polonia fa equivoco tra la natura delle grandezze ed il loro valore. Vero è, che la quantità infinitesima è in noi un prodotto solo mentale e tutto pienamente soggettivo, in quanto che non è che la nostra facoltà pensante quella che considera la grandezza finita come risolubile in tanti elementi infinitesimi, e vero è, che questi elementi infinitesimi non esistono che nella imaginativa nostra, ma tutta questa quantità soggettiva ed infinitesima è assai ben diversa della quantità soggettiva contemplata da Wronski, poichè egli trasporta il soggettivo nell'ideale cognizione della generazione della grandezza, lo trasporta diciamo sopra la cognizione che noi abbiamo di questa nostra ideale generazione; e quest'ultima generazione della cognizione mi pare anco una pure illusione, poichè non si può comprendere, cosa significhi nel nostro animo la generazione della nostra cognizione, che egli chiama anco idea. Ora il trasferire questa idea soggettiva della generazione della grandezza all'idea della cognizione della generazione della grandezza, serve a pura illusione, applicata che sia tal generazione al principio del calcolo differenziale. Imperciocchè in questo calcolo si suppone apertamente che possa esser tolta od aggiunta la infinitesima C tanto alla A, quanto alla B.

La natura geometrica adunque della C per quanto imaginar si voglia soggettiva, tuttavia in questa nostra considerazione ogni qual volta la C si adopera o la si impiega nel calcolo differenziale in qualità di variazione, e variazione che deve esser termine di comparazione con le grandezze finite A e B, considerate esse pure informate della proprietà del continuo, allora non può mai esser considerata la C di natura diversa e all'in tutto eterogenea alle A e B. Quelli che non convenissero in questa maniera di pensare, che è poi la maniera unica e veramente costituente il principio del calcolo di cui si parla, si ridurrebbero a togliere al principio del calcolo medesimo ogni significazione ragionevole, giacchè si collocherebbero nell'identica situazione di colui che pronunciasse, che due lunghezze geometriche sono eguali quando non differiscono tra di loro che per la gravità terrestre; proposizione che risolvesi in una verace scipidezza.

437. E venendo anco a più precisa osservazione, noi chiediamo: perchè la C si considera da tutti infinitesima? perchè come infinitesima si suppone nel calcolo differenziale, che non possa turbare l'eguaglianza delle due A e B finite e perciò che si possa trattar come zero? Se si avesse voluto considerare la C come cosa affatto eterogenea alle A e B era al tutto cosa inutile al figurarsela infinitesima o indefinitamente piccola; poichè in causa di essere di natura diversa e al tutto eterogenea poteva supporsi di qualsivoglia valor finito e grande e grandissimo e sommo, poichè tanto e tanto non sarebbe capace di alterare la eguaglianza delle A e B, a qualunque di esse venisse applicata.

La ragione per la quale la C dai geometri si è ideata infinitesima, non fu già perchè in tale stato paresse loro che riuscisse di differente natura, ma bensì perchè quantunque omogenea in tale supremo stato di tenuità era ritenuta com-

parativamente come incapace ad alterare il valor delle A e B.

438. Dopo aver lette tutte le opere dei geometri, e segnatamente quelle di Leibnitz e de' suoi contemporanei e successori si prova meraviglia nel sentire, che col pensamento della distinzione dell'*oggettivo* e del *soggettivo* si abbia potuto credere, che la intenzione di Leibnitz e dei geometri fosse quella di considerare la C come cosa affatto eterogenea alle A e B.

439. Forse all'epoca nella quale scriveva il gran geometra polacco nessuno aveva filosoficamente ben dimostrato, come noi abbiam fatto nella *Teorica e pratica del probabile,* che l'oggettivo ed il soggettivo non solo sono due cose distinte, ma sono cotanto diverse, che una non può aver influenza sull'altra. Dal soggettivo niun'aiuto per l'oggettivo, ed al contrario; perciò non fa sorpresa se Wronski siasi ingannato a dare questa strana interpretazione al calcolo differenziale; interpretazione, che in filosofia non solamente è manchevole, ma che manda sossopra tutto il calcolo superiore.

440. Stando alle dottrine di Kant delle quali il nostro geometra si dimostra zelantissimo seguace, si devono tenere per soggettivi tutti i principii matematici, tutte le grandezze matematiche così dette pure od ideali. Leibnitz parla di grandezze geometriche pure; così hanno fatto tutti i geometri indistintamente dopo di lui; dunque le A e B, furono sempre da tutti considerate grandezze soggettive; diciamo grandezze soggettive, perchè Wronski pare, che col suo soggettivo abbandoni l'idea delle grandezze, e si rivolga alla sola nozione soggettiva della cognizione che noi abbiamo della generazione della grandezza, e che poi paragoni questa nozione, considerata qual pura nostra funzione mentale interna con le A e B reali oggettive.

Ma senza seguirlo, in queste sue per noi poco chiare distinzioni, ci basta di potergli indiriggere questo impreter-

ribile dilemma: o la sua C si suppone e si ritiene della stessa natura e condizione delle A e B, o è di natura diversa. Nel primo caso tornano inutili tutte le sue distinzioni messe in campo, e non servono che a puro perditempo; o la C è di natura diversa e di diversa condizione e stato ed esiste in una diversa sfera, ed allora si rende il principio del calcolo differenziale a non avere verun significato, onde invece di riuscire a dimostrarlo viene intieramente a distruggerlo. Di fatti se volessimo ristringere la nozione del soggettivo alla generazione della cognizione che noi abbiamo della grandezza, entraressimo in mezzo alle più oscure ricerche che colla matematica non avrebbero veruna relazione.

441. La dimostrazione adunque che Wronski ha posta in campo, pag. 434, non è per verun conto una dimostrazione del principio del calcolo differenziale, ma si riduce ad una mera illusione vestita dei nomi di dimostrazione ed ornata dalle voci evidente, apodittica; il calcolo differenziale da cima a fondo è tutto soggettivo; soggettive sono le sue formole analitiche, e non acquistano mai valore oggettivo se non nelle loro pratiche applicazioni, se pure anco in allora altrettanto si avvera. L'infinitesima quantità è tutta soggettiva, poichè in realtà non si ritrova, ma viene da noi soggettivamente ideata quale induzione o derivazione dalla proprietà del continuo; proprietà essa pure eminentemente soggettiva.

442. Più osserveremo, che nell'esporre la sua dimostrazione si permette di considerare la C come espressione o grandezza indefinitamente piccola; il che fa vedere, che anch'egli si studia indossare od appropriare la trascuranza della C anco allo stato della sua indefinita piccolezza, e non già solamente alla pura natura della C, come diversa dalle A e B. Però qualunque sia l'algoritmo medio, che egli appella

indefinito costituente questo stato della grandezza, algoritmo, che egli crede derivare *a priori* dal primitivo algoritmo dell'infinito nel quale traspira, come dice, *l'assoluto*, sottomettendo l'idea dell'infinito alle condizioni del tempo, noi non sapremmo dire con quale esito ciò tenti, nè sino a qual punto riesca intelligibile per noi questo algoritmo medio e derivato dal primo. Solamente ci permetteremo di osservare, che per un animo non preoccupato da fallaci o male intese dottrine sempre sarà vero, che la nozione, che noi abbiamo dell'infinito, quantunque non appieno comprensibile essa riesce però sempre molto diversa dalla nozione dell'indefinito. Così pure ci appare diversa anco quella dell'infinitamente piccola, da quella solamente indefinitamente piccola; poichè nell'infinito e nell'infinitesimo, benchè incomprensibili, la nostra speculatrice facoltà si crede d'essere in faccia ad estremi, bensì tragrandi, ma però estremi fissi ed appieno determinati, laddove nell'indefinito, si trova in faccia a nozioni indeterminate e delle quali non abbiamo verun valore fisso o pienamente determinato su cui appoggiarsi.

Finalmente non dimentichiamo mai, che tutti i principii delle matematiche, meno il principio evidente di ragione, base o fondamento universale di assoluto sapere per tutte le scienze indistintamente, tutti diciamo i principii sono, o immediate derivazioni del suddetto principio, ed allora si chiamano giustamente, quali principii primi, assiomi ec. o sono posizioni ideali nostre e tutte soggettive, e sotto questo riguardo sono ipotesi, astrazioni ec.

443. Le basi del calcolo differenziale, che abbracciano l'infinito e l'infinitesimo, sono basi eminentemente soggettive, e niuna mentale escogitativa può privarle di questa loro proprietà soggettiva, perchè il volerle privare di questa sarebbe niente meno che distruggerle.

Che poi, come pensano Kant e Wronski, sieno que-

ste proprietà soggettive *trascendentali*, piuttosto che proprietà astrattissime e note a tutti i geometri, questo nulla importa per l'oggetto di cui qui trattasi, perchè altrettanto non somministra veruna prova per la metafisica verace del calcolo differenziale.

444. Se il lungo dire di Wronski ha per iscopo d'insegnare, che i procedimenti del calcolo infinitesimale sono tali che nè direttamente, nè indirettamente si possono ricavare o dedurre dal reale oggettivo, questo si ammette per vero, come pure conveniamo, che l'oggettivo non può somministrare la vera metafisica del calcolo infinitesimale. La metafisica che si può avere di questo calcolo sta riposta nella proprietà del continuo, come in questa trovano vita l'infinito e l'infinitesimo. La proprietà del continuo è tanto sublime, tanto profonda e tanto infinitamente estesa, che per la mente umana nulla di più grande. Se le serie procedono all'infinito è per il continuo; più la legge che governa le serie deriva la sua possibilità infinita dal continuo; la serie degli aumenti senza fine, e delle diminuzioni interminabili dipendono dal continuo ec.

445. Anco i metodi delle quantità minori di tutte le date ed assegnabili, quelli dalle prime ed ultime ragioni, delle evanescenti, dei limiti, delle esaustioni ec. sono tutti metodi fondati nella proprietà del continuo; e questi metodi filosoficamente considerati si possono ritenere come prodotti di due distinti concetti mentali soggettivi; uno che ci presenta la possibilità di tutte le indefinite escogitabili diminuzioni, l'altro la possibilità di tutti gli indefiniti aumenti senza fine. L'uno tende a rinvenire gli estremi della grandezza o ad esaurirla; l'altro a portarla fuori dell'ordine finito, accrescendola oltre tutti i limiti.

446. Qualunque sia il merito filosofico, che si può ravvisare in questi pensamenti che ci prendiamo la libertà di

esporre intorno le nozioni dell' infinito e dell' infinitesimo, certo si è, che tutti si fondano nella proprietà del continuo, la quale per noi è la più soggettiva nozione possibile. Da queste dottrine, che siam venuti esponendo ne viene, che l'idea dell'indefinito è manco determinata, ed insieme manco suprema di quella dell'infinito; e quello che più da vicino c' interessa, si è, che dalla considerazione di Wronski traspare tanta difficoltà che possa esser derivata dall' infinito, che nulla di più difficile. Più, per quale ardito pensamento ci vuol far credere in fatti di poter assoggettare l'infinito alle condizioni del tempo, se all' infinito appartiene *l' assoluto* come confessa egli stesso? Vero è che tutte queste nozioni e cognizioni sono nostre interne vedute, sono nostre idee, tuttavia il volerle impasticciare, mentre sono di diversa natura e di difficilissima comprensione, è lo stesso che gettarsi nell'oscurità e nelle visioni le più incomprensibili.

447. Intanto osserveremo che l'indefinito, quale si concepisce da noi, e sopra del quale si appoggiano tutti i metodi dell'antica geometria, non è una nozione chiara, precisa e tale da poterci somministrare illazioni all'in tutto rigorose. E ciò, che anco più ci interessa si è, che dall' indefinito e dal finito non si possono ottenere grandezze tanto piccole, che si possano avere per zero rigorosamente.

448. Da quanto siam venuti sin qui esponendo ne par di essere pienamente in diritto di conchiudere, che l'argomento dell'autore polacco, argomento con cui egli tenta dimostrare il calcolo differenziale, non abbia per verun conto quella forza di convincere che tale geometra gli attribuisce. In vero, se lo ripeta anco un'altra volta, A e B sendo grandezze finite, certamente che non saranno cangiate nel loro valore da una C di natura diversa; ma non ci vogliono tutti gli occhi d' Argo per comprendere, che pigliando o considerando a questa maniera il principio del calcolo differenziale, si trova trasmutato in un controsenso, o meglio in una scipidezza.

449. Qualcuno facilmente ne farà osservare, che la infinitesima quantità detta anco differenziale, è appunto un' idea tutto soggettiva, affatto ipotetica, opera dell'animo nostro, il quale in suo pensiero ed in via tutta ipotetica, attribuisce alla grandezza finita questa variazione arbitraria distinta dall' oggettiva grandezza finita; e noi diremo che questo è vero; ma aggiungeremo, che la variazione di valore infinitesimo e perciò variazione soggettiva, si appropria e si attribuisce alla grandezza finita in modo che la si ritiene proprio un cangiamento, o un'aggiunta, o sottrazione sopravveniente alla stessa quantità finita, non in realità, ma per forza di nostro pensamento.

Di fatti, da che si dice esser avvenuta variazione o che mentalmente si suppone che la grandezza sia variata, certamente che tutto questo si suppone, e si deve supporre idealmente operato sopra la grandezza finita per un cangiamento di stato ad esso sopravveniente, altrimenti sarebbe e non sarebbe variata nè anco mentalmente. Una variazione sopravveniente ad una grandezza tenta a cangiarne il di lei valore, almeno idealmente, sia pure la variazione ideale soggettiva quanto si voglia.

450. La linea v. g. entità di pura lunghezza, e di lunghezza tutta soggettiva, partecipa e si adatta alla qualità ed entità della grandezza finita dotata della proprietà del continuo, perciò quando consideriamo col nostro pensiero che a questa linea finita sopravvenga una variazione infinitesima, tale variazione benchè soggettiva si intende però che sia applicata, in via ideale bensì, ma però applicata alla linea, e in modo, che essa si ritenga provare in più o in meno questo cangiamento o variazione infinitesima. Anzi è chiaro, che con questa ipotetica variazione dobbiamo avere veracemente mutato infinitamente poco lo stato primitivo della funzione o della grandezza; in caso diverso la grandezza

varierebbe e non varierebbe nel suo stato, il che ripugna.

451. Da queste dottrine, che non possono esser rivocate in dubbio, ne viene, che in tutte queste maniere di variazioni rimane sempre viva la difficoltà che fu promossa contro il principio del calcolo differenziale, il quale alla fin dei fini, tende a far credere che siano eguali delle grandezze intanto, che sono disuguali.

Per altro è vero, che questo calcolo si regge sopra dati e principii soggettivi, si regge sopra mentali sublimi generazioni delle grandezze, e per dir breve, tutto in esso è soggettivo. Tuttavia come qui diciamo, appunto per questo nella sua natura non si rinviene la rigorosa esattezza di esso. Parimenti sguardando ben'addentro la natura soggettiva di tutto ciò che costituisce questo calcolo si vede, che il suo principio, che ammette eguali le grandezze che si suppongono differire di una infinitesima loro parte è affatto indipendente dalla sua qualità di *soggettivo.*

452. Di qua si conosce, come tra tutti i metodi insino ad ora immaginati per rendere evidente questo principio del calcolo superiore, quello, che si appalesa il più idoneo ed il più persuasivo sia il metodo suggerito del gran Galilei; il quale considera tutte indistintamente le grandezze geometriche finite soggettivamente come risultanti da una infinità di infinitesimi, ed in tale infinità tutte risolubili. Dopo questa grande e sublime posizione che egli, pel primo, poneva in piena luce di ragionamento, ragionava e discorreva come segue: = L'infinito non può accrescersi coll'aggiunta o sottrazione, perchè l'infinito si rifiuta al crescere ed al diminuire. Ora siccome ogni finito è risultante da un infinità di indivisibili, perciò nè uno nè due di questi indivisibili valgono a cangiare il finito, giacchè ogni grandezza finita è infinita in comparazione di ognuna delle sue infinitesime parti; di più avvalora anco in quest'altra maniera questo suo ra-

gionamento, facendo osservare, che siccome per turbare l'eguaglianza di due grandezze finite, vi vuole qualche cosa di finito, ed ogni finito per piccolo che sia, contiene infiniti indivisibili, perciò è chiaro, che per turbare l'eguaglianza di due grandezze finite, nè uno, nè due, nè dieci, nè cento indivisibili bastano, ma ce ne vogliono infiniti.

Questo ragionamento di Galilei benchè indiretto, tuttavia è però il più proprio e convincente tra tutti quelli che son venuti in mente ai geometri, e che siano sin'ora conosciuti. Poichè è fuor di dubbio, che a cangiare il valor finito della grandezza finita vi vuole qualche cosa di finito; quindi tutti convenir dobbiamo nel riconoscere, che un'infinitesimo non può cambiare il valor finito delle grandezze.

In questo ragionamento si appalesa parimenti il vero filosofico significato della dx eguale allo zero, cioè si vede, che questo valore della dx considerato come zero, altro non vuole indicare fuori che la incapacità nella quale si trova la dx di alterare il valor finito della grandezza geometrica o analitica di ogni maniera.

453. Dopo aver accennati tutti i principali pensamenti dei geometri da essi prodotti intorno l'infinito, l'infinitesimo e l'indefinito, ritorniamo a prenderli in considerazione per esaminarli con filosofico esame comparativo, e ciò a fine di pienamente conoscere, per quanto ci è dato, quale fra tutti i prodotti pensamenti sia quello che appaja più conforme a ragione, o quale sia il più filosofico; ed in pari tempo per intendere fino a qual punto e sotto quali condizioni si possono avere per esatti anco gli altri.

454. Le quantità minori di tutte le assegnabili, i metodi delle esaustioni, dei limiti, delle prime ed ultime ragioni, delle evanescenti, degli indivisibili o infinitesimi, non che tutte quelle delle derivate, sono nozioni che tendono a mettere sott'occhio grandezze così tenui e stremate, che niuna speculativa o pratica operazione può a noi procacciare.

455. Queste supreme tenuissime grandezze sono dunque per noi tutte nozioni ideali; non basta pienamente ipotetiche ovvero tutte elaborate ipotesi soggettive della nostra perspicacia. Tutte queste ipotesi pongono piede, anzi si fondano intieramente nella proprietà del continuo, proprietà ammessa in tutte le grandezze geometriche possibili e di ogni maniera, sino dalla più remota origine delle matematiche. Tutta la diversità, che la nostra attività intelligente può ravvisare nelle nozioni sopra ricordate non consiste che nella maniera più o men filosofica dai geometri tenuta nell'idearle.

456. Fra tutti i metodi fin'ora impiegati od anco solo immaginati dai matematici per arrivare a formarsi delle nozioni di queste così insigne tenuità e picciolezze, nessuno ve n'ha che ce le possa procacciare in via speculativa nè di fatto sì piccole per cui si possano considerare rispondenti alle nostre soggettive nozioni in proposito. Solamente nelle leggi soggettive geometriche, e queste ancora combinate colla nostra insigne cogitativa attività, si ritrova la loro esistenza, e questa pure solamente in via ipotetica, atteso che le leggi soggettive per sè stesse considerate non arrivano a soddisfarci intorno queste nozioni, ma hanno bisogno di esser ajutate dalla forza dell'imaginazione, e precipuamente con delle ipotesi.

357. E in verità per supplire per tutte le leggi geometriche delle diminuzioni, che si stendono all'infinito ec. conviene che soppravenga in campo la nostra quasi omnipotente attività dell'animo e che libratasi sulle ali de'suoi pensieri, si trasferisca, in via ipotetica sino al supremo fine cui tendono queste leggi, e si faccia dal luogo, per così dire, ove fantasticamente si è collocata, a considerare alla meglio che può quasi faccia a faccia queste sue nozioni, onde ella possa nella miglior guisa che può conoscerne e determinarne la loro natura, e ciò a fine di essere autorizzata a dedurne quelle illazioni legittime che ad esse sembrano rispondenti.

458. Egli è chiaro, primamente che ravvisa nelle leggi delle diminuzioni, protratte sinchè piaccia, ravvisa, diciamo, la proprietà del continuo rimanersi sempre intatta e tutta in pieno suo essere, tanto nelle grandi quanto nelle piccole grandezze, come pure in tutte le più minute loro parti, e persino nei loro elementi ultimi istessi. Induzione ella è questa, che si può avere per universalmente assentita, perchè anco gli antichi hanno ammessa la loro minor di ogni data come zero solamente in comparazione del niun potere che essa aveva a cangiare lo stato del valore delle grandezze finite.

459. Considerando adunque in sull'appoggio di queste osservazioni la forza persuasiva ed il rigore dell'antico principio, cioè che quelle grandezze che non differiscono che per una inassegnabile, queste sono rigorosamente eguali, si comprende appieno, quanto male sia appropriata la espressione: *sono rigorosamente eguali.*

Giacchè dopo tutto quello, che abbiam detto, si vede con quanta prudenza e con quanta precauzione debbono esser intese queste espressioni. Nè si pensi che noi ci scostiamo dal vero, parlando in questa maniera del famoso principio antico, perchè abbiam veduto, anco gli antichi geometri soventi volte aver ricorso all'argomento dall'assurdo, come richiesto necessariamente a convalidare un sì fatto principio.

460. Noi abbiam già dichiarato, come l'argomento dall'assurdo nelle ricerche, che si fondano sul principio antico della inassegnabile nulla giovi a compierne le dimostrazioni, e che ad altro non riesce, che ad una pura petizion di principio vestita da imponente apparato di forma dimostrativa. Ora tutte queste dottrine e specialmente quelle del num. 458, fanno ancor vie meglio comprendere questa verità, atteso, che nell'argomento dall'assurdo si contengono

le due esplicite supposizioni, primamente che la minor di ogni data non sia più divisibile, secondamente che non potendosi più dividere sia zero.

461. Queste ultime due ipotesi, combinate con quella di aver conseguita o da potersi conseguire la inassegnabile, lasciano pienamente comprendere, che il principio antico non ha mai potuto uscire dallo stato di principio ipotetico e non escirà mai per tutti gli sforzi umani da questo stato. Ciò si vuole ripetutamente rimarcato per disinganno degli ammiratori del rigore degli antichi e specialmente nelle più elevate parti del loro geometrico sapere.

462. Ravvicinando adunque tutte queste diverse osservazioni si può dire, che la minor d'ogni data è puramente supposta, anzi che dedotta da operazioni geometriche o razionali. Per pura e sola ipotesi, la si ritiene come eguale a zero, per ardita antilogica considerazione la si considera come non più divisibile, cioè privata della proprietà del continuo, della quale non può mai essere privata la grandezza finita e nè anco il primo sentor di grandezza finita. Dunque s'aggira in un largo abbaglio l'opinione di quelli, che voglion considerare vero e rigorosamente vero il principio antico, abbenchè figlio delle succennate ipotesi.

La nostra ragione, che non si appaga di una proposizione se non quando ha piena evidenza di essa, non potrà giammai essere pienamente soddisfatta e paga da questo modo di supporre anzi che di dimostrare il principio in discorso. Potrà dire la ragione a sè stessa che questo principio sia egualmente rigoroso del seguente, il quale stabilisca, che *due grandezze sono eguali, quando in niente differiscono tra di loro*? No certamente.

463. Il metodo delle esaustioni, che poi è anco quello dei limiti, si indentifica in quanto alla sua sostanza col metodo delle quantità minori di tutte le assegnabili, poichè in questi

due ultimi metodi si parte dal principio d'una differenza finita esistente da principio tra le grandezze finite, questa differenza a forza di infinite diminuzioni si vorrebbe annientata; e ciò intanto, che è certo, che con niuno dimostrativo ragionamento ci può comprovare che siasi annientata, anzi intanto, che secondo i metodi di Archimede e di altri ripugna che si possa arrivare a questa rigorosa esaustione ovvero annichilamento; e quindi ad una consecutiva perfetta identità delle grandezze, che in origine erano differenti.

Cosa ottiene di fatti, e quale precisa e rigorosa conclusione consegnisce Archimede con le sue siepi di linee inscritte e circonscritte alle curve? Tutto il profitto che ne ricava si è, che dopo indefinite indagini di riduzioni, di impiccolite differenze nei lati de' suoi poligoni e di consecutive approssimazioni, il profitto sta tutto nel permettersi due insigni ipotesi; con una cioè, di ritenere, che il circolo possa essere e sia limite del poligono inscritto e circoscritto, e tutto questo mentre il circolo è una curva di natura diversa della linea retta poligonale, e mentre conosciamo, che solamente per pura libertà di supposizione si può ammettere che la curva possa esser limite della retta; l'altra ipotesi è quella di darsi a credere, che due grandezze l'una il poligono, l'altra la curva, possano a forza di approssimazioni alla fine confondersi o indentificarsi rigorosamente, ciò che è assurdo.

E circa questo equivoco di Archimede e degli altri geometri concernente tal sorta di ricerche si deve ancora notare, che rigorosamente parlando il loro tentativo è al tutto illusorio, perchè tentativo estraneo per sino alla via conducente alla indefinita approssimazione.

464. Oltre la sconvenienza che regna nelle idee esposte nel precedente paragrafo, quando si cerca di ritrovare nelle curve un limite alle linee rette, si vede, che un tal metodo

riesce due volte lontano dal vero, (se così possiamo dire); prima perchè questo metodo è identico, in quanto alle approssimazioni che presenta, a quello di Euclide, del quale abbiam notato la insufficienza; secondamente, perchè è impossibile di aspirare all'identità rigorosa della retta con la curva.

Un'altra prova indiretta ma convincentissima della forza irrefragabile di queste ragioni, la abbiamo nel contegno di Archimede, il quale dopo aver circuito di poligoni le curve che bramava determinare e conoscere, e dopo averne moltiplicati i lati sino alla insigne ipotesi che divenissero infiniti nel loro numero, tuttavia dopo tutto questo, parlando specialmente del circolo, non si è mai permesso altra illazione o conclusione fuori di quella di una indefinita approssimazione.

465. Si è detto, specialmente parlando del circolo, volendo con questa nostra maniera di dire, alludere al misterioso contegno che Archimede ha tenuto, parlando delle altre curve, per le quali, tacendo questa indefinita approssimazione, lascerebbe luogo a credere, che le sue ricerche risguardanti altre curve venissero da lui considerate come rigorose. Ma ognuno sa, che anco i ragionamenti tutti relativi alle altre curve procedono precisamente allo stesso modo, di quelli usati per il circolo; dunque tutti i suoi ragionamenti, tutti diciamo, sono fondati o basati sopra gli stessi identici principii, perciò anco in tutte queste altre sue indagini e speculazioni e geometrici ragionamenti, è impossibile di potervi rinvenire rigorosa certezza; arrogi che soventi volte queste sue ricerche e queste sue dimostrative considerazioni sono viziate del palese equivoco di trasmutare le curve nelle rette, con aperta offesa alla buona filosofia, ovvero con aperto inciampo nell'assurdo.

466. Ecco la filosofia che noi troviamo nei geometri an-

tichi, (già s'intende, che questo nostro dire si riferisce a quella parte della scienza matematica antica la quale ha voluto tentare la rigorosa determinazione delle curve). È questa forse una filosofia di pieno rigore? contiene essa la pienissima evidenza? Per meglio comprendere così fatte cose, ci convien portare la nostra attenzione alle seguenti requisite considerazioni.

1.° I metodi adoperati dai geometri e concernenti le grandezze inassegnabili, i limiti, le evanescenti, le prime ed ultime ragioni, sono metodi evidenti considerati in sè stessi, o nel loro uso?

2.° La dimostrazione dall'assurdo in questi metodi sì spesso adoperata ed invocata per renderli appieno evidenti è essa capace a renderli pienamente evidenti e rigorosi?

467. Circa i metodi qui avanti accennati pare, che se ne sia detto abbastanza, onde crediamo inutile di farne nuova analisi, giacchè si è veduto e replicatamente, che non sono metodi di tutto rigore. Abbiam pure a sufficienza comprovato, che anco l'esistenza dei supremi residui delle grandezze impoverite insino al grado estremo nel loro valore, si sono dovuti supporre; e che anco in quest'ultimo stato mancava sempre la prova che siano zero, e rigorosamente zero.

Per quello poi concerne la indiretta maniera degli antichi, di convalidare e confermare i loro ragionamenti coll'ajuto dell'argomento dall'assurdo, abbiam pure fatto osservare, che con questo argomento (giustissimo in sè stesso, e da essi adoperato con successo felice nelle dimostrazioni risguardanti le rette), questo istesso argomento da essi indebitamente applicato alle ricerche della misura e proprietà delle curve o dello spazio da esse contenuto, è venuto meno ed è riuscito inconcludente, anzi si è risoluto in una pura petizion di principio; e questo come è detto per indebita applicazione di tale principio.

468. Quale è adunque il giudizio filosofico che noi dobbiamo pronunciare intorno alla rigorosa esattezza della geometria superiore antica, che tratta dei circoli e delle curve? Per meglio render preciso questo nostro giudizio, e per render le nostre idee più esatte, diremo, che acciò gli antichi avessero diritto di appellare le loro dimostrazioni rigorose e certissime, avevano bisogno di basi più precise, e più rigorose, e queste dal sin qui detto non le hanno mai avute in loro mano ma le hanno solamente supposte; dunque non hanno mai potuto aspirare al rigore, ma unicamente ad un creduto e solamente supposto rigore.

Fu dunque sempre sentita necessità il supporre, perchè all'uomo mancavano sempre i mezzi di rinvenire queste supreme e soggettive residuali entità delle grandezze. Così han dovuto fare Euclide ed Archimede benchè espressamente non lo dichiarino; così Galilei, Keplero, Wallis, Fermat, Barrow e tutti quelli che adottarono gli antichi metodi noti e già ricordati; così han dovuto fare Newton e Leibnitz l'uno e l'altro dei quali abbracciarono per fondamento delle loro dottrine le grandezze infinitesime supposte e le adottarono ed appropriarono ai calcoli col mezzo del principio detto principio del calcolo differenziale.

469. Vero è che così facendo, abbandonato intieramente il campo del reale e dell'oggettivo si sono trasportati coll'animo nel mondo ideale soggettivo, e così hanno innalzata dichiaratamente la nuova analisi sopra la ipotesi, tuttavia portando attenzione a questa ipotesi dell'infinitesima, come essa si considera, in via ipotetica, quale uno dei generatori della grandezza geometrica, la transizione dall'oggettivo al soggettivo, non allontana di molto l'una dall'altra queste due diverse cose. Questo modo di pensare del nostro spirito cioè di ricorrere all'ipotesi ove non si arriva con la realtà, è sempre riuscito all'animo di una stupenda fecondità di idee e

di elevate dottrine; e considerando la brama innata del sapere nell'uomo ed il limitato suo campo dell'oggettivo, fu sempre una specie di sentito bisogno, quello di ricorrere all'indefinito e vastissimo mondo del soggettivo o ideale; onde meno qualche apparente oggettività che posson contenere alcuni elementi o alcune parti delle matematiche, esse però tutte indistintamente appartengono al mondo ideale, soggettivo ed ipotetico.

470. Qui vuol esser notato a schiarimento dell'oggettivo e del soggettivo, che sebbene quest'ultimo sia tutta opera del nostro spirito cioè tutto prodotto della sua attività pensante, e sebbene il soggettivo si aggiri di regola ordinaria, sopra elementi di pure idee, tuttavia non convien limitare la facoltà che ha il nostro spirito di astrarre e generalizzare, ed in certo modo di rendere ideale una qualsivoglia idea oggettiva; per cui lo spirito può sempre con tal suo metodo di elevare ed estrarre le sue idee considerare ognora che a lui piaccia qualunque reale idea oggettiva sotto aspetto soggettivo quanto più gli aggrada. Questa importante osservazione che si può senza tema d'inganno considerare quale verità di fatto, perchè esprime una reale effettiva e distinta facoltà del nostro animo, voleva qui esser notata per torre di mezzo quelle oscurità e dubitazioni, che nascer potevano dalla diversità, che passa tra l'oggettivo ed il soggettivo, considerati in sè stessi e non con la comunanza che hanno quando il primo viene dall'animo trasmutato nella natura con cui esiste il secondo, cioè considerato soggettivamente.

471. Queste dottrine servono di esplicazione della maniera tenuta dai geometri nel trattare in modo soggettivo qualsivoglia grandezza od oggetto reale concreto. Spiegano perchè l'infinitesimo venga attribuito a tutte le grandezze finite di ogni maniera, quali sono le funzioni o equazioni delle curve,

le formole analitiche o algoritmiche e geometriche di ogni denominazione. Tutte queste grandezze geometriche o considerate a modo di grandezze geometriche, benchè esprimenti qualsivoglia cosa concreta o qualsivoglia oggettiva quantità, per la facoltà e forza pensante dello spirito nostro, queste quantità, elevate che siano allo stato ideale astratto soggettivo, divengon funzioni od oggetti soggettivi, e perciò suscettivi di tutto ciò che appartiene e sembra solamente proprio delle pure soggettive idee.

472. In queste considerazioni si rinviene quel legame prezioso che unisce il soggettivo coll'oggettivo e che fa, che le dottrine astratte e di natura al tutto soggettiva ipotetica, possano darsi la mano con quelle che sono di natura oggettiva e reale concreta, e rendere per così dire suscettive queste ultime di essere compartecipi di tutte le speculazioni elevate delle prime; queste sono le posizioni che ci disvelano la saviezza profonda dei matematcci nell'applicare alle realità le loro dottrine, e che spiegano la verace utilità delle matematiche, utilità comprovata con argomento filosofico. E per comprendere che i geometri non solamente adoprano di questo modo, ma che una specie di necessità li ha sempre condotti a questa maniera di vedere, basta richiamare a memoria, che avendo essi attribuita la proprietà del continuo a tutte le grandezze finite, ed in certo modo anco oggettive, perciò dovettero anco trattarle in maniera all'in tutto soggettiva.

473. Queste dottrine servono a discoprire la fallacia, che esiste nel ragionamento di Wronski, diretto a provare dimostrativamente il principio del calcolo differenziale; perchè dal suo modo di parlare si conosce che attribuisce alla C una soggettività per così dire assoluta o suprema, mentre tratta le A e B onninamente in modo oggettivo; dimenticando egli intieramente la proprietà o la facoltà dell'animo nostro, di considerare a suo beneplacito le A e B in modo soggettivo,

e talmente soggettivo da potere ad esse applicare veracemente la C come parte loro tenuissima o come uno dei loro generatori primitivi.

474. Da queste dottrine si rileva l'insussistenza dell'accusa, che Wronski fa ai geometri, appellandoli grossolani e troppo dominati dalla comune filosofia del sensismo, filosofia che dominava al tempo in cui egli scriveva; imperciocchè sebbene sia difficile il determinare quanto i geometri ne partecipassero, come filosofi, egli è però fuor di dubbio, che parlando e trattando le matematiche con uno stile ed una maniera affatto consimile a quelle degli antichi matematici, che scrissero in tempi di filosofia, forse un poco meno razionale dei nostri, danno però apertamente a divedere, che essi non si abbandonavano ad un sensismo grossolano; imperciochè sino dai primi fondatori delle matematiche le grandezze sono state assunte, considerate e ritenute quali entità soggettive, e questa maniera di pensare non è stata mai immutata dai matematici.

Ora per qual motivo adunque dobbiam credere che quelli del tempo in cui egli scriveva la sua opera, fossero cotanto grossolani nella scienza matematica? Secondo il pensamento di Wronski il più elevato uomo nel soggettivo, pare che sia stato Leibnitz; or bene questo gran geometra sarebbe in onta delle sue dottrine nè più nè meno grossolano di tutti gli altri geometri, che lo precedettero, o che gli furono contemporanei, o che vennero dopo di lui, perchè nè più nè meno applica a tutte le grandezze oggettive e finite la sua differenziale infinitesima, e sottopone al suo calcolo infinitesimale ogni e qualsivoglia grandezza e di ogni escogitabile natura ed espressa con qualunque funzione implicita od esplicita e contenente, tanto cose astratte, che oggettive.

475. Ella è ottima maniera quella, che insegna intendere le opinioni filosofiche degli uomini deducendo la loro impor-

tanza e significazione dalle espressioni da essi loro adoperate ad indicarle, ma è pure ottimissima maniera anco quella, di comprendere appieno il valore delle parole desumendolo dall'uso e dalle applicazioni che essi fanno delle dottrine istesse. Da ciò ne viene, che vedendo noi Leibnitz e tutti gli altri applicare come si è detto la dx o la sua differenziale a tutte le grandezze ed in ogni modo e stato esistenti, vedendo diciamo noi applicarla a tutte le possibili maniere di quantità, ne viene, o che questo gran filosofo si aggirava in altissimo equivoco ed inganno, o che egli sapeva ed intendeva chiaramente quello che faceva. Ora vedendolo noi adunque in unione con tutti gli altri attribuire la variazione differenziale a tutte le grandezze anco oggettive, allora o ci convien crederlo caduto nel più manifesto e grossolano materialismo, o meglio ragionando, ci convien crederlo pienamente persuaso di potere mediante l'opera del nostro spirito, appropriare la dx a tutte le grandezze indistintamente, perchè il nostro spirito può considerarle come risultanti da infiniti indivisibili o infinite differenziali infinitesime. E questa considerazione è quella che scioglie tutto l'enigma che pare siasi ingenerato nella mente di Wronski in causa del soggettivo e dell'oggettivo considerati come sostanzialmente diversi.

476. Più in questo elaborato mentale soggettivo che la nostra mente fa sopra di ogni grandezza, si rinviene anco la verace nozione che noi ci possiamo formare della infinitesima quantità, poichè, per quanto è dato al nostro spirito di conoscere, nell'istessa identica proporzione gli è dato di figurarsi e di idearsi questa stupenda scomposizione mentale infinita di ogni grandezza; ed in sequela di essa, la mente suppone, che per una di queste infinitesime parti, la grandezza provi un mutamento in più o in meno, ossivero, provi una infinitesima variazione o infinitesimo cangiamento; e finalmente quello che qui più importa anco di rimarcare

si è, che sotto questo aspetto considerate queste osservazioni esse contengono ancora quella più verace dimostrazione, che si può avere del calcolo differenziale e specialmente del suo principio; atteso che vediamo per nostra contemplazione da una parte la grandezza composta e risultante da una infinità di infinitesime parti, e dall'altra una sola infinitesima, ovvero alcune sole infinitesime di queste poste in comparazione di valore con la infinità di tutte le altre per cui si appalesa tutta la verità del valor filosofico del ragionamento del gran Galilei, quando poneva in paragone l'infinitesimo o il suo indivisibile, coll'infinite parti infinitesime del finito.

Forse alcuno dirà, che questa dimostrazione, che Galilei ci presenta del calcolo differenziale, non è rigorosamente vera, perchè anco con essa si viene a non curare la parte indivisibile, perchè infinitamente piccola, e quindi la si tratta come fosse zero.

Ma si risponde, che questa non è una difficoltà appropriata al ragionamento di Galilei; perchè questo grande pensatore nel dire, che uno indivisibile o uno infinitesimo non è capace ad alterare in più o in meno la grandezza finita, egli non desume la ragione di questa incapacità dallo stato estremamente piccolo dell'indivisibile, ma la deriva dallo stato dell'infinito, al quale ripugna una aggiunta, o un'aumento, o una diminuzione. Egli in ciò fare non ha alcun riguardo allo stato di tenuità dell'indivisibile, che anzi il suo modo di parlare fa vedere apertamente, che l'indivisibile non lo considera zero; poichè in quest'ultima ipotesi era inutile il dire, che l'indivisibile venisse aggiunto o levato dalla grandezza; imperciocchè lo zero nè si può aggiungere nè si può sottrarre da veruna grandezza. Alla grandezza finita non ripugna ogni aggiunta e non ripugna ogni diminuzione, e nel primo caso la grandezza aumenta, nel secondo impiccolisce. Ma l'infinito non può crescere, perchè se potesse aumentare sarebbe e non sarebbe nel medesimo tempo infinito.

Ora avendo per posizione all'in tutto ideale soggettiva stabilito, che ogni grandezza finita si considera e si ritiene come il risultamento o la somma infinita di altrettanti indivisibili, ne verrebbe, che uno di questi indivisibili aggiunto ad un numero infinito di essi lo accrescerebbe ancora, e quindi che l'infinito sarebbe capace di aumento, il che ripugna.

Venendo ora a concreto esame della suddetta difficoltà si comprende di leggeri, che l'esattezza del principio galileano non è desunta dall'idea della nullità o della suprema piccolezza dell'indivisibile, ma sibbene dal concetto del numero infinito degli indivisibili dal quale risulta ogni finito.

Da tutto questo ragionamento si comprende quanta circospezione ci convenga usare quando pronunciamo: che una infinitesima è come fosse zero in comparazione della grandezza finita; imperciocchè quando l'infinitesima si voglia considerare come uno zero in sè stessa, in allora tutte le nostre geometriche speculazioni si risolverebbero nel più grande assurdo o controsenso possibile, perchè intanto che penseremo o riterremo ogni grandezza come risultante da questi supremi generatori ideali, noi, considerando ognuno di essi come zero, verremo a dire, che tutti siano zeri, e quindi anzi che considerar la quantità scomposta la considereremo pienamente distrutta; il che ripugna alle nostre mentali posizioni: più riesciremo a disdire od a negare ciò, che ci proponemmo di ammettere.

Considerando le dottrine dell' analisi sublime sotto il verace aspetto sotto del quale le propone Galilei, evitiamo tutte quelle sconvenienze di idee che si affacciano a chiunque vede nei calcoli figurare le differenziali e ivi considerate come zeri; imperciocchè qual significato ponno mai avere i zeri e le loro potenze? Qual significato avrebbe il calcolo sommatorio il quale si ridurrebbe a riunire tutti questi infiniti zeri.

477. Applicando all'invece loro questi giusti ragionamenti, si comprende, se siano fondate veramente le difficoltà promosse contro il calcolo differenziale, e si conosce la ragione per la quale tutti i geometri non hanno mai veduto di poterle evitare, ricorrendo a delle distinzioni, ovvero a delle nozioni diverse da quelle che essi avevano esternate e che erano anco nozioni comuni a tutti i geometri. In queste nozioni combinate e comparate alle dottrine del Galilei sta riposta la forza della dimostrazione filosofica, che questo nostro sommo ingegno italiano ha saputo dare del principio del suo indivisibile, divenuto poscia principio del calcolo differenziale senza verun altro cangiamento fuori che quello del mutato nome, dell'indivisibile in differenziale, o in grandezza infinitamente piccola.

A maggior dilucidazione della nozione dell'infinitesimo geometrico osserveremo, esser bensì vero che riesce un ente ideale soggettivo e pienamente soggettivo, ma in pari tempo riesce un'essere o un'entità soggettiva, posta e ricavata della grandezza con una maniera tutta soggettiva di considerarla.

Per lo chè è sempre vero, che in tale ipotesi anco la infinitesima è relativa alla grandezza istessa soggettivamente da noi considerata, e quindi essa è una quantità o entità omogenea consimile, comparabile, come parte della grandezza.

Di qui ne viene, che il pensamento di Wronski, di volere cioè considerare la grandezza in sè stessa, cioè pienamente oggettiva e la di lei variazione pienamente soggettiva, nel concreto ragionamento del principio del calcolo differenziale, è un altro reale equivoco; in quanto che suppone tutto diversamente da quello che è, e che ha sempre ritenuto la universale dei geometri.

Ben volentieri si concede a questo geometra, che passa

differenza sostanziale tra l' oggettivo ed il soggettivo, ma da questo nel presente suo ragionamento non se ne ricava verun profitto, perchè i geometri non compararono mai il soggettivo coll' oggettivo, oggettivamente considerato; ed il calcolo differenziale e molto meno il suo principio non si fonda sopra la comparazione dell' oggettivo semplice col soggettivo puro, ma dell' oggettivo considerato soggettivamente e comparandogli una sua particella soggettivamente presa pur essa.

478. Abbiam voluto esporre e forse con soverchia prolissità, queste nozioni intorno ai pensamenti antichi e moderni risguardanti le parti più elevate delle matematiche, perchè così si comprendano a fondo tutte le ragioni e tutti i motivi dei diversi pareri e delle diverse opinioni. Poi non vogliamo tacere, che questa specie d'insistenza sopra questi metodi geometrici deriva in noi dal pensiero, di voler indurre molti dei geometri a ricredersi delle loro opinioni che nutrono intorno al rigore dei metodi antichi, poichè disvelati essi metodi e posti in piena luce, non è più possibile di rinvenirli fregiati di quel rigore razionale del quale fin ora si sono considerati capaci per pura inavvertenza.

479. Pervenuti a questo punto della filosofia delle matematiche, siamo al caso di meglio apprezzare alcune cose anco dei seguenti pensamenti del sig. Wronski che crediamo bene di qui riportare, perchè ci sembrano atte a dilucidare alcune parti della filosofia del calcolo superiore. Egli adunque scrive nella succitata opera *Philosophie de l' infinit* alla pag. 55: = L'infinito non solamente è uno stromento esatto di ricerche matematiche, ma anzi è l' elemento più importante delle stesse verità matematiche. Noi diremo di più: *non è che per l' infinito che è possibile la scienza delle matematiche.* In fatti, senza l' infinito noi non avressimo in geometria che delle linee rette, ed in algoritmia,

che la semplice somma (addizione e sottrazione); e ben si vede, che con elementi sì grossolani non si avrebbe potuto costruire una scienza. Noi abbiamo già dimostrato che il fondamento della scienza del geometra, considerato persino nella sua possibilità, è la *continuità* della generazione delle quantità, e non occorrono molti sforzi per comprendere che alla sua volta questa continuità della generazione non è possibile, che per l'idea dell'infinito.

Perciò lungi dall' escludere l'idea sublime dell' infinito, tutte le ricerche matematiche tendono direttamente o indirettamente di una maniera esplicita o implicita verso quest'ultimo fine della scienza =.

480. Noi non faremo commenti a questo passo che non riesce ad altro che ad una perifrasi della proprietà del continuo da lui qui appellata *continuità* della generazione delle grandezze.

Unicamente gli domanderemo volentieri, come anzi possa escludere da questa continuità tutte le linee rette, le quali per universale consentimento di tutti i cultori della geometria sono dotate della proprietà del continuo o della *continuità*, e sono perciò sempre state ritenute per infinitamente divisibili?

Proseguendo egli poscia il suo ragionamento circa la nozione dell'infinito tenta sull'appoggio della filosofia di Kant di classificare i metodi matematici nelle pag. 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, e pervenuto al metodo di *approssimazione algoritmica* scrive quanto segue: = Primamente, perciò che concerne la verace natura dell'approssimazione algoritmica, essa apertamente consiste in questo, che gli accrescimenti successivi dei differenti termini delle funzioni che si pongono a calcolo per accostarsi continuamente e indefinitamente alla quantità che si desidera conoscere *non sono legati da alcuna legge.* I geometri hanno sino a questo

tempo disconosciuto questo carattere dell' approssimazione algoritmica, ed anzi essi lo hanno confuso con quello dei procedimenti tecnici, i quali per un'algoritmo indefinito ma contenuto in una sola legge, servono a valutare ed a misurare delle quantità algoritmiche.

In fatti insino a questo tempo tutti i geometri considerarono come una semplice approssimazione l'impiego delle *serie* ed altre *funzioni tecniche* per la misura delle funzioni teoriche date immediatamente o mediatamente per mezzo delle equazioni. Questo è gravissimo abbaglio: le serie e tutte le altre funzioni tecniche, sono funzioni che per la legge unica che esse costituiscono, abbracciano nella loro totalità la generazione completa di una quantità algoritmica; ed in questo esse differiscono essenzialmente dalla semplice approssimazione, la quale non potendo con veruna legge abbracciare gli accrescimenti successivi dei differenti termini, della serie ai quali essa conduce, non saprebbe abbracciare l'insieme della generazione di una quantità algoritmica.

Questo carattere delle funzioni *tecniche* è della più alta importanza per l'algoritmia, e serve a legare le due funzioni algoritmiche primitive ed essenzialmente eterogenee, la somma e la graduazione, dandoci il mezzo rigoroso per la transizione dell'uno all'altro di questi algoritmi, come noi lo abbiamo dimostrato nella filosofia delle matematiche; transizione che è il gran mezzo che noi abbiamo, per trasformare di una maniera rigorosa in funzioni semplici di somma in serie le funzioni complicatissime fondate sopra la graduazione. Già prima di Leibnitz questo vero fondatore delle serie, si aveva riconosciuto non il bel carattere filosofico delle funzioni tecniche, ma almeno il rigore assoluto che si ritrova nella generazione algoritmica, che presentano queste funzioni o esplicitamente le serie. Egli dice espressamente negli Atti

degli eruditi di Lipsia 1682, che sebbene noi non possiamo abbracciare separatamente lo insieme dei termini costituenti una serie, noi abbracciamo necessariamente lo insieme di questi termini col mezzo della legge, la quale li governa tutti; legge che è la vera ed unica significazione della serie. =

481. In questo luogo il nostro geometra dopo aver distinto due maniere di approssimazioni; una quando ci accostiamo alle grandezze che si cercano conoscere o misurare pigliandone parti discontinue successive, ma in modo che queste parti non siano legate e regolate da una legge unica che tutte le renda tra loro in un prescritto rapporto; l'altra in quella nella quale proponendosi il fine della prima, i termini o le parti prese per la misura o per la cognizione della grandezza, sono regolati da una legge unica costante, che fissa la loro ragione o il rapporto dei termini che costituiscono una vera serie di funzioni tutte tra di loro legate e coordinate e da una sola ed unica legge; e coglie da questa distinzione motivo di far rimprovero ai geometri di non aver ben distinto questi due modi di avvicinamento.

Ma veniamo a cosa, che costituisce in matematica una massima, ed una massima d'importanza ed è la seguente, di sapere cioè, se l'equazione che si stabilisce tra una funzione qualunque, ed il di lei sviluppamento in serie, sviluppamento anco regolato da una legge che ne determini e regoli il rapporto o la ragione dei termini tutti, sia questa una equazione rigorosa ed esattamente rigorosa in onta che il procedimento dei termini, ed il loro numero proceda all' infinito? Wronski è persuaso che tal equazione sia rigorosa; così la pensava Newton prima di lui, come lo aveva dichiarato nell'Opuscolo 1.° pag. 24 e 25, da noi citato num. 259; così la pensava Leibnitz (*Atti eruditi di Lipsia* 1682). Così La Fontaine. Nessuno intanto ne dà una convincente ragione, o pure una qualsivoglia dimostrazione.

Ora vediamo se veramente possiamo riconoscere per vera e rigorosamente vera la seguente equazione $F(x+z)^n$

$$= Fx^n + \frac{n}{1} Fx^{n-1} z + \frac{n}{1} , \frac{n-1}{2} Fx^{n-2} z^2 + \frac{n}{1} . \frac{n-1}{2} . \frac{n-3}{3} Fx^{n-3} z^3 + \text{ecc. all'infinito.}$$

Ognuno intende che per esser vera quest'equazione, lo sviluppamento deve presentare tutta la infinità dei termini che compongono la serie. Ma come mai un numero di termini infinito può esistere nel secondo membro, e così esibirci tutto a rigore il valore della funzione $F(x+z)^n$? Questa esistenza dell' infinito numero di termini è essa possibile? Wronski non poteva ignorare, che la effettiva esistenza dell'infinità dei termini era richiesta per render effettivamente rigorosa la equazione, e trovandosi nell'impossibilità di esibirla, egli ha avuto ricorso alla legge che governa la serie procedente all'infinito e dice, che questa legge abbraccia tutta la infinità della congerie dei termini da cui può risultare il secondo membro; così $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ ec. all'infinito è una equazione concreta numerica; ma il secondo membro esprime parti dell' unità rappresentate dai termini, che si accostano sempre (considerandoli riuniti) più e più all'unità. E alcuni supponendo protratti all'infinito i termini, la ritennero capace di esibire l'intiera unità.

Ma questi geometri si ingannano, perchè la legge che governa questa serie non venendo mai meno, appalesa anzi due verità; una che la serie non può finire; l'altra che protratta all'infinito per ipotesi deve rimanere sempre un'ultimo termine infinitesimo, il quale manchi sempre alla serie acciò essa possa esibire il rigoroso valore dell' unità.

Portiamo dunque speciale attenzione a questa legge che governa i termini, e riteniamo che nel di lei precetto li abbracci tutti.

Questa legge, qual'è, nella nostra equazione numerica $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ ec. ec. prescrive, che dalla proposta unità se ne prenda da principio la metà, e del residuo la metà, e così si faccia sempre. Onde tal legge vuole che tutti i termini siano governati da una identica ragione o rapporto geometrico.

Ma tale legge lascia sempre indietro la metà del residuo: dunque questa legge esclude sempre il fine, perchè si rifiuta ad esaurire il finito, e si limita a bipartirlo e così diminuirlo senza fine. Ora sia pur vero, che in quel modo, che serve a determinare i primi termini, così serva a determinare tutti i successivi senza fine, e sia pur vero, che sotto questo riguardo si possan determinare tutti i termini perchè li abbraccia tutti; intanto cosa ne risulta da ciò? A quanto mi pare niuna induzione favorevole alla perfetta eguaglianza dell'equazione.

In fatti l'esattezza sta riposta nella rappresentazione intiera dell'unità, e questa deve essere tutta esibita nel secondo membro; ora questa legge la esibisce ella forse colà all'infinito? In quanto a noi pare che altrettanto, non si faccia nè si possa fare dalla legge di cui si tratta, ma anzi se ne ricavi una induzione opposta, imperciocchè la legge regge i termini, e li regge tutti, perchè la legge li vuole tutti successivamente in eguale ragione tra di loro, ma la legge non si estende al di là di questo virtuale comprendimento. Onde si può anco dire, che la legge della serie $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} +$ ec.

non è nemmen essa che produca i termini, che si accrescono all'infinito, ma essa è tale che volendoli noi accumulare per nostra volontà o per bisogno, la legge prescrive solamente qual valore relativo debbano tra di loro impreteribilmente conservare. Questo esprime tutto il potere che ha questa legge nella serie.

Noi confessiamo che alla nostra imaginativa riesce facil cosa il credere, che tal legge si estenda sino all' infinito, cioè a parlar più sensatamente siamo facili a credere che tal legge si estenda sin dove posson esser presi i termini nella proposta serie; ma questo non significa cosa alcuna riguardo allo scopo di cui parla Wronski, perchè sarebbe di necessità per legittimare la sua posizione, che per tal legge ponesse in essere o si potessero da essa porre in essere tanti termini quanti ce ne vogliono per render rigorosa la equazione. Ora $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} +$ ec. ec. $\ldots\ldots + \frac{n}{\infty}$, non si presenta equazione rigorosa, ma sola indefinitamente prossima, e precisamente poi tale in senso di Leibnitz, il quale considera anco la $\frac{n}{\infty}$ come ancor essa infinitamente divisibile ed infinitamente grande quando sia comparata ad $\frac{n}{\infty^2}$; e quest' ultima infinitamente grande comparata ad $\frac{n}{\infty^3}$; e così segui senza fine.

482. Così la serie 1, 2, 3, 4, 5, 6, ec. all' infinito è

regolata dalla legge aritmetica, la quale prescrive, che i termini cominciando dal primo e andando innanzi contengano un'unità di più, e così sempre. Ora da ciò si ricaverà forse, che si estenda all'infinito e che dia la somma di tutti i termini sino all' infinito? Questo non può esser vero; quindi non si comprende come li abbracci tutti. Può essa in fatti finire e far diventar l'ultimo termine (se questo fosse possibile) eguale all' infinito, mentre questo non contiene che un unità di più del suo antecedente? Eccoci sempre da capo.

Poi chi non sa, che la possibilità istessa di ogni legge tanto aritmetica che geometrica è tutta fondata nella nozione e proprietà del continuo.

Se la funzione F (n) variata in $F(n + dn)^m$ e sviluppata in una serie infinita espressa per $n^m + \frac{m}{1} n^{m-1} dn + \frac{m}{1}, \frac{m-1}{2} n^{m-2} dn^2 +$ ec. perchè presenta uno sviluppamento regolato da una legge geometrica costante, che determina e prescrive la ragione dei termini, sarà forse da considerarsi come se tutti i termini di lei esistessero? Ma chi la pensasse così, come mai potrebbe dire a sè stesso, che un tale suo pensamento sia fondato su la convenienza delle idee, o su la rettitudine logica?

Sembra incredibile come anco nelle matematiche, gli uomini qualche volta si pascano di parole, e senza avvedersene prendano delle opinioni, o meglio delle asserzioni, per delle verità! Queste cose noi qui riportiamo non per contraddire l' opinione di alcuno, ma unicamente per provare che la opinione di quelli che asseriscono, esser rigorosa l'equazione tra una funzione ed il di lei sviluppamento

espresso per serie infinita, è opinione, che manca di ogni dimostrazione o prova, e perciò in matematica non può esser riconosciuta per verace o certa.

La legge unica che governa tutta la serie non produce i termini, nè li rende possibili o reali, ma esige unicamente che abbiano tra di loro un dato costante rapporto.

A tal legge è estranea la protrazione della serie all'infinito, ma tal legge li vuole ed in via possibile ed in via di realtà del sopradetto costante rapporto.

E sotto questo riguardo la legge li abbraccia tutti. Ma però siccome l'esistenza di tutti non deriva dalla legge, così la legge non può avere alcuna influenza sopra la esistenza o possibilità dei termini nelle serie; quindi è inesattezza logica il darsi a credere, che per forza di questa legge esistano, o possono esistere i termini. Ora siccome il rigore dell'equazione dipende e si appoggia all' esistenza dei termini, perciò la legge non può render rigorosa l' equazione espressa per mezzo del suo sviluppamento infinito.

483. Continuando a riferire le opinioni di questo geometra di Polonia; egli classificando tutti i metodi infinitesimali li divide in *metodi diretti* ed in *metodi indiretti*, e venendo a determinarli dice: = I metodi diretti che versano sopra l'impiego puro della ragione nella produzione dell'idea dell'indefinito si suddividono naturalmente in quelli che risalgono agli elementi indefiniti dello spazio e dell' estensione ed in quelli che risalgono agli elementi indefiniti del tempo e dei numeri. Li primi formano il metodo degli *indivisibili* e li secondi costituiscono il calcolo *differenziale*.

484. Ciò che noi abbiamo riconosciuto prima d'ora intorno al carattere dei metodi, che esaminiamo, cioè che essi conducono a dei risultamenti rigorosamente esatti, come lo abbiam dedotto nella prima parte di questa filosofia (429, 430, 434) del calcolo infinitesimale, ci basta completa-

mente per apprezzare la natura dei due metodi infinitesimali, de'quali abbiam fatta menzione, vale a dire, il metodo degli indivisibili, ed il calcolo differenziale. In fatti per questi mezzi non solamente noi sappiamo, che questi metodi sono rigorosi, ma di più noi conosciamo perfino l'artificio intellettuale sublime per mezzo del quale si stabilisce questa singolare esattezza rigorosa, che è il carattere di questi metodi. Noi possiamo dunque dispensarci in questo luogo di entrare di nuovo negli sviluppamenti intorno alla natura di questi due metodi infinitesimali diretti, e ci basterà per ben comprendere questa loro natura di rimettere il lettore ai principii di questa filosofia del calcolo infinitesimale esposti avanti. (Veggansi i numeri citati al paragrafo precedente).

Ma noi dobbiamo dire in questo luogo qualche parola intorno alla differenza essenziale del metodo degli indivisibili, e del metodo del calcolo differenziale: differenza la quale fino a quest'oggi è stata compiutamente ignorata dai geometri, confondendo le applicazioni geometriche del calcolo differenziale colla natura istessa di questo calcolo, il quale è puramente algoritmico; come nell'occasione del metodo di esaustione i geometri han creduto anco su questo punto, che il metodo degli indivisibili ed il calcolo differenziale fossero identici. Non è in fatti, che fondandosi sopra questa pretesa identità che essi si sono immaginati, che la verace scoperta del calcolo differenziale, risalisse alla scoperta dei diversi metodi particolari degli indivisibili. Questo è un errore. Il metodo degli indivisibili ed il calcolo differenziale non hanno di comune che l'idea dell'indefinito, la quale ne è il fondamento: ma questi due metodi differiscono essenzialmente nella loro propria natura.

L'uno porta sull'indefinito dello spazio e dell'estensione, l'altro sopra l'indefinito del tempo e dei numeri; il che certamente è tutt'altra cosa, ed esige dei procedimenti essenzialmente differenti.

Per rendersene convinti basta considerare in astratto, come si deve, da una parte la generazione puramente algoritmica delle funzioni differenziali, e dall'altra la generazione puramente geometrica degli elementi degli indivisibili =.

485. Questa maniera di parlare del Wronski riesce in alcuna parte opposta alle idee ed alle induzioni, che noi abbiamo presentate in varii luoghi di questa filosofia, perciò a nostra giustificazione ed a dilucidazione della verità noi dobbiamo qui prenderla in serio esame. E primamente osserveremo, che da quanto scrive Wronski lascia comprendere espressamente, che egli conosceva il metodo degli indivisibili solamente sotto quell'aspetto sotto del quale presentato lo aveva Cavalieri; di fatti ritenere questo metodo limitato solo allo spazio ed alla estensione, ne riesce una prova convincente.

In fatti se il geometra di Polonia letto avesse il metodo degli indivisibili, quale con assai più di filosofia, fu discoperto ed adoperato da Galilei nelle sue opere meccaniche, certamente che non avrebbe potuto parlare nella maniera che parla; imperciocchè Galilei espressamente lo aveva applicato al tempo, al moto, alle velocità virtuali, e ad ogni escogitabile grandezza; il tempo fu da lui considerato come ingenerato dagli infiniti istanti, il moto dalle infinite velocità virtuali, o dagli infinitesimi momenti di esso moto, ed ogni grandezza per dir breve, come il risultamento di una generazione infinita dai supremi elementi indivisibili, o infinitesime parti nelle quali esso considerava idealmente risolubile ogni grandezza.

La distinzione adunque, che con tanta confidenza pone in campo questo geometra oltramontano non sussiste in faccia al vero, ma cade, come cade ogni equivoco o falso parere, quando è smentito dai fatti parlanti al par di questo.

486. In aggiunta a queste irrefragabili osservazioni notiamo un'altra svista e non lieve di questo filosofo di cui abbiamo qui riportato per esteso il suo parere. La svista consiste in questo, che egli pone una sustanziale distinzione tra la estensiva grandezza e la grandezza algoritmica; mentre questa distinzione non è che illusoria. In vero, sotto qual punto di veduta si considera dagli italiani nel loro metodo degli indivisibili la grandezza estensiva o superficiale? forse sotto quello di semplice spazio? no certamente, perchè dal momento, che ritengono soggettivamente questa grandezza come dotata della proprietà del continuo, ed in conseguenza infinitamente decomponibile, ed indi come risultante da una verace ideale infinità di indivisibili o elementi infinitesimi, in allora hanno resa la estensione al tutto simile ad ogni astratta quantità, e perfettamente simile a qualsivoglia altra grandezza o quantità algoritmica e del tempo. Perchè dunque un metodo che per accidente considera con qualche preferenza l'estensione, anzi che le altre grandezze, si dovrà dir diverso da un medesimo metodo che di preferenza contempla le grandezze algoritmiche, quando nel fondo e nella sua natura è identico, ed identico pienamente. Chi volesse procedere a questa maniera si troverebbe in diritto di distinguere anco il calcolo differenziale dallo stesso calcolo differenziale quando quest'ultimo piglia in considerazione e introduce nei suoi calcoli l'estensione o lo spazio, e distinguerlo da sè stesso quando tratta degli altri algoritmi. Ora ognun vede, che riuscendo quest' ultima, imaginata distinzione senza alcun ragionevole significato o fondamento, perciò ritornando sui nostri passi creder dobbiamo, che abbia da esser ritenuta senza fondamento ragionevole anco la gran distinzione vagheggiata da Wronski. Di fatti egli fu strascinato ad ammetterla sguardando solamente alle applicazioni più presto che alla intrinseca natura

di questi metodi. E in vero, quando Leibnitz rende conto a chi vada debitore del suo calcolo e del suo principio, onora prima di tutti Galilei come quello in cui più che in tutti gli altri aveva rinvenuto le sue nuove dottrine; di fatti in esse trovato aveva il principio dello indivisibile applicato anco al tempo, e con esempii di nuove ed anco compiute integrazioni.

487. Poi non doveva ignorare il nostro filosofo di Polonia, che la superficie e l'estensione, che erano le sole grandezze prese in considerazione anco dal nostro italiano Cavalieri, sendo considerate in astratto, ed in modo all'in tutto soggettivo, e tanto soggettivo da non cederla sotto questo riguardo in verun punto all' idea soggettiva del tempo e del numero, per questo il fondo del metodo di Cavalieri non diveniva per verun conto inferiore al metodo galileano e leibniziano.

488. Proseguendo a riferire le opinioni di questo gran scrittore di matematica, egli alla pag. 55 scrive in questa maniera: = A proposito degli autori dei diversi metodi particolari degli indivisibili alli quali si è voluto far risalire l' origine della scoperta del calcolo differenziale la più singolare di queste pretensioni è quella che asserisce che Fermat sia il verace inventore del calcolo differenziale; proclamazione letta recentemente in un' opera della quale non ce ne ricordiamo il titolo. Non possiam comprendere in fatto di scienza ciò che ha potuto meritare a Fermat questa preferenza sopra tutti gli altri autori dei metodi degli indivisibili da Cavalieri o da Keplero infino a Barrow. Supponiamo però, che sul metodo delle tangenti e dei massimi e dei minimi di Fermat siasi pensato fondarvi sopra questa asserzione, ma quando anco si volesse confondere il calcolo differenziale col metodo degli indivisibili, il quale è precisamente quello di Fermat, nè la anteriorità, nè l' ana-

logia, nè la perfezione di questo metodo, e nè anco l'applicazione all'algoritmia non gli guadagnerebbero una simile preferenza.

In fatti, quanto all'anteriorità, i metodi di Fermat, che non si conobbero prima del 1636 (lettera privata a Roberval dell'agosto di tal anno), non sono evidentemente altro che un uso algoritmico o algebrico del metodo degli indivisibili, il qual metodo era di già diffuso dal 1635 (geometria indivisibilium continuorum Bononiæ, ed anco sino dal 1615 stereometria di Kepler), e realmente come tutti ne convengono la regola dei massimi di Fermat non è che un caso particolare algoritmico del principio di Kepler, cioè, quando una grandezza v. g. o l'ordinata ad una curva è pervenuta al di lei massimo, il suo accrescimento o la sua diminuzione infinitamente vicina a questo stato è nulla. Quanto all'analogia ognuno sa, che è nell'opera di Gregorio di san Vincenzo (quadratura circuli et sectionum coni. Antverpiæ 1647) che si ritrova la prima rassomiglianza rimarcabile col calcolo differenziale; almeno con le sue applicazioni geometriche sopra tutto nell'opera: *Ductus plani in planum*, e nelle inscrizioni e circoscrizioni dei rettangoli. Così lo confessa Leibnitz medesimo (*Acta eruditorum.* Lipsiæ 1691 pag. 438), che deve aver attinto principalmente in quest'opera le prime idee (almeno occasionalmente) della sua scoperta.

Quanto alla perfezione del metodo di Fermat si sa egualmente, che il metodo di Barrow (*Lectiones geometricæ.* Londinii) è superiore a quello di Fermat; e quello che più importa di rimarcare si è, che il triangolo elementare di Barrow è identicamente quello che si prende in considerazione nell'applicazione del calcolo differenziale nella determinazione delle tangenti, come lo confessa e dichiara anco Giacomo Bernoulli negli *Atti degli eruditi* di Lipsia.

Infine quanto all'applicazione all'algoritmia, ci sembra che se sotto questo punto di vista alcuno potesse pretendere all'onore di aver aperto il cammino o la via alla scoperta del calcolo differenziale, questi sarebbe incontestabilmente Wallis nella prima edizione della sua *Aritmetica dell'infinito* 1655, come ognuno sa, che fu principalmente negli scritti di questo gran geometra che Newton ha ritrovato occasione d'inventare le sue idee intorno le flussioni =.

489. Ho voluto riferire questo tratto storico ragionato del geometra polacco non per alcun altro motivo, se non per render palese quanto siamo qui innanzi venuti esponendo intorno alle scoperte di Galilei, e segnatamente intorno al suo metodo degli indivisibili, metodo abbracciato da Cavalieri, ma quasi a sbieco, poi da Fermat ed apertamente da Barrow ed altri, e diciamolo anco francamente, da Wallis medesimo, che nelle sue opere ne dà un sunto filosofico ragionato e che riesce di lode a Galilei. Alcuni di quelli che leggendo i libri sono corrivi nel veder da pertutto lo spirito di nazionalità e di patria, questi facilmente saranno inclinati a credere, che noi possiamo essere sedotti troppo di leggieri nel credere pensiero italiano anco quello che non lo è. Qui adunque Wronski dichiara anch'egli che li metodi dei sullodati autori sono tutti metodi degli indivisibili, quindi tutti italiani di patria.

Anco questo motto storico lo vogliamo diretto a quelli oltramontani i quali soglion tirare un velo sopra l'origine delle cose, e sopra la loro verace provenienza per aver luogo di farsi grandi di trovati; che non si considerano dai loro propri connazionali, che per vil piagio.

490. Nel lungo ragionamento col quale passa in rivista tutti i metodi infinitesimali, trovasi condotto alla classificazione che qui riportiamo, che egli denomina:

TAVOLA FILOSOFICA DEI METODI INFINITESIMALI PRIMITIVI.

(A) Risalire agli elementi indefiniti con la facoltà del giudizio.

Metodi presuntivi.

(a) Per la funzione chiamata induzione.

Metodi induzionali.

(a2) Elevazione agli elementi indefiniti dello spazio e dell'estensione.

Metodo di esaustione.

(b2) Elevazione agli elementi indefiniti del tempo e dei numeri.

Metodo di approssimazione (propriamente detto).

(b) Per la funzione appellata analogia.

Metodi analogici (sono però impossibili).

(B) Elevazione agli elementi indefiniti con la facoltà della ragione.

Metodi determinativi.

(a) Per l'impiego della ragione.

Metodi diretti.

(a2) Elevazione agli elementi indefiniti dello spazio e della estensione.

Metodo degli indivisibili.

(b2) Elevazione agli elementi indefiniti del tempo e dei numeri.

Metodi del calcolo differenziale.

(b) Per l'impiego della ragione unita all'intelligenza.

Metodi indiretti.

(a2) Oggettivamente come fine dell' intendimento per la legge di continuità.

Metodi dei limiti e delle prime ed ultime ragioni.

. (b2) Soggettivamente come mezzo dell'intendimento o intelligenza per la legge di discontinuità indefinita.

Metodi di derivazione.

491. Tali sono dunque, noi lo ripetiamo, li soli metodi infinitesimali primitivi che siano possibili. Tutti gli altri metodi infinitesimali non sono e non possono essere, come lo abbiam già notato, che dei metodi pretesi, e per conseguenza erronei.

492. Nella prima classe dei metodi derivati, si trovano l'applicazione e l'uso dei *coefficienti indeterminati, l'analisi residuale di Lauden* ed anco il *metodo delle flussioni*, sotto la forma prima, sotto della quale Newton l'aveva presentata la prima volta.

La seconda classe, quella dei pretesi metodi infinitesimali presenta due specie, primo dei procedimenti insignificanti per sè stessi, o piuttosto dei veraci *non sensi*, li

quali si servono dei veri metodi infinitesimali svisandoli, cioè togliendo loro il proprio carattere; seguendo delle considerazioni onninamente false.

Nella prima serie si trova il calcolo degli evanescenti, nella seconda specie la teorica delle funzioni analitiche, il sistema delle compensazioni di Carnot, e mille altre considerazioni egualmente erronee, che si sono immaginate, e che si potranno ancora immaginare in seguito, sopra del calcolo differenziale.

493. Ora perciò che concerne in primo luogo la classe dei metodi *derivati*, egli è propriamente chiaro, che il metodo dei coefficienti indeterminati, impiegati per arrivare a quello che si propone il calcolo differenziale, riescono in sostanza alli procedimenti del metodo di derivazione formante l'ultima classe dei metodi infinitesimali primitivi.

In fatti, questi coefficienti del metodo degli indeterminati non sono in questo caso altra cosa che i coefficienti delle serie, sopra dei quali si fonda il metodo di derivazione.

Ma nel metodo dei coefficienti non si giunge ai coefficienti dei quali si tratta che per una condizione puramente negativa, cioè per la condizione di ciò che senza rendere eguale a zero ciascun coefficiente, la serie intiera non saprebbe esser eguale a zero; mentre nel metodo di derivazione si perviene ai coefficienti, dei quali si parla per una condizione positiva, cioè per la determinazione della loro dipendenza reciproca; ed è precisamente questo principio puramente negativo dei coefficienti indeterminati che li rende subordinati al metodo di derivazione.

494. In quanto all'analisi residuale di Lauden ed altri simili procedimenti, sono alla buona, un artificio affatto indiretto fondato evidentemente sopra il penultimo metodo infinitesimale primitivo, cioè dei limiti o delle prime ed ultime ragioni.

Alla fine, quanto al metodo delle *flussioni*, tutto il mondo sa che esso ha per principio la considerazione delle vere differenziali prese in *concreto* nella velocità del moto. Ed è questa considerazione che rende questo metodo subordinato al vero calcolo differenziale, ove le quantità infinitamente piccole sono considerate in *astratto*.

495. Per quanto concerne in secondo luogo la classe dei pretesi metodi infinitesimali, la prima specie di questi metodi, cioè il calcolo degli evanescenti è un miscuglio mostruoso del calcolo differenziale col metodo dei limiti o delle prime ed ultime ragioni. In fatti gli evanescenti considerati per una parte, quale è evidentemente il punto di vista del metodo dei limiti, non sono delle vere quantità, e considerate per un' altra parte la quale è evidentemente il punto di vista del calcolo differenziale puro, esse non sono più dei veri zeri. Miscuglio bizzarro, verace *non senso*, ed anco contraddizione, la quale il calcolo degli evanescenti non evita se non perchè malgrado lui stesso, egli procede appoggiato sopra il metodo dei limiti, e sopra il calcolo differenziale puro.

496. Quanto alla seconda specie dei pretesi metodi infinitesimali, e nominatamente quanto alla teorica delle funzioni analitiche di Lagrange, ed al sistema di compensazione di Carnot, noi ne abbiamo già abbastanza parlato per istabilire: primo, che la sedicente teorica di Lagrange implica l'assurdità, in quanto pretende spiegare i principii del calcolo differenziale, poichè, come abbiam dimostrato, essa non sussiste se non per li principii di questo calcolo; secondo, che il sistema delle compensazioni di Carnot è tutt' affatto falso, perchè come lo abbiamo provato questa compensazione di errori non ha luogo =.

497. Non faremo rilevanti commenti sopra la classificazione filosofica dei metodi infinitesimali, e questo nostro

silenzio è necessario per non ripetere quello che abbiam detto dei singoli metodi in questa tavola accennata. Un' altra cagione ancora ci intrattiene, ed è quella di evitare di richiamare in esame una quantità di inutili e soventi volte anco dannose distinzioni della filosofia alemanna, della quale il nostro gran matematico si è servito quasi sempre nell'esporre i suoi pensamenti geometrici.

498. Noi abbiamo già annunciato al num. 480 un'oggetto risguardante le serie, consistenti nel pensamento, che la legge, che governa ognuna delle serie abbracci il numero infinito dei termini di cui questa si compone, ed in tale occasione abbiam anco fatto vedere, come questa maniera della legge con la quale abbraccia tutti i termini che governa, nulla significhi in punto a rendere giusta l'equazione stabilita tra la funzione ed il di lei sviluppamento infinito.

Ora soggiungeremo qualche cosa intorno alla natura delle serie a fine di vie maggiormente confermare il precedente nostro ragionamento, e per vie meglio informarci di ciò che significa un procedimento di serie all'infinito.

499. Quando si espone o si rappresenta una funzione o una grandezza qualunque per mezzo delle sue parti, e queste disposte secondo una legge, queste formano una *serie,* cioè un seguito di espressioni per parti appellate anco termini della serie. Ben inteso che queste parti della funzione considerate nella loro unione siano capaci di riprodurre tutta intiera la funzione della quale esse ne sono le membra.

Le grandezze o le loro funzioni che si vogliono esprimere per mezzo di serie (appoggiando queste ultime alla natura del continuo) può farsi in diverse maniere di scompartimento, onde si comprende, che le serie posson essere di diverso andamento nei valori dei loro termini.

500. La natura, il valore, la forma e lo stato dei termini costituenti queste parti della grandezza o funzione dipen-

dono necessariamente dalla legge nostra intellettiva che volontariamente da noi si ammette e si abbraccia per servire di principio e di regola dell'andamento della serie, e questa nostra volontaria forma di scompartimento diviene la forma della serie. Questa forma viene poi modificata, o meglio conformata alla natura delle operazioni impiegate da noi per ottenere od effettuare questo scompartimento per parti o per serie. Imperciocchè tutti i mezzi che sono in nostra mano per tali operazioni si riducono ad una, all'altra o all'altra delle note operazioni fondamentali aritmetiche o algebriche che conosciamo.

501. Quali che siano per altro le mentali nostre posizioni sopra delle quali noi fondiamo l'origine e l'andamento dei termini della serie egli è evidente, che tali nostre operazioni mentali non possono nemmeno in via di possibilità esser applicate alle grandezze da esprimersi per parti, se non si appoggiano ad altrettante nostre posizioni soggettive e presupposte nella grandezza o nella di lei funzione; perchè altrimenti progettata da noi una qualsivoglia ideale forma di scompartimento, se a questa forma la grandezza geometrica non si prestasse intieramente; ovvero non si supponesse in via almeno ipotetica che si prestasse, noi avremmo ideato un progetto ineseguibile ed inapplicabile alla funzione pel suo svolgimento in serie.

502. Una serie adunque non consiste in altro fuorchè in una rappresentazione per parti di una data grandezza geometrica di qualsivoglia natura. Queste parti sono regolate tra di loro secondo una data e fissa legge ideale, arbitraria bensì ma da noi abbracciata ed appropriata allo stato ed alla natura particolare della grandezza o della funzione di essa. Queste parti in tutte le serie procedenti all'infinito sono disuguali nel valore tra di loro ed hanno quasi tutte una ragione geometrica costante che ne regola l'andamento; poi-

chè in caso che i termini non procedano con ragione geometrica la serie non può in faccia a noi assumere il carattere di protrazione all'infinito o di procedimento senza fine.

Ora se di una data grandezza se ne possono prendere a nostro beneplacito le di lei parti risultanti dai gruppi de' suoi elementi disuguali nel valore tra di loro ed aventi una determinata ragione o rapporto che ne regoli questi gruppi crescenti o decrescenti, ognuno vede, che questo indefinito o infinito ideale spartimento della grandezza è sempre quale lo propone la nostra volontà, e quale può convenire alle operazioni ed ai mezzi di sviluppamento che essa conosce.

503. Si è detto qui sopra che una serie non si presenta di sua natura procedente all'infinito, quando non sia regolata da legge geometrica; ora con questo si è voluto toccare ad un punto assai importante delle serie, e che qui merita di essere deciferato. Ogni grandezza o funzione si suppone divisibile in infinito, perchè dotata della proprietà del continuo; quindi si ritiene come infinitamente composta e risolubile in qualsivoglia gruppo di elementi, e ciò insino agli ultimi elementi medesimi; se pure questi sono possibili nella natura del continuo, perchè anco i supremi elementi non avendo perduto mai la proprietà del continuo, come qualità essenziale contenuta nella funzione, quanto nelle sue singole parti non escludono mai la indefinita o infinita loro divisibilità. Richiamati a memoria questi, già altre volte dichiarati ed ammessi principii, osserviamo che la serie con termini v. g. decrescenti e secondo legge geometrica essendo quella nella quale si pigliano parti proporzionali della grandezza in modo che sempre e poi sempre rimanga parte finita su cui esercire la diminuzione e di nuovo prenderne di queste parti proporzionali, questa serie ci presenta un fondo inesauribile.

Ora con questo procedimento è cosa facile a conoscere,

che tali serie regolate da legge geometrica sono veramente interminabili, e in modo che sempre ne ripugna il loro finimento; onde per sì fatta ragione, si suol dire che queste sono serie procedenti, e rigorosamente procedenti all'infinito.

504. Le prime traccie delle serie geometriche le abbiamo dagli antichi geometri, i quali volendo esprimere l'andamento delle diminuzioni che si facevano a praticare sopra una data grandezza per ridurla a quel grado di piccolezza che loro piaceva, per questo idearono queste diminuzioni che erano procedenti all'infinito o senza fine. Essi così fecero per allontanare ogni timore, che la diminuzione non arrivasse fino a quell'estremo di piccolezza che piaceva loro di considerare. Così fece Euclide quando stabiliva la seguente norma di diminuzione, la quale appunto era legge di serie geometrica decrescente: = Se di una data grandezza si piglia la metà e qualche cosa di più, e del residuo la metà e qualche cosa di più, e così si faccia sempre, alla fine si giungerà ad una piccolezza della grandezza proposta, la quale sarà minore di ogni data =.

505. Ommettendo qui di ripetere le osservazioni già fatte innanzi, ci limiteremo a dire, che questo gran geometra ammetteva adunque, e per verace necessità, la preesistenza delle parti infinite e disuguali nella grandezza che sottoponeva a diminuzione, e ciò razionalmente o idealmente, onde fosse possibile la sua ricerca ed il suo fine che si proponeva. Imperciocchè qualsivoglia spartimento appropriato ad una grandezza, questo non può che separare e staccare ad una ad una o per gruppi le parti che essa contiene, o che si suppone contenere.

506. Qualunque volta adunque si considera una serie, qual che ne possa essere il valor relativo de'suoi termini che la compongono, sarà sempre vero che la grandezza espressa in serie e da essa misurata, sarà sempre vero, diciamo, che questa grandezza

per nostro modo di percepire e d'intendere conterrà ipoteticamente e razionalmente tutte le parti formanti i termini della serie; giacchè la separazione presuppone e non crea le parti. Onde noi nel proporci una grandezza da impiccolire secondo la legge antica abbiamo d'avanti tanti gruppi di una quantità (considerata come una cosa tutt'una in generale) quanti ne immaginiamo in essa possibili, e non è la divisione effettiva che conduca alla fin fine alla inassegnabile, ma siamo noi che la supponiamo esistere e che supponiamo che si possa rinvenire.

Chiarita questa fondamentale verità, ne viene per legittima induzione che il concetto della generazione, e della consecutiva decomposizione della grandezza precede l'esistenza ed ogni legge della serie, ed in modo che la stessa possibilità della serie si fonda e intieramente si appoggia a questo precedente concetto o presupposizione. Quindi anco nella serie immaginata da Euclide, la inassegnabile vi è presupposta, e presupposta vi è pure la nozione dell'infinito, perchè la serie possa incamminarsi sopra processso interminabile all'infinito.

507. Ora noi domandiamo, se la minor di ogni data si volesse considerare ed avere per zero, come mai parlando filosoficamente si potrebbe considerare come parte formante la grandezza data. Egli è chiara cosa, che in ogni grandezza geometrica la inassegnabile non può essere se non un ultimo tenuissimo costitutivo della grandezza; ora in caso che questo disavvedutamente si volesse supporre ed aver per zero, come si potrà intenderne la ricomposizione o la generazione della grandezza geometrica? si ha da crederla forse un cumulo di zeri? ed un cumulo di zeri, può esso equivalere ad un quanto finito?

508. Queste dimande accennano a delle difficoltà cui non appare via di dissipare e di risolvere, a meno che non si

abbandoni il concetto che la inassegnabile sia zero. Abbandonato questo concetto tutto il metodo delle minori di tutte le date evita di abbattersi in idee assurde, ma però esso è sempre puro metodo di approssimazione ed esclude persino l'ombra di ogni rigore. Ritenuta che sia la minore d'ogni data eguale a zero tutto è oscurità ed incertezza. A queste considerazioni dovrebbero por mente quelli che vagheggiano queste idee anco al giorno d'oggi, e che non hanno veruna difficoltà ricorrere a questo metodo, quasi fosse appoggiato a rigorosa dottrina.

509. Ritornando alla considerazione delle serie, è dunque certo che i termini sono distinti e diversi membri della grandezza o della funzione, essi sempre rispondono alla volontaria nostra maniera di iniziarli e proseguirli. In questa latitudine di valori che può abbracciare il nostro volontario modo di iniziare e di proseguire le serie, si conosce che niuna maniera di serie può essere esclusa. Tuttavia le serie si riducono ordinariamente alle serie aritmetiche o geometriche.

510. Le serie aritmetiche considerate nella loro estensione posson essere composte di termini o eguali tutti tra loro, o disuguali crescenti, o disuguali decrescenti per costante differenza.

Se nel crescere o decrescere del valore dei termini non esiste una regola di differenza fissa, questi termini non costituiscono una serie ma sono ammassi parziali e capricciosi di quantità che non meritano la denominazione di serie.

Le serie aritmetiche tendono generalmente a dare la misura esatta delle grandezze, perchè mirano a prendere tutte le parti aliquote delle medesime, quando intendiamo esprimerle per parti con questo genere di serie.

Già s'intende, anco in questo luogo, che queste serie debbono conformarsi all'idea che noi ci formiamo della grandezza matematica, e quale può risultare dalle due operazioni fondamentali, somma e sottrazione.

Se gli elementi de'quali si considera costituita una grandezza sono finiti, il numero dei termini della serie sarà finito, se il numero degli elementi si suppone infinito, anco i termini della serie accenneranno ad una infinità.

511. Il carattere di queste serie (che abusivamente si chiamano serie) merita una particolare attenzione, perchè i geometri pensano poter spingersi col loro mezzo direttamente verso lo infinito, ma pare chiara cosa che circa questo tentativo vadano illusi. Imperciocchè essi pensano che 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + ec. all'infinito, sia una serie che possa presentare una somma infinita; il che crediamo, che per verun conto non sia vero; e per convincersene in modo indiretto bensì, ma concludentissimo quanto si può desiderare che questa somma non è infinita, si rifletta, che se loro si dimanda ove vada a terminare la serie 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + ec. all' infinito, ci rispondono che presenta una somma numerica infinita. Lo stesso dicono, se lor dimandiamo, cosa valga la somma o la serie 3 + 3 + 3 + 3 + ec. all'infinito; così di ogni altra n + n + n + n + ec. all'infinito.

Ora ognuno intende che queste loro risposte sono assolutamente fondate sul falso, perchè ritengono identico il risultamento finale di tutte queste serie, e ciò intanto che una può esser milioni e milioni di volte maggiore dell'altra, e intanto che tutte hanno comune nè più nè meno il loro procedimento od il loro avanzamento all'infinito. Ora questa loro maniera di rispondere, è la stessa cosa che dirci, che il poco vale quanto il molto, ed il moltissimo quanto il pochissimo!

512. Tutte queste serie, e l'indefinito numero delle altre che crescono per dati e convenuti aumenti, come è v. g. quello dei numeri naturali 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ec. all'infinito, come pure questa 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ec.

all'infinito, presentano tutte, continuate sino ad una qualsivoglia comune protrazione dei valori indefinitamente diversi e sempre crescenti e maggiori, e maggiori gli uni degli altri; pure stando alla maniera comune e generale di esprimersi dei geometri apparirebbe, che tutte queste serie, tutte nè più nè meno, presentino nella loro somma una grandezza infinita.

513. Per mettersi sott' occhio in modo sensibile questa maniera di pensare di molti geometri, si osservi, che l'universale dottrina ammette quanto segue:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ ec. . all' infinito $= \infty$
$2 + 2 + 2 + 2 + 2 +$ ec. . . . . . $= \infty$
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 +$ ec. . . . . . $= \infty$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ ec. . . . . . $= \infty$
$m + m + m + m + m +$ ec.; dunque . . $= \infty$
$1 \cdot n + 1 \cdot n + 1 \cdot n + 1 \cdot n + 1 \cdot n +$ ec. ec. . $= \infty . \infty$!

Ora dopo questo ridicolo finale risultamento delle serie composte di egual numero di termini e di indefinito diverso valore, chi può aver coraggio di permettersi di credere, che i geometri ci presentino una verace nozione dell'infinito con queste loro larghe posizioni? Cosa può mai essere un' infinito che si ottiene con sì diverse grandezze, e con sì diversi metodi di aumenti? Cosa può significare un'infinito infinitamente infinito? Eccoci adunque sempre collocati innanzi ad una nozione dell'infinito, che nel concreto caso presenta due aspetti inconcepibili; uno è quello sempre dominante e proprio di questa superiore trascendente nozione; di riescirci cioè poco comprensibile; l'altro è quello di presentarsi come un Proteo sotto tante diversi aspetti di sua entità!

514. Bisogna dunque conchiudere, che lo ingrandire o aumentare dei numeri e delle unità, o più generalmente, che l' aumento del finito, qualunque protraimento esso poi abbia, non può pervenire ad uno stato infinito di grandezza,

e che la equazione della quantità finita, eguale a serie infinita ricordate poco fa, è una verace assurdità.

E questa manifesta assurdità disvela una rilevantissima verità, quella cioè, che per via di cumuli e di somme di grandezze finite riesce veramente impossibile, non solo di attingere l'infinito, ma nè anco di approssimarsi allo stesso; di fatti se la somma v. g. di tre unità fosse più prossima all'infinito di quella dell' unità sola, allora la somma di trenta unità, sarebbe più vicina all' infinito, e la somma dei numeri naturali, come la somma di altra serie consimile si accosterebbe all'infinito più di molt'altre. Ma abbiam di già fatto osservare al num. 35 che qualsivoglia termine di una serie per quanto si consideri lontano dalla sua origine o dal principio di essa serie è sempre decomponibile in un'altra serie anch'essa procedente all' infinito; dunque ne viene che in ogni luogo della serie ci troviamo sempre infinitamente lontani dal suo fine, e quindi dall'infinito, che si considera come riposto alla fine della serie.

515. Da queste nozioni si comprende che l' infinito deve essere di un'ordine diverso dal finito, che ad esso non compete veruna idea del più e del meno. Da ciò parimenti si comprende la piena incongruenza delle idee, la quale regna nel modo di esprimersi di alcuni geometri i quali difiniscono l'infinito per una grandezza maggiore di ogni data grandezza. Tra questi si trova anco il bravo geometra Lacroix che così la pensa nel suo *Trattato del calcolo differenziale*; imperciocchè o questa maggior di ogni data si ha come una sterminata grandezza finita, e di questa mai non ripugna un nuovo aumento, o la si ha per una grandezza veramente infinita, ed in allora le osservazioni sin ora ricordate la pongono fuori della possibilità della generazione che posson dare le serie le quali non valgono a risospingere la grandezza fuori del dominio della nostra ragione, nè fuori del-

l'ordine finito. Poi richiamando il pensiero sopra questa grandezza maggior di ogni data qual'è il significato che di essa si può aver sott'occhio? quello di grandezza maggior di grandezza, il che è una ripugnante proposizione; dunque da qualsivoglia parte ci rivolgiamo, appare chiara cosa che non si può avere nessuna idea precisa della grandezza maggiore di ogni data.

516. Quando vogliamo dimandare a noi medesimi d'onde derivi questo modo di vedere di alcuni geometri, noi crediamo si possa rispondere, che altrettanto proviene dall'inadequata nozione che essi si procacciano dell'infinito. E per inadequata nozione intendiamo indicare quella maniera desunta delle quantità finite, e che sa troppo del finito; maniera atta ad offuscare anco quel poco che possiamo comprendere del verace infinito geometrico.

517. Ma ritorniamo alle serie. Quelle che procedono veramente all'infinito sono le serie regolate da legge geometrica nei loro termini. In queste serie i termini sono necessariamente sempre di diverso valore tra loro, e crescono o decrescono secondo un dato rapporto o una data ragione geometrica costante.

Queste serie, che si adoprano saggiamente ad esprimere qualsivoglia grandezza per parti disuguali o discontinue lasciano sempre ad ogni loro passo di procedimento qualche parte finita della quale sempre se ne posson prender ancora parti proporzionali a quelle avanti prese; donde si vede la manifesta cagione, perchè siano interminabili ed insieme non possano arrivare all' infinito. Ma questo ancora non basta per avere di queste serie un'adequata nozione, bisogna ancora considerare, che una serie geometrica protratta che sia, anco per pura ipotesi all'infinito, questa in forza della legge geometrica che la governa, conserva in questo stato medesimo un residuo da cui poterne prendere perpetuamente parti proporzionali alle già prese.

518. Da ciò ne viene, che la nostra intelligente attività è costretta in oggetto di serie di attenersi a due impreteribili condizioni; una consiste nella forma interna del nostro animo, forma o modo nostro di percepire o di idearsi le grandezze che riguardano la composizione ideale; l'altra consiste nella natura e nel potere dei mezzi che sono in nostra mano per esprimere queste nostre interne mentali funzioni o concetti vestiti di espressioni analitiche o di calcoli, li quali mezzi si riducono a quelli generalmente noti e conosciuti, vogliam dire alla somma, alla sottrazione, alla moltiplica, alla divisione, alla elevazione a potenza, ed alla estrazione delle radici.

519. Dopo tutto questo è cosa facile a comprendere, che se in queste interne mentali posizioni stanno riposte le principali e fondamentali nozioni e proprietà delle grandezze, e se queste non possono da noi prodursi al di fuori se non per mezzo di alcuna delle accennate operazioni, è cosa facile, diciamo, a comprendere che tutto è presupposto nel nostro animo, e tutto non può esser esternato che sotto certe norme rispondenti alla natura delle operazioni adoperate.

520. Si deve però rimarcare, che trattandosi di esprimere per serie o per parti le grandezze, rimane libero il campo alla nostra mente di spartirle in quel numero di parti che meglio ad essa aggrada; siano poi tali parti eguali o disuguali, in progressione aritmetica o geometrica, siano poi sotto forma intiera o frazionaria, potenziale o radicale.

Se l'animo si occupa di grandezze ideali, saranno ideali anco le parti; se di grandezze concrete o non astratte queste saranno concrete ed espresse come l'altre grandezze reali o ideali.

521. I geometri si occupano specialmente di quelle funzioni delle quali lo sviluppamento si presenta in serie indefinita per somma e per potenze; serie che derivano dalle funzioni che specialmente sono espresse sotto forma binomia

elevate a potenza e nella quale l'operazione indicata ed adoperata a procacciarsela è la moltiplica, o la sua inversa, la divisione. Lo sviluppamento del binomio in serie è come il più facile e più usato. Le funzioni di forma trinomia o quadrinomia sono sempre riducibili per mezzo di sostituzioni, a forma binomia.

Queste sorta di serie rispondenti allo sviluppamento del binomio conosciuto sotto il nome di Newton, esprimono la misura delle funzioni per parti, e contengono anco il legame che unisce tutti i loro termini, o tutte queste parti del binomio tra di loro.

522. La formola analitica algebrica dello sviluppamento del binomio è la seguente: Sia F. $(x)^n$; questa variando per una quantità denominata in astratto per w, si cangia in F. $(x + w)^n$ e questa risponde precisamente allo sviluppamento per parti, espresso come segue: F. $(x + w)^n = x^n + \frac{n}{1}$ $x^{n-2} w + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}$ $x^{n-2} w^2 + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}$ $x^{n-3} w^3 +$ ec. ec. nel quale sviluppamento si vede qual sia il legame, la dipendenza, la filiazione dei termini, e quale l'ordine, che conservano le potenze dei due monomii costituenti il binomio.

Tutti i trattati d'algebra, e quelli che contengono lezioni analitiche servienti di introduzione al calcolo sublime, parlano e trattano diffusamente di queste derivazioni, dell'ordine dei termini o delle potenze dei due monomii tra loro moltiplicati in tutti i termini meno il primo e l'ultimo, ove non si trova che un solo dei monomii.

523. Noi conosciamo quanti accidenti diversi presenti uno sviluppamento secondo che la funzione F $(x)^n$ è analitica

ovvero circolare, o pure logaritmica; chi bramasse avere sott'occhio queste particolarità, può leggere la *Introduzione al calcolo differenziale* di Leonardo Eulero, o quella di Lacroix e d'altri, e la *Teorica delle funzioni analitiche*, e le relative lezioni di Lagrange stampate nel fascicolo num. 12 tom. 5.° della Scuola politecnica di Francia.

Da esse conoscerà, quante diverse particolarità si avverino secondo che l'esponente è intiero o frazionario o radicale; quante, secondo che la variazione w è finita, infinita o infinitesima. E tutti questi casi sono come altrettanti dati o come altrettanti elementi che modificano assai lo sviluppamento generale indeterminato qui sopra esposto.

524. I matematici intanto ammettono ed approvano come ragionevole queste sostituzioni di valori, tanto per la variazione, che per l'esponente. Ma può forse l'uomo sostituire nelle formole proprie di funzioni finite, valori infiniti o infinitesimi? Noi lasciamo a tutti il pensare quello che meglio credono sopra questo rilevante punto della filosofia matematica. I geometri ammettono queste supposizioni, o queste sostituzioni con tutte le nozioni ed i valori che da esse ne dipendono, e tutte queste cose le ritengono e le considerano come oggetti trattabili quasi fossero grandezze finite; dunque senza occuparci nel ricercare se ragionevolmente si possa procedere a queste sostituzioni, che sono in fatto ammesse, studiamoci alla meglio di conoscerne la filosofia che ci è dato ravvisare per entro a queste ipotetiche ed ardite posizioni.

525. Se ci domandiamo quanto sia grande la distanza che passa tra la finita quantità e la infinitesima, non possiamo altro rispondere se non che è indefinita o infinitamente grande: se cerchiamo a noi medesimi quanta sia la distanza che passa tra la finita e l'infinita quantità, non possiamo che averla per indefinitamente grande o per infinita. Più se ci

fermiamo a considerare quale sia la differenza che passa tra grandezza finita e una grandezza finita minore o maggiore, facilmente si vede che questa è misurata dalla differenza di maggiorità o minorità; ma quando si voglia considerar questa differenza dotata della proprietà del continuo, e quindi come risolubile in infinite parti minori, in allora appare che anco questa differenza di maggiorità o di minorità acquisti una certa apparenza di grandezza infinita.

526. Ritornando allo sviluppamento del binomio, e ponendo in esso in luogo della x, della w, e dell' esponente n, li seguenti valori, cioè facendo prima $x = \frac{1}{\infty}$, poi $x = \infty$, poi $w = \frac{1}{\infty}$, poi $w = \infty$, poi $n = \frac{1}{\infty}$, $n = \infty$ avremo per tutte queste supposizioni le seguenti formole dello sviluppamento del binomio dato innanzi (522).

$$F. \left(\tfrac{1}{\infty} + w\right)^n = F\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^n + \frac{n}{1} F\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^{n-1} w + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2} F\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^{n-2} w^2 + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3} F\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^{n-3}$$

w^3 + ec. ec. Poi $F(\infty + w)^n = F\,\infty^n + \frac{n}{1} F\,\infty^{n-1}$ $w + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2} F\,w^{n-2}\,w^2 + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}$ $F\,\infty^{n-3}\,w^4$ + ec. ec. Poi $F\left(x + \tfrac{1}{\infty}\right)^n = F\,x^n + \frac{n}{1}$

$$F\ x^{n-1}\left(\tfrac{1}{\infty}\right) + \frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2}\ F\ x^{n-2}\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^2 + \frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3}\ F\ x^{n-3}\left(\tfrac{1}{\infty}\right)^3 + \text{ec. ec. ec. } F.\ (x + \infty)^n = F\ x^n + \frac{n}{1},\ F x^{n-1}\infty + \frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2}\ F\ x^{n-2}\ \infty^2 + \frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3}\ F\ x^{n-3}\ \infty^3 + \text{ec.}$$

$$F\ (x + w)^{\frac{1}{\infty}} = F\ x^{\frac{1}{\infty}} + \frac{\left(\frac{1}{\infty}\right)}{1}\ F\ x^{\frac{1}{\infty}-1}\, w + \frac{\left(\frac{1}{\infty}\right)\left(\frac{1}{\infty}\right)^{-1}}{1\qquad 2}\ F\ x^{\frac{1}{\infty}-2}\ w^2 + \frac{\left(\frac{1}{\infty}\right).}{1}\ \frac{\left(\frac{1}{\infty}\right)^{-1}.}{2}\ \frac{\left(\frac{1}{\infty}\right)^{-2}}{3}\ F\ x^{\frac{1}{\infty}-3}\ w^3 + \text{ec.}$$

$$F\ (x + w)^{\infty} = F\ x^{\infty} + \frac{\infty}{1}\ F\ x^{\infty-1}\ w + \frac{\infty}{1},\ \frac{\infty-1}{2}\ F\ x^{\infty-2}\ w^2 + \frac{\infty}{1},\ \frac{\infty-1}{2},\ \frac{\infty-2}{3}\ F\ x^{\infty-3}\ w^3 + \text{ec.}$$

in tutte queste ideali espressioni analitiche, ognuno può comprendere appieno la natura e l'andamento delle funzioni, la ragione consecutiva dei termini e delle loro relative forme, quando ritenga esser $\frac{1}{\infty}$ eguale all'infinitesimo ; ed ∞ eguale all'infinito.

Ommettiamo qui di presentare le formule, che si ottengono quando le supposizioni qui sopra ammesse concorressero simultaneamente ad associarsi a due a due e a tre nel presentare delle formule ancor più complicate, perchè sono facili, e di lor natura all'in tutto spontanee.

527. Dall'ispezione attenta di queste serie si comprende con facilità, che tutti i concetti e tutti i valori posti successivamente in luogo della variabile x, poi della variazione w, poi dell'esponente n non sono altro che la materiale sensibile espressione della nostra ipotetica maniera di vedere rappresentata sensibilmente dal calcolo.

Onde ogni filosofia che può rinvenirsi in queste formole, è quella stessa che risiede nei concetti mentali medesimi e da questi calcoli rappresentati, perciò i calcoli non servono, che a rappresentare sensibilmente ed a spingere innanzi la significazione dei concetti in essi contenuti ed a manifestare con tutta la più grande estensione possibile le induzioni che dalle nostre supposizioni derivano.

528. Nè dobbiamo indurci a credere che il nostro dire si ristringa alla formola del binomio newtoniano: poichè ognuno che per poco sia versato nel calcolo, comprenderà senza veruna esitanza che si applica nè più nè meno, salvo i debiti riguardi, a tutte le altre maniere di funzioni e consecutive loro serie; serie che pure ci sono note, e che abbiamo esaminate e studiate in tutti i geometri che hanno scritto di queste materie, e soventi volte ne hanno scritto con una profusione di formole analitiche che meglio si prestano più ad una specie di lusso che ad un bisogno verace della matematica.

529. Ma basti il notare, che queste serie tanto nella loro origine, quanto nel loro svariato e diversissimo andamento si conformano alle dottrine che ricordiamo in questo luogo; le quali qui da noi sono state applicate o meglio indossate

alla formola newtoniana. L'aver dunque noi ommessa la numerosissima famiglia delle diverse serie, ed il macchinoso corredo dei loro termini è stato per puro amor di brevità. Come per la stessa cagione si sono intralasciate le serie delle funzioni circolari, logaritmiche ec. sebbene presentino delle rimarchevoli singolarità, come ogni geometra appieno conosce, le quali sono esposte in tutte le opere analitiche.

530. Nel presentare, per mezzo di serie, le parti discontinue di qualsivoglia grandezza, quali che ne siano poi i mezzi impiegati ad ottenere queste parti discontinue, conviene portare l'attenzione ad una distinzione sin' ora poco rimarcata, quale è quella di non confondere il formato di una espressione analitica, ovvero la fisionomia di un qualunque termine della serie con lo stato pienamente indeterminato del significato di questa analitica espressione. Poichè il formato, o la forma di ogni termine, è sempre quale lo vuole la operazione adoperata a svolgere le funzioni in serie, ed il significato o il valore di questa forma dipende da due cose, cioè, dal valore attribuito agli elementi che costituiscono il termine e dal nostro atto volontario di ritenere più o meno indeterminato nel loro significato questi elementi costituenti i termini della serie.

531. In ogni termine dello sviluppamento dobbiam dunque distinguere tre cose ben diverse, la forma, il valore e lo stato più o meno determinato.

La prima qualità dipende dall'operazione adoperata nel produrre lo sviluppamento; il valore dipende dal nostro arbitrio, ma ogni valor concreto esclude lo stato indeterminato. Lo stato più o meno indeterminato dei termini è parimenti in nostro arbitrio, ma introdotto ch'esso sia negli elementi dei termini questo stato, toglie ai termini ogni concreta significazione ed ogni ragione reciproca, salvo quella che deriva necessariamente dalla forma dei termini combinabili a qual-

sivoglia valore attribuito agli elementi. Lo stato però indeterminato non deve esser preso indistintamente per stato generale della funzione sviluppata, perchè tanto una funzione particolare, quanto una generale possono essere egualmente indeterminate.

Queste osservazioni sono necessarie per conoscere sino a qual punto si estende una formola generale ed una formola indeterminata, considerata tanto in relazione alla funzione primitiva data o supposta, quanto in riguardo al di lei rispettivo sviluppamento.

532. Tutti i valori dei termini aventi una identica forma in un dato sviluppamento, riescono sempre rispettivamente proporzionali. Onde quando ad alcuno, o a tutti gli elementi si attribuiscono valori fuori dell'ordine finito, anco le ragioni dei termini escono fuori dell'ordine finito.

Più dai principii premessi al num. 531 si ricava, che il loro stato indeterminato nello sviluppamento non può esser confuso per verun titolo con lo stato generale delle funzioni o dei termini; poichè lo stato generale è quello che abbraccia nella sua forma maggior numero di concrete grandezze, e l' indeterminato è estraneo intieramente a questa forma generale.

533. Si deve però notare, che anco lo stato generale partecipa sempre allo stato indeterminato sotto il riguardo della sua generalità; tuttavia ognuno conoscerà dal poco che ne abbiam detto che generalmente parlando sono anco tra loro ben diversi e distinti; anzi meglio si direbbe che lo stato generale di una funzione non può esser tale se non si appropria, sotto limitate condizioni, anco lo stato indeterminato.

534. Giacchè cade il nostro dire sopra le operazioni impiegate per ottenere lo sviluppamento delle grandezze o funzioni in serie, importa moltissimo di ben considerare quale e quanta sia quella parte, che negli sviluppamenti

dipende dalle operazioni impiegate ad ottenerli, e sotto quali modificazioni vengano così espressi i nostri mentali scompartimenti delle funzioni o le espressioni parziali delle grandezze sottoponendole per la effettiva analitica loro espressione all'una o all'altra delle note operazioni.

535. È inutile che noi riportiamo le quattro principali operazioni, la somma, la sottrazione, la moltiplica e la divisione, e le loro derivate, elevazioni a potenza ed estrazione di radici, ma non sarà inutile un breve esame della natura di queste operazioni acciò non andiamo illusi sul loro potere assoluto e relativo.

Portando la nostra attenzione sopra le due prime operazioni la unione o somma e la disunione o la sottrazione, queste due funzioni mentali sono di tanta semplicità, e discendono in noi sì spontaneamente dalle prime idee che ci formiamo intorno alle quantità degli oggetti, che nulla di più primitivo e di più semplice si può immaginare. Un'oggetto, poi un'altro formano il numero o la somma, la loro unione o disunione empirica o ideale è una delle prime e più semplici operazioni dell'animo, per cui si vede, che le prime due operazioni delle quali parliamo sono di una estrema semplicità, anzi quasi di una verace necessità, perchè ambedue somministrateci anco dai sensi e dalla continua esperienza.

536. Queste prime nozioni semplici intorno l'unione e la disunione di diversi oggetti tanto oggettivi che soggettivi si chiamano, dal più volte citato geometra Wronski, *algoritmo primitivo* vale a dire nozioni semplici, facili e al tutto aperte ed elementari. Ora noi abbiam detto, che le principali operazioni considerate separatamente sono le due già dette, cioè la somma diretta ed inversa, e le altre due sono, la moltiplica diretta ed inversa cioè la divisione. Quale è dunque la nozione filosofica che noi abbiamo di queste due ultime? Ecco un quesito assai importante cui dobbiamo

portare la nostra attenzione, perchè dalla determinazione di queste due ultime operazioni dipende la cognizione anco del reciproco e combinato concorso di queste operazioni, nello sviluppamento delle funzioni in serie.

537. Il sopra mentovato geometra ponendosi a dedurre, come egli dice, dalla filosofia trascendentale l'origine filosofica di queste note e comuni operazioni, nella sua opera *Introduzione alla filosofia,* Parigi 1811, alla pag. 6 scrive: = Secondo le considerazioni filosofiche precedenti, la teorica algoritmica ha evidentemente per oggetto, prima la determinazione della natura di tutti gli algoritmi elementari possibili, considerando ciascuno separatamente, o in una maniera al tutto indipendente dagli altri, e poscia la determinazione della natura dell' influenza reciproca di questi differenti algoritmi elementari, o piuttosto la determinazione della natura della riunione sistematica di questi differenti algoritmi. La prima parte di questa dottrina teorica formerà *l' algoritmia elementare,* la seconda la teorica *l'algoritmica sistematica.*

Ora due algoritmi elementari primitivi ed essenzialmente opposti, voglio dire la *somma* e la *graduazione* si presentano nella prima delle due parti della *teorica algoritmica.*

Il primo di questi algoritmi ha due rami particolari, uno *progressivo* e l'altro *regressivo*, *l' addizione* e la *sottrazione;* il secondo ha egualmente due rami particolari, uno *progressivo*, l'altro *regressivo,* cioè le *potenze* e le *radici.*

538. Questi due algoritmi primitivi sono per così dire li due *poli intellettuali* del sapere umano, nella sua applicazione alle quantità algoritmiche. Nella somma le parti della quantità sono discontinue ed estensive, esse hanno propriamente il carattere dell'aggregazione per (juxta positionem). Nella graduazione le parti della quantità sono al contrario continue, od almeno considerate come tali, e sono in qual-

che maniera intensive, esse hanno in questo modo l'aspetto e il carattere dell'aumento (per intus susceptionem). Queste due funzioni algoritmiche del nostro sapere, delle quali ciascheduna ha le proprie leggi particolari, sono intieramente eterogenee, ed è impossibile di dedurre una dall' altra. Ecco la loro deduzione metafisica od almeno il loro principio trascendentale: la prima, la funzione *intellettuale* della somma è fondata sopra le *leggi costitutive dell'intelletto strettamente appellato:* la seconda, la funzione intellettuale della graduazione, è fondata sopra le *leggi regolative della ragione.*

539. La neutralizzazione di queste due funzioni intellettuali, e per conseguenza dei due algoritmi elementari che loro corrispondono, produce una funzione intermedia partecipante della somma e della graduazione; noi chiameremo questo algoritmo *riproduzione.* Li suoi due rami progressivo e regressivo sono la *molliplica* e la *divisione.* Questo terzo algoritmo elementare, il quale considerato sotto il punto di veduta metafisica si riferisce essenzialmente alla facoltà del *giudizio,* deve ancora a cagione della di lui origine esser considerato come algoritmo *primitivo.*

540. Per questo la teorica algoritmica presenta *tre algoritmi elementari e primitivi.* Le loro origini si riferiscono alle tre facoltà primitive del nostro intelletto; *l' intelletto strettamente detto,* il *giudizio* e la *ragione.* Le leggi di questi tre algoritmi fondate sopra le leggi rispettive di queste tre facoltà primordiali del nostro intendimento, sono come pure la natura stessa di questi algoritmi, essenzialmente differenti, e non saprebbero in tutto il loro aspetto generale, esser derivate le une dalle altre. Non esiste dunque, e non possono esistere per l' uomo altre funzioni algoritmiche, se non quelle che sono o immediatamenie fondate sopra questi tre algoritmi primitivi o derivate da questi algoritmi istessi.

541. Considerando in generale le tre funzioni primitive, sembrano ammettere quattro derivazioni necessarie corrispondenti alle quattro maniere diverse con cui possono essere combinate tra di loro, prendendole prima due a due poscia tutte e tre. Ma risguardando in particolare la natura di queste funzioni primitive, si conoscerà che la combinazione dell' algoritmo della somma con quello della graduazione si ritrova di già nella origine di quello della riproduzione; di modo che non rimangono di veraci combinazioni realmente distinte, se non quelle dell'algoritmo della riproduzione con li rispettivi algoritmi della somma e della graduazione.

542. Ora la combinazione degli algoritmi primitivi della riproduzione e della somma dà origine all'algoritmo derivato necessario che forma la *numerazione;* e la combinazione degli algoritmi primitivi della riproduzione, e della graduazione dà l' algoritmo derivato necessario, che forma le facoltà.

La schema del primo di questi algoritmi derivati è $A_0\ Q_0\ x + A_1\ P_1\ x +_2 A\ Q^2\ x + A_3\ Q_3\ x$ + ec. ec. e quello del secondo è: $Q_0x.\ Q_1x.\ Q_2x.\ Q_3x.$ ec. ec. Indicando per A_0, A_1, A_2, A_3, ec. delle quantità indipendenti di x, o per le Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ec. ec. delle funzioni qualsivogliano della x legate tra di loro per mezzo di una legge $=$.

543. Ecco quali sono i pensamenti di Wronski relativamente tanto alla natura, quanto alla combinazione delle quattro principali operazioni note e conosciute dai geometri.

Primamente osserveremo, che questa maniera di derivare gli algoritmi o le nostre concezioni intellettuali primitive della nostra facoltà percipiente è maniera che direttamente interessa la filosofia delle matematiche, e perciò anco la natura delle serie che si ottengono per mezzo delle nostre nozioni o per mezzo delle loro rispettive operazioni impiegate; quindi non è fuor di luogo il nostro pensiero di

richiamare ad esame queste dottrine nel ragionamento che teniamo sopra le serie. Vediamo dunque se questi algoritmi, che egli crede dedurre filosoficamente dalle nostre facoltà mentali, siano in faccia alla nostra intelligenza, veramente primitivi, e siano rigorosamente dedotti dalle nostre forme intellettuali o dalli nostri modi impreterribili di vedere e di conoscere, e consideriamo specialmente se la graduazione sia essenzialmente diversa dalla somma.

544. Avvertiamo che nel presente esame non entreremo a parlare delle distinzioni della scuola germanica circa *l'intelletto propriamente* detto, circa la funzione *del giudizio* e dell'altra denominata *ragione*, perchè se volessimo seguitarlo in queste distinzioni, ci converrebbe deviare dall'intrapreso cammino, e perdersi nelle ambagi filosofiche alemanne. Per questo motivo parimenti noi lascieremo in disparte la trascendentale loro derivazione filosofica, la quale sembra più presto annunciata che provata, e meglio da lui piuttosto supposta, anzi che appalesata evidente e di evidenza primitiva spontanea. Unicamente esamineremo questi algoritmi quali da lui ci vengono proposti, giacchè in questi ritroveremo quanto può bastare a poter decidere con cognizione della sussistenza o no del ragionamento del nostro geometra e così porteremo le nostre indagini sopra i soli algoritmi puri, quali sono da esso lui annunciati.

545. E da principio osserviamo se sia vero che la *somma* e la *graduazione* siano due algoritmi *essenzialmente opposti*. Stando al modo col quale egli annuncia questa sua sentenza, sembrerebbe che essa fosse evidente per sè stessa, ma riteniamo che niun geometra al leggerla la troverà fornita di questa spontanea intuitiva evidenza; ed anzichè rinvenirla per sè stessa aperta, quando vi metta qualche attenzione, non solo la vedrà spoglia di evidenza intuitiva, ma mancante anco di prova dimostrativa, ed alla fine falsa. In

fatti la nozione che noi abbiamo della somma anzi che essere essenzialmente opposta alla nozione della graduazione o della potenza, si manifesta identica sostanzialmente. E per meglio venire in cognizione di questa identità della potenza con la somma, considerate ambedue in generale, si deve premettere la seguente osservazione, cioè che la potenza è una moltiplica particolare, cioè una moltiplica della quantità in sè stessa, come poco esattamente soglion dire alcuni; diciamo poco esattameute perchè in rigor di concetto niuna grandezza può moltiplicare sè stessa; quindi convien sempre che uno dei fattori sia soggettivamente considerato, ed in uno stato astratto, e pienamente astratto, cioè conviene che tale sia quello dei due fattori che deve fungere le veci di moltiplicatore.

Quando dunque noi ci proponiamo innanzi alla nostra facoltà comprensiva l'elevazione di una data grandezza v. g. alla seconda potenza, noi poniamo innanzi della nostra considerazione la grandezza moltiplicata una volta per tante unità quante sono quelle che supponiamo o che concepiamo esistere nella grandezza medesima che deve essere elevata a potenza, o moltiplicata in sè stessa. Niun' altra idea noi possiamo avere della seconda potenza fuor di questa, e niun altro mezzo esiste in mano del geometra per elevare una quantità alla potenza fuori dell' accennata moltiplica, e questa pure con le su accennate restrizioni.

546. Queste osservazioni le abbiamo già diffusamente esposte nel cenno che abbiam fatto intorno l'aritmetica (177. 178. 179). Veniamo ora alla proposta prova: sia una grandezza indeterminata a. Di questa se ne assegna la seconda potenza scrivendola $a^2 = a^1 . a^1 = a \times a$. il concetto dunque della potenza è il risultamento di una quantità moltiplicata per sè stessa. E questo risultamento sino a che si considera in

astratto e sotto forma indeterminata come è la a^2, non è veramente un risultamento qualunque, ma bensì solamente un risultamento indicato.

Quando vogliamo entrare nella considerazione dell' effettiva seconda potenza, allora passiamo dall'indicazione alla realtà, e questa realtà consiste nella effettiva moltiplicazióne della a per a. Ma acciò questa possa aver significato, importa od esige, che almeno in via ipotetica sia considerata la a, o eguale all' unità, o maggiore o minore. Lasciando in disparte il concetto che a sia eguale ad una unità numerica, perchè questa ipotesi toglierebbe ogni significazione al quadrato a^2, consideriamo le altre due ipotesi, cioè che a sia maggiore o minore dell' unità. Queste per sè stesse considerate suppongono che la a sia una quantità composta ed in questa supposizione si ritiene, che il numero delle unità componenti la a moltiplichino sè stesse.

Ora niun numero di cose o di unità può moltiplicare sè stesso, perchè questo non esprimerebbe che una proposizione senza significazione, dunque conviene per necessità che le unità intiere o frazionarie esprimenti la a siano considerate e rappresentate da un numero astratto e perfettamente astratto onde così render ragionevole e possibile questa moltiplica.

547. Di qua ne viene adunque, che in ultimo risultamento la potenza è il prodotto, o l'effetto di una moltiplica; quindi quelle considerazioni che sono proprie della moltiplica sono all'in tutto proprie della potenza; salvo che ove si tratta di potenza le unità del moltiplicando determinano le unità del moltiplicatore astratto acciò sia così sempre rigorosamente eguale al moltiplicando.

Ricordate queste semplici ed impreterribili verità, incomincieremo ad intendere che la *graduazione* o la potenza di una grandezza non è indipendente, nè anteriore alla ripro-

duzione o alla moltiplica, ma anzi ne è un caso concreto; e siamo guidati a conoscere, che la stessa graduazione non è algoritmo primitivo perchè è un vero e rigoroso prodotto dell'operazione moltiplica; anzi comprenderemo senza veruna difficoltà, che il ragionamento procede tutto al rovescio di quello che lo instituisce Wronski il quale vorrebbe farci credere, che dalla riunione della graduazione con la somma ne nasca la riproduzione o la moltiplica.

548. Ma proseguiamo il nostro dire: provato che la potenza è originata e non può esser originata che dalla moltiplica, provato che non è anzi altro che una concreta moltiplica, ne viene che quello, che si trova di comune tra la moltiplica e la somma, questo sarà commune anco alla potenza o alla graduazione. Ora dimostriamo che la moltiplica e la somma sono due operazioni identiche tanto considerate nell' interno del nostro spirito, quanto considerate nella loro sostanza ed effettività nel calcolo. In fatti sia $a + a$ una somma; questa equivale alli $2a$, sia $a + a + a$, questa somma sarà, $= 3a$; $a + a + a + a = 4a$ ed in generale $a + a + a + a +$ ec. ec. $= na$; indicando per n il numero delle volte che si è presa la a.

Ora si vede che la somma è sempre identica con la moltiplica perchè due volte a, è precisamente una moltiplica $2{,}a = a + a = 2a$; tre volte a è precisamente la moltiplica di $3 \cdot a = a + a + a = 3a$ ed n volte a è precisamente la moltiplica $n \cdot a = a + a + a +$ ec. $= na$.

549. Siccome a ha un valor finito, e qualunque sia il numero delle sue unità da cui risulta sarà sempre possibile che sia rappresentato dalla n finita, così si vede apertamente che la potenza si risolve in una somma; imperciocchè $a + a + a + a +$ ec. ec. $= na$; e quando sia $n = a$ si ha $a + a + a + a +$ ec. ec. $= na = a \cdot a = a^2$. Qualunque valore possa competere ad a purchè sia

finito deve verificarsi, che la sua seconda potenza è identica, e perciò che può sempre esser espressa per una somma di a.

550. Veniamo alla terza potenza di a, e questa servirà a far vedere che il progredire della potenza non cangia l' identità o la risoluzione di essa in somme. Sia $a^2 + a^2 = 2a^2$; $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 +$ ec. ec, $= na^2$, e quando $n = a$, si ha $a \cdot a^2 = a^3$. Questa dimostrazione è generale, e non soffre limitazioni; onde si vede similmente che $a^3 + a^3 + a^3 + a^3 +$ ec. ec. $= na^3$, e quando sia $n = a$, si avrà $a \cdot a^3 = a^4$ ec. ec. Sia ora più apertamente dimostrata questa identità coll'applicare le grandezze qui sopra indeterminate ai numeri; e prima sia $a = 2$; allora si avrà $a + a = 2 + 2 = 2a = a^2 = 2^2 = 4$. Abbiam detto che $a^3 = a^2a = 2^2 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$; ma $2^2 2 = 4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8 = 2^3. = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8 = a + a + a + a$.

Così $a^4 = a^3 \cdot a = (2 + 2 + 2 + 2)\, 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 8 \cdot 2 = 16 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Similmente $a^5 = a^4 . a = (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2)\, 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 32$. Questo ragionamento trasmutando in tante pure somme tutte le potenze ne dimostra la sostanziale identità.

551. Perchè tutta questa dimostrativa scomposizione della potenza sia effettuata, non ha bisogno di altra supposizione oltre quella già fatta, cioè che a sia grandezza finita e che abbia un valor finito, il quale non sia l'unità precisa.

Possiamo dunque stabilire in generale, che qualsivoglia potenza di una grandezza finita si risolve sempre in somma mediante questa retrograda decomposizione $a^n = a^{n-1}\, a$

$= a^{n-2} \times a \times a$ ec. sino al punto che si abbia $a^n =$ $a + a + a + a +$ ec. ec.

Da questa dottrina ne viene ancora, che siccome ogni potenza può esser espressa anco nel seguente modo v. g. $a^2 = a \times a = a \cdot a = a + a$ ec. tante volte presa la a quante sono le sue unità; $a^3 = a^2 . a = a \cdot a \cdot a = a + a + a$ ec.; $a^4 = a^3, a = a^2\, a \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a = a + a + a + a + a +$ ec. onde in generale si ha sempre $(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot) = (a + a + a + a + a + a + a + a + $ ec. ec. ec.).

552. Ogni volta adunque si voglia considerare con attenzione la formazione delle potenze, noi non abbiamo sotto la nostra contemplazione altro che somme, le quali sono dalle potenze sempre compendiosamente espresse.

Imperciocchè quale è in fatti il concetto che noi abbiamo di una potenza, e della formazione tanto ideale che pratica di essa potenza? essa consiste e deriva tutta per intiero dalla moltiplicazione della grandezza in sè stessa, la quale si è per tal mezzo elevata a potenza.

Questa sola operazione della moltiplicazione della grandezza in sè stessa, è quella che ha guidato i geometri a formarsi l'idea filosofica e ragionata della potenza; e tutta la filosofia che si ravvisa in questo concetto matematico, è parimenti tutta e precisamente tutta la filosofia che noi aver possiamo di questo prodotto mentale o reale, appellato potenza.

Wronski per uno stravolgimento delle più semplici idee, stravolgimento derivante da malintesa filosofia alemanna, ha ammesso come algoritmo primitivo quello della potenza o graduazione, sorpassando la di lei formazione o derivazione procedente dalla moltiplicazione necessaria e richiesta sempre a produrla, e questa risolventesi sempre in semplice e pura somma.

553. La nozione adunque, che egli dà della potenza qual algoritmo distinto sostanzialmente, anzi necessariamente opposto alla somma è all'in tutto insussistente, anzi all'in tutto erronea. Parimenti è pienamente erronea la deduzione della moltiplica da esso lui appellata riproduzione considerata come derivante dall' algoritmo della graduazione e della somma, deducendo questa sostanziale differenza dall'idea, che la potenza significhi qualche cosa per *intus susceptionem* ec. ec. Di fatti fra tutti i possibili incrementi o fra tutte le diminuzioni che presentar può una data grandezza in causa di variazione di stato, quell'unico che risponde a potenza, fra questa infinita serie di modi possibili di variazione, è quello solo nel quale il valor del moltiplicatore si desume dal valore del moltiplicando medesimo; giacchè tutti gli altri che possono dar vita ad indefinite variazioni dello stato della grandezza sono estranei alla potenza di essa. Quando poi la grandezza da elevarsi alla potenza abbia qualcheduno degli infiniti valori frazionarii, allora tanto più si vede errata l'idea che la potenza sia qualche cosa quasi *per intus susceptionem*.

554. Finalmente ci è cosa facile il conoscere la insussistenza della posizione da lui posta, che la somma e la graduazione siano come i due *poli* intellettuali del sapere umano e che a questi due poli appartener debbano *leggi costitutive* tra loro assai diverse; una, cioè legge attinente alla somma che egli considera nozione appartenente all'*intelligenza strettamente appellata,* e l'altra legge relativa alla graduazione, nozione procedente secondo il suo pensamento da *legge costitutiva della ragione.*

Noi qui non abbiamo rossore a confessare candidamente che non intendiamo qual sia il motivo, che a formarsi il concetto astratto e generale della somma non vi intervenga per verun conto la nostra ragione, ed a formarsi l'idea della

potenza non vi abbia alcun luogo la intelligenza strettamente appellata.

Più confessiamo che la nostra maniera di filosofia non ci permette di comprendere una tanta e marcata distinzione tra la ragione e la intelligenza, mentre la prima è si collegata alla seconda, che non può aver vita senza di questa.

555. Ecco adunque in via teoretica e pratica comprovato quanto magra si appalesi la filosofia sopra della quale il nostro geometra di Polonia fonda i primi algoritmi della scienza matematica. Una prova ulteriore egli ce la presenta in questo, che soggiunge: = Lo schema della somma o della numerazione è il seguente (dice egli) cioè $A_0 Q_0 x + A_1 Q_1 x + A_2 Q_2 x +$ ec; e quello delle facoltà è il seguente $Q_0 x^{\cdot} Q_1 x^1 Q_2 x^2 Q_3 x^3$ ec. designando per A_0, A_1, A_2, A_3, ec. delle quantità indipendenti di x, e per Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, ec. ec. delle funzioni qualunque di x legate tra di loro da una legge. Mentre la prima di queste due espressioni analitiche è di già un misto di somma e di potenze, e di indeterminati coefficienti A_0, A_1, A_2 ec. Questo schema adunque della somma, non è diverso se non in parte da quello delle potenze che egli ci porge per lo schema delle facoltà. Il che dà luogo a comprendere che procede troppo alla buona, e senza verace rigor di ragionamento.

556. A conferma di quanto siamo sin qui venuti esponendo concernente la identità della somma con la moltiplica e con la potenza o graduazione, veniamo all'esame della nota formola del binomio newtoniano. Essa, come ognun sa, presenta per somma, o per potenza le parti o le funzioni parziali del binomio (a questa forma binomiale si riducono, e si assoggettano tutte le altre, benchè d'aspetto *trinomiale quadrinomiale* ec. come si vede praticato da tutti gli analisti).

Riportiamo la formola newtoniana, o sia la seguente:

$$(x + u)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} u + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2} x^{n-2} u^2$$

$$+ \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3} x^{n-3} u^3 + \text{ec. ec.}$$

Dal sin qui detto poc'anzi si è dimostrato essere:

$x^n = x + x + x + x + x +$ ec.
$x^{n-1} = x + x + x + x +$ ec.
$x^{n-2} = x + x + x +$ ec.

Sino ad $x = x$
Similmente essere
$u^n = u + u + u + u + u +$ ec.
$u^{n-1} = u + u + u + u +$ ec.
$u^{n-2} = u + u + u +$ ec.
Sino ad $u = u$.

I coefficienti si presentano anco più facilmente esprimibili per somme, giacchè il secondo esprime precisamente la somma delle unità dell'esponente della potenza, il terzo le combinazioni binarie di queste unità, il quarto quelle ternarie, e così segui.

557. Tutto si comprenderà anco meglio sostituendo alla formola generale espressioni numeriche concrete, sia dunque $x = 10$; $u = 8$; $n = 6$ sei, allora avremo $(x + u)^n$,

$$= (10 + 8)^6 = 10^6 + \frac{6}{1} 10^{6-1} 8 + \frac{6}{1}, \frac{6-1}{2} 10^{6-2}$$

$$8^2 + \frac{6}{1},\ \frac{6-1}{2},\ \frac{6-2}{3}\ 10^{6-3}\ 8^3 + \frac{6}{1},\ \frac{6-1}{2},$$

$$\frac{6-2}{3},\ \frac{6-3}{4}\ 10^{6-4}\ 8^4 + \frac{6}{1},\ \frac{6-1}{2},\ \frac{6-2}{3},$$

$$\frac{6-3}{4},\ \frac{6-4}{5}\ 10^{6-5}\ 8^5 + \frac{6}{1},\ \frac{6-1}{2},\ \frac{6-2}{3},\ \frac{6-3}{4}$$

$$\frac{6-4}{5},\ \frac{6-5}{6},\ 10^{6-6}\ 8^6;$$ ovvero $10^6 + 6\cdot10^5\cdot8 + 15\cdot$
$10^4\cdot8^2 + 20\cdot10^3\cdot8^3 + 15\cdot10^2\cdot8^4 + 6\cdot10\cdot8^5 + 8^6$. Ovvero $= 1000000 + 4{,}800000 + 9{,}600000 + 10{,}240000 + 6144000 + 1966080 + 262144 = 34012224 = (10 + 8)^6 = (18)^6 = 34012224$.

Da quanto qui viene dichiaratamente comprovato e in dottrina e con apposito calcolo si vede apertamente, che il voler ammettere tre primitivi distinti algoritmi per indicare la somma, la moltiplica e le potenze è ammettere, non solo ciò che non si può provare, ma anco ciò che si presenta contrario a verità. Di fatti non lasciandoci sedurre da disutili distinzioni logiche e categorie scolastiche si comprende, che ponendoci a considerare tutto l' indefinito campo delle possibili variazioni che provar può una qualunque grandezza, alla fin fine si riducono tutte a queste impreteribili variazioni, cioè che la grandezza medesima cambi di stato in più od in meno; e quindi che il tipo o la schema di ogni cangiamento risolver si debba nella somma o nell'algoritmo ad essa opposto, cioè nella sottrazione.

538. Ritornando alle principali dottrine che ci presentano le formole del num. 526, esse ci dimostrano esplicitamente

quale sia il relativo valore dei termini delle serie, e come gli uni siano in confronto degli altri incomparabilmente inferiori, anzi inferiori a tal segno che i successivi sono incapaci ad alterare il valore dei precedenti in qualsivoglia parte finita. Ciò non pertanto non dobbiamo pensare che altrettanto accada, perchè i termini di un valor tenuissimo siano eguali a zero, e perchè sia questo stato di zero il motivo che non valgono a cangiar lo stato degli antecedenti, poichè è un'assurdo il dire che possano esser zero ogni qualvolta si abbia riguardo al modo con cui si sono mentalmente ridotti a questo stato di suprema piccolezza. Quando si dice esser tanta la relativa piccolezza degli uni in comparazione degli altri, da rendere i primi incapaci ad essere alterati nel loro stato finito, s'intende dire, che riuscendo i primi infinitamente grandi in confronto dei secondi, questi non possono accrescere o immutare l'infinito.

559. Una considerazione analoga, anzi pienamente conforme, ella è quella relativa alla infinitesima parte di una data grandezza finita, la quale ultima ritenendosi che contenga una infinità di queste sue infinitesime parti, ne viene, che questa infinitesima parte aggiunta o levata ad un numero infinito di queste infinitesime, diviene incapace ad accrescerne o diminuirne questo infinito, il quale appunto si ritiene comparativamente infinitamente maggiore dell'infinitesimo. Imperciocchè se una infinitesima parte aggiunta all'infinito, fosse capace a cangiare lo stato di quest'ultimo, esso sarebbe e non sarebbe infinito.

Egli è dunque in questa significazione che deve esser inteso, e dimostrato anco il principio del calcolo differenziale, già più volte ricordato; cioè che una quantità infinitesima si può considerare come veramente incapace ad alterare una funzione o quantità finita, e perciò si può riguardo a questa sua incapacità comparare o ritenere come

fosse eguale a zero; ed egli è per questo che anco i risultamenti del calcolo differenziale danno risultamenti esatti finiti.

560. Manifestata con sufficiente chiarezza la evidenza del principio del calcolo differenziale, diviene di grande importanza per questa filosofia, il cercare di conoscere a fondo anco il fine e le pratiche applicazioni di questo celebre principio.

Imperciocchè egli è appunto per questo principio, base e fondamento del calcolo differenziale, che quest' ultimo è riuscito una veramente nuova analisi, e capace a risolvere una quantità di problemi, che erano inaccessibili con tutti i mezzi anteriormente suggeriti dalla scienza matematica.

La nuova analisi infinitesimale si fonda adunque sopra il concetto mentale ipotetico della grandezza infinitamente piccola, concepita ed ammessa come primitivo supremo generatore di ogni grandezza finita. E questo concetto soggettivo mentale si appropria a qualsivoglia data o supposta grandezza o funzione, e tutta questa appropriazione s' intende adattata in modo che si consideri come mentalmente avverarsi che la grandezza o la funzione riceva o provi una verace variazione in più o in meno, sopraveniente allo stato suo primitivo.

Per la quale variazione si comprende che questa infinitesima variazione ipotetica viene per necessità di appropriazione ad essere incorporata, e perciò resa compartecipe pienamente di tutte le proprietà, della grandezza o della funzione cui viene indossata ed incorporata; anzi, secondo tutto ciò che se n'è detto sin ora, questa infinitesima variazione si ritiene propriamente come sia una parte costitutiva della funzione medesima, ed in niente diversa da essa, salvo che nello stato suo infinitesimo, comparativamente alla funzione finita.

561. Questa supposizione a prima giunta può apparire di poca importanza, tuttavia ben addentro considerata dispiega una altissima importanza, e si manifesta di una stupenda fecondità; imperciocchè con questa infinitesima variazione attribuita alla funzione o alla grandezza, questa dispiega meglio sviluppate, e meglio dichiarate le sue proprietà. E divenendo così la variazione come un nuovo mezzo analitico estensivo della funzione si presenta un mezzo possentissimo a rilevarci e manifestarci un gran numero di recondite proprietà della funzione stessa.

La funzione per questa aggiunta dell'infinitesima, conosciuta anco sotto il nome di variazione si svolge in serie, e questa per mezzo de' suoi termini o delle sue parti ci presenta un'analisi dettagliata e più precisa della funzione medesima, ce ne fa conoscere l'indole, e tutto o almeno parte del carattere della funzione e sue proprietà. Per questa variazione esibita pur essa sotto forma analitica e di calcolo, ed innestata in tutti i termini della serie in cui si risolve la funzione, si appalesano apertamente le affezioni e le proprietà della funzione medesima. In questa aggiunta sta riposto questo singolare importantissimo vantaggio, quello cioè di prestarci il mezzo di risalire dalla variazione alla funzione primitiva.

Questo è lo scopo ed il fine filosofico di questa artificiata ipotesi della variazione infinitesima; e dicesi infinitesima, perchè se fosse finita questa variazione darebbe luogo bensì ad una serie, la quale presenterebbe lo sviluppamento della funzione, ma nella quale per esser tutti i termini comparativamente tra loro di un verace valor finito, sarebbero bensì capaci qualche volta di meglio appalesarci le proprietà della funzione, ma rimanendo tale proprietà involta e contenuta nella moltitudine di tutti i termini, nessuno de' quali potendo esser trascurato molte volte non

avremmo fatto alcun guadagno, ma anzi soventi volte non servirebbero che ad accrescere ed estendere la difficoltà di ben conoscere l'indole, la natura, ed il carattere intimo della funzione.

Quando all' invece la variazione è ritenuta di valore infinitamente piccolo, allora usando del celebre principio del calcolo differenziale si ommettono o si trascurano senza timore di sensibile errore tutti quei termini della serie o dello sviluppamento della funzione che non giovano allo scopo, che ci proponiamo, o che non sono utili alle ricerche che ci proponiamo di tentare.

Così nella quadratura delle curve, ove nelle loro equazioni si suppone che le coordinate provino delle variazioni infinitesime: queste equazioni variate, ovvero le funzioni dei loro membri variate, presentano apertamente e manifestano le loro proprietà, giacchè accresciute da queste infinitesime parti aventi proprietà identiche e communi alle equazioni o funzioni esprimenti l' andamento delle curve, con queste si stabiliscono delle comparazioni sufficienti a fare, per lo più, appieno comprendere tutta l'indole e la proprietà delle linee curve. E quantunque in riguardo alla forma dello sviluppamento dei membri e di uno dei membri della equazione la moltiplicità e la forma analitica dei termini sia la stessa di quella che ha luogo per le variazioni finite, tuttavia in quest' ultima ipotesi, della variazione infinitesima riuscendo i termini tutti in confronto dei successivi infinitamente più grandi, si possono ommettere sempre i successivi comparativamente, e così ridurre e semplificare la equazione e ritenere della funzione sviluppata quel tanto solamente che ci interessa e ci occorre per comprenderne le proprietà che ci interessano, quali sono le tangenti, sottangenti ec. ec.

Il geometra spesse volte col solo infinitesimo di primo

ordine che trovasi appunto sempre nel secondo termine dello svolgimento in serie, considerato come una parte infinitesima della funzione variata, ottiene apertamente la cognizione delle proprietà della funzione, cognizione della quale ha bisogno, per risolvere elegantissimi ed importantissimi problemi.

Che poi gli altri termini infinitesimi degli ordini superiori abbiano lo stesso ufficio e significato che l'infinitesimo primo ha con la grandezza finita e per questo si presentino tutti attissimi a far conoscere le proprietà principali della funzione, questo giova saperlo per prevalersi del loro significato allorquando per qualche eventualità non possiamo valerci dell'infinitesimo di primo ordine; ma per altro in via ordinaria questi ordini superiori si ommettono o si cacciano dal calcolo come inutili ordinariamente, e poche volte si ha ricorso agli infinitesimi di secondo ordine, ed anco a quelli di terzo ordine ec. ec.

562. Noi ci serviamo di queste dottrine quando vogliamo dalla variazione risalire alla funzione primitiva non variata; la prima traccia, anzi la dottrina intiera si trova in Galilei, ed anco in Cavalieri, poichè sì l'uno, che l'altro e per dottrina e pratiche loro proprie, ambedue insegnano a risalire al finito; il primo dall'indivisibile infinitesimo, ed il secondo dall'indivisibile indefinitamente piccolo alla grandezza finita. Tutto questo è già stato per lo innanzi in questa filosofia sufficientemente esposto e ragionato.

Questi due grandi geometri italiani scrivevano in un tempo che l'analisi finita era ancora bambina, e quindi non si presentava loro alla contemplazione quel campo vastissimo indefinito di grandezze varie, e variamente esposte secondo gli stati diversi della grandezza che poscia presentò l'analisi portata a molta perfezione; perciò non è meraviglia che ristringessero le loro speculazioni alle sole meccaniche o alla sola grandezza estensiva e di preferenza, come quelle

scienze che presentavano chiare e più precise considerazioni sino allora conosciute.

E chi sa, che nel pensiero di questi sommi, non venisse in chiara luce anco il concetto che l'indivisibile avesse anch'egli le sue più minute parti generatrici e che queste gli dassero a conoscere quest'indivisibile in quel modo che egli stesso conduceva alla cognizione del finito? E chi sa che dal seguire sì grandiosi pensamenti li rattenesse il pensiero, che le cose di gia note e conosciute alla scienza fosser estranee al loro scopo, e che sì alte speculazioni e cotanto peregrine investigazioni, non avessero utile significazione?

Che cotali idee e simili elevati pensamenti s' aggirassero nella profonda considerazione di Galilei, mi pare che se ne abbiamo una prova sufficiente in quello che siamo per dire. Scrivendo egli al sig. Pietro Carcaville per risolvere alcuni dubbii che si riscontravano nelle sue dottrine e segnatamente volendo stabilire che nell'aver egli ammesse le prime ragioni ed ultime della velocità finita, dallo stesso Galilei appellate velocità virtuali, o velocità infinitamente piccole, si spiega in modo da lasciare conoscere come queste medesime velocità virtuali erano state da esso lui immaginate ed ideate bensì infinitamente piccole, ma non in modo che di queste non ne riconoscesse ancora delle sempre minori, e minori indefinitamente, giusta la filosofica nozione del continuo; di fatti, ecco quali sono le sue parole che adopera nell'esprimere questa sua maniera elevatissima di pensiero. = Mentre io stabilisco un'istante di tempo nel quale partendosi il mobile dallo stato di quiete, nel quale si trovò nell' assegnato istante ed entrando in moto il quale debba andarsi accelerando con quella proporzione che cresce la quantità del tempo, la quale nel detto istante era nulla; siccome non si può assegnare così piccolo spazio di tempo, che di minori non ne siano decorsi dopo il primo istante segnato;

così partendosi il mobile dalla quiete non trapassa quantità alcuna di velocità assegnata, che per minori ancora non si sia ritrovato =.

Qui il lettore abbia presente alla memoria, che Galilei parlando del tempo, e precisamente in questi suoi ragionamenti matematici, alla parola istante ha costantemente attaccata l'idea di esprimer con questa voce una parte infinitamente piccola del tempo finito. Ora dietro questa nozione di fatto potrà anco conoscere come questo sommo filosofo comprendesse che anco questi suoi indivisibili infinitamente piccoli in confronto delle grandezze finite essi pure ammettevano delle parti di loro sempre indefinitamente minori.

Il che sia detto per far presente come con le sue speculazioni fosse entrato negli infinitesimi minori indefinitamente degli infinitesimi istessi, come anco aveva discoperto che secondo alcune posizioni geometriche si davano degli infiniti infinitamente maggiori dell'infinito medesimo.

Ma basti questo motto ad appoggiare il nostro pensamento.

563. Le regole, o meglio le leggi analitiche le quali insegnano a ritrovare i cangiamenti che provano le funzioni contenenti delle variabili quando esse subiscono delle variazioni soggettive infinitamente piccole, e esposte in calcolo, appropriate e pienamente rispondenti alle diverse indefinite svarietà di funzioni, costituiscono il calcolo differenziale; e le dottrine tutte che lo sostengono e lo diriggono, e servono di filosofia allo stesso calcolo.

Dalla qualità che hanno le variazioni delle funzioni, di rendere cioè meglio sviluppate le affezioni e le proprietà intime delle funzioni è facile l'indovinarne la grandiosa utilità che presenta il calcolo differenziale appropriato alle funzioni analitiche, applicazioni conosciute sotto il nome di *usi del calcolo differenziale nelle funzioni analitiche.*

Noi non entreremo in questi dettagli perchè sono in tutti i trattati di analisi infinitesimale, solamente ci basterà l'avere accennata la cagione di questa grande utilità.

564. I primi scopritori dell'analisi infinitesimale seguitando le traccie suggerite dall' infinita scomposizione ideale della grandezza, e tenendo conto dell' infinità di queste infinitesime loro parti han creduto di risalire alla grandezza finita riunendo o sommando tutte queste infinitesime parti. Ma in ciò essi hanno avuto ragione, e torto; ragione perchè veramente la somma di tutte le infinitesime parti riproducendo (come avevano insegnato Galilei, ed anco un poco più alla buona Cavalieri) veramente la grandezza finita, o la funzione finita, si riusciva a riavere tutta intiera la grandezza o la funzione medesima; hanno poi avuto torto, perchè le leggi e le proprietà, le condizioni tutte della funzione sendo comuni alle singole infinitesime parti ed alla funzione, questa comunanza porgeva al geometra quanto bastava a conoscere la funzione medesima o la funzione primitiva invariata senza aver bisogno di portare il pensiero sopra la infinità de'suoi principii elementari infinitesimi.

565. La somma degli infinitesimi riproduceva la grandezza finita. Le proprietà che ogni infinitesimo portava come in fronte scritta presentava le proprietà della grandezza finita. C'è dunque stato equivoco in quelli che hanno confuso la riproduzione del tutto con le proprietà e condizioni che competevano alle parti; imperciocchè la somma vi dava il tutto, e materialmente qual'era, e l'infinitesimo presentava le leggi e le condizioni del tutto, e soventi volte queste leggi e condizioni non erano ben chiare ed appieno sviluppate se non nell'infinitesimo.

566. Il calcolo sublime ha dunque due diversi aspetti: uno che consiste nell' attribuire una variazione infinitesima alla grandezza data o alla di lei funzione; per così avere

anco espressi in calcolo tutti i mutamenti, ed il relativo sviluppamento in serie, al quale suole dar vita questa variazione; l'altro nel ricavare dall'indole e proprietà della variazione, l'indole e la proprietà e la cognizione della funzione cui la variazione è stata applicata. Considerato sotto il primo aspetto, il calcolo appellasi *differenziale*, sotto del secondo *integrale*.

567. Ommettendo però di entrare in particolari dettagli intorno al calcolo superiore, giacchè questo calcolo si trova esposto e sviluppato compiutamente in quasi tutte le opere elementari e classiche, che parlano e trattano di questo ramo dell'analisi superiore, ritorniamo con la nostra attenzione allo sviluppamento delle funzioni in serie nelle quali vi entrano gli infinitesimi di diversi ordini, o le differenziali di diversi ordini; per aver così anco occasione di ripigliare il discorso delle serie.

Primamente vuol essere notato, che quando la funzione è un monomio, e che non abbia per esponente altro che l'unità, essa in causa della variazione infinitesima non ammette naturalmente alcuno sviluppamento in serie per potenze successivamente crescenti. Ciò però è vero solamente allora che la Fx non ha che l'esponente uno, poichè in tal caso diviene F(x + dx). Ma quando abbia un esponente qualunque diverso dall'unità e questo esponente sia indicato per n, allora la funzione $F(x)^n$ divenendo $F(x + dx)^n$ presenta lo sviluppamento $Fx^n + \frac{n}{1} Fx^{n-1} dx + \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}$ $Fx^{n-2} dx^2 +$ ec.

568. Tuttavia non dobbiamo ommettere che da ognuno si conosce che anco ogni semplice funzione monomia e polinomia non avente per esponente che la sola unità, può essere anch'essa sviluppata in serie attribuendole un qual-

sivoglia coefficiente n a piacere, e trasformando la proposta funzione v. g. Fx nella corrispondente $F\left((1 + x - 1)^{\frac{1}{n}}\right)^n$ poichè sotto quest'ultima forma è sempre capace di sviluppamento secondo la suddetta formola newtoniana. Questa trasmutazione però serve di prova che per ridurre in serie una funzione qualunque avente per esponente l'unità, conviene cangiarla con artificiata ingegnosa speculazione in un'altra avente un' esponente n diverso dall' unità; perchè nel primo stato non presenta possibilità di sviluppamento.

569. Sia però notato che qui parliamo di quelle serie che hanno origine dall' esponente della funzione, e non di quelle le quali fondandosi pur esse su la proprietà del continuo si limitano ad esprimere i brani della funzione infitamente divisibile ma presi e regolati secondo legge geometrica procedente all'infinito.

Di queste ultime serie ne abbiamo già abbastanza ragionato in quest'opera parlando di Euclide e di Archimede, per cui non occorre di più oltre parlarne.

570. Prima ancora di venire a minuto esame di questo sviluppamento delle funzioni in serie, e del quale a profusione ne abbiamo e dottrine e pratiche in tutte le opere dei geometri che hanno scritto di cose analitiche, crediamo opportuno di ricordare anco una volta quali siano le operazioni mentali che servono a dar origine alle serie; e ciò a fine di far conoscere il verace fondamentale algoritmo che dà vita alle serie.

Le grandezze o le funzioni quali da noi si percepiscono in generale, sono sempre considerate come un tutto, e questo avente forma di un cumulo di minori elementari grandezze, le quali ultime si ritengono come i componenti o generatori delle funzioni medesime.

Ora dietro tale nozione si presenta spontaneo il pen-

samento, che quanto più una data grandezza s' immagina grande in comparazione di un'altra, la prima debba contenere un maggior numero di unità omogenee elementari. L'idea prima soggettiva della grandezza o della di lei costituzione, è dunque un'idea di cumulo o di somma di unità producitrici della stessa. Di qua viene che lo sviluppamento delle funzioni in serie per parti delle stesse, non può in massima esser altro che uno spartimento di queste piccole parti che insieme costituiscono la grandezza. Lo spartimento potendo per la proprietà del continuo esser quello che a noi piace, ci si presenta vario quanto si sa immaginare, anco in onta della costanza della forma e ragione che possiamo attribuire ai termini di una serie governata da legge geometrica.

E siccome i diversi gruppi crescenti o decrescenti, e formanti i termini di queste serie possono presentarsi o come effettive somme, o come moltipliche, o potenze, così anco lo spartimento della funzione può esser effettuato dalla somma, dalla moltiplica, e dalle potenze, o da queste in qualsivoglia modo combinate.

La sottrazione come somma inversa, dà origine e vita alle serie già ricordate di Euclide. La moltiplica dà vita al binomio di Newton, e la divisione, e l'estrazione delle radici a tutta l'altra numerosa famiglia delle serie.

571. Abbiam già avvertito (num. 551. e seguenti) che ogni prodotto della moltiplica può sempre esser espresso per somma e che la prima non riesce al di là di una compendiosa espressione dell'ultima; ora vorremmo che la gioventù cui specialmente posson tornar utili queste considerazioni, non si desse a credere che la moltiplica sia qualche cosa di sostanzialmente diverso dalla somma, quantunque si possa far con quella ciò che si esprime e si fa con questa, poichè se la pensasse a questo modo si illuderebbe; imperciocchè la somma, in fondo è identica con la moltiplica, e

questa non è che quella. Poichè quando si dice v. g. due volte tre danno sei; cioè $2.3 = 6$ è precisamente la unione di tre con altri tre; così quando si pronuncia e si scrive tre volte quattro cioè $4 + 4 + 4 = 12$; o si scrive $3.4 = 12$, non abbiamo che l' identica idea, e l'identico concetto che guida il nostro pensiero.

572. Già s'intende che la riunione delle diverse parti concorrenti a formare una grandezza, le presuppone tutte omogenee; poichè in caso che fossero eterogenee non saprebbero formare la grandezza nel suo stato omogeneo ed una. Non è necessario, che le parti concorrenti siano tutte di pure unità elementari, poichè possono anzi essere diversi gruppi di queste unità.

Ora cosa facciamo col pensiero ed effettivamente quando vogliamo elevare a qualche potenza una data grandezza? Noi non facciamo altro che concepirla o supporla composta di un determinato numero di unità concorse a formarla, e fissiamo di prendere questa grandezza tante volte quante sono le unità che la costituiscono. Così che v. g. se la n fosse supposta risultare di cento unità, noi volendola innalzare alla seconda potenza intendiamo di prendere cento volte queste sue cento unità, e così ci figuriamo con la seconda potenza di esprimere dieci mila unità. Se questa seconda potenza si volesse portar alla terza, piglieremmo ancora cento volte le dieci mila unità, e ne considereremmo nella terza potenza un milione di queste medesime unità.

Siccome quest'ultima specie di moltiplica si addita col mezzo degli esponenti, perciò moltiplicare una n in sè stessa si suole indicarla per $n \cdot n = n^2$; ed elevandola alla terza potenza si nota per $n \cdot n \cdot n = n.^3$ e così via via.

573. Ora in questo luogo siaci permesso ancora di ritoccare, come la somma e la moltiplica si rappresentino indistintamente e ciò anco a fine di meglio comprendere l' er-

rore di Wronski. Sia $2^2 = 2.2 = 4 = 2 + 2$. $3^2 = 9 = 3 \cdot 3 = 3 + 3 + 3$. Similmente $(2 + 1)^2 = 4 + 2 + 2 + 1 = 2^2 + 2^2 + 1 = 9 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Così $(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$. Così $3^2 = (2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3})^2 = 4 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 9$.

Così per qualsivoglia altra maniera con la quale si voglia scompartire la grandezza tre giacchè sempre il prodotto delle sue parti moltiplicate tutte tre tra di loro conducono al medesimo risultamento, ovvero danno lo stesso prodotto.

574. Veniamo anco ad esempio più astratto e sia $(a + n)^3 = a^3 + 3a^2n + 3an^2 + n^3$. Qui, poichè in luogo dei numeri si pongono lettere indeterminate, rimane indeterminata anco la relazione che passa tra la potenza e le semplici unità. Se però la a si supporrà risultare da unità come pure la n, noi avremo i risultamenti sopra ottenuti. Lo stesso

dicasi della n quando questa lettera si consideri risultante da un determinato numero di unità.

575. Se però la a esprimesse una semplice unità, ovvero invece la si considerasse come una cosa unica, semplice od equivalente, come si è detto all'unità, in allora sotto questo riguardo noi sappiamo che $1^1 = 1$; che $1^2 = 1$; che $1^3 = 1$; $1^4 = 1$ ec. Così $a = 1$, $a^2 = 1$, $a^3 = 1$, $a^4 = 1$ ec; così anco le equazioni che ne derivano $a^4 = 1$, ovvero $x^2 = 1$; $x^3 = 1$, quando $x = 1$.

Anco queste equazioni sono di quelle che si chiamano da alcuni geometri equazioni numeriche, perchè la loro soluzione si tenta in numeri; tuttavia tra le equazioni numeriche queste meritano una speciale considerazione, perchè in queste mal si presta l'idea della moltiplicità delle radici le quali nelle altre ordinarie equazioni sono sempre rispondenti al numero dell' esponente, perchè volendo rinvenire in queste equazioni la moltiplicità delle radici si cade in braccio spesse volte alle quantità immaginarie.

Ma ritornando al fine principale che ci siamo proposti di indicare, cioè, a che si riduca in ultimo risultamento la moltiplica, si vede che Wronski non ebbe veruna fondata ragione di asserire che l' algoritmo della graduazione era all'in tutto differente e distinto dall'algoritmo della somma ed a questo precisamente opposto: poichè così pensando s'incontrava in due abbagli; uno è riposto nella sostanziale distinzione della somma con la moltiplica, distinzione che non ha nè può avere alcun significato; l'altro che il diverso grado della potenza o della graduazione indichi sempre cangiamento di valore sopravveniente alla grandezza che in astratto si considera come elevata a potenza; poichè tra tutta la indefinita o infinita varietà dei valori che può presentare una funzione espressa con cifre indeterminate, avvi anco il valore dell'unità nel qual valore si mantiene la gran-

dezza sempre inalterata a qualunque potenza venga innalzato.

576. Arrechiamo un motto delle equazioni generali espresse per mezzo di radici indeterminate. L'equazione di secondo grado si suole denotare come segue $(x - a), (x - b) = x^2 - bx - ax + ba$. Ove quale che sia il valore di x, il suo quadrato come replicatamente abbiam detto potrà esser rappresentato da una somma di tante volte x, quante unità si ritengono concorse a formarlo. Lo stesso è di ax, e di — bx, non che di ba.

Quello che si avvera di $(x - a), (x - b)$ si verifica di $(x - a) (x - b) (x - c)$ ec.

577. Tutte le serie esprimenti sviluppamento di funzioni e procedenti per somme di potenze graduate, e rispettivamente crescenti e decrescenti, non sono in ultimo risultamento nei loro termini, se non altrettanti gruppi di diverse somme. Onde possiamo senza timor d'inganno stabilire che tutti gli sviluppamenti e tutte le serie non presentano che funzioni esprimenti, o esprimibili in somme, ed in ultimo risultamento non significano altro se non quello che abbiamo già ricordato, cioè di presentare nei loro termini diversi gruppi delle unità elementari delle quali si suppone composta e risultante la proposta grandezza o funzione.

578. Per mettere però sott'occhio una indiretta differenza che passa tra la somma semplicemente considerata, e la moltiplica considerata quando serve ad innalzare le grandezze a potenza, diremo che la somma implicitamente non risguarda che l'aggregazione delle grandezze, laddove la moltiplica quando serve ad innalzare la grandezza a potenza, inchiude un'altra considerazione, quella cioè di presupporre o di risalire alle elementari unità costitutive della grandezza, e si fonda su di questa base per prenderla tante volte, quante sono queste elementari unità costitutive di

essa grandezza. Questo punto di veduta mentale pare che la renda indirettamente ed in alcuna parte alcun poco diversa dalla somma, però nulla toglie alle dottrine da noi sopra esposte circa la loro identità sostanziale.

579. Forse ad alcuno apparirà che ci perdiamo in minuzie circa queste elementari operazioni dell' analisi e dell'aritmetica, ma il disparere che vediamo esistere nella mente di alcuni tra quali trovasi anco il nostro geometra di Polonia, diviene una prova non dubbia che vi aveva qualche bisogno ancora, e specialmente che ciò era opportuna cosa per semplificare le nostre idee sulla natura delle serie.

580. E veramente avendo dimostrato come le serie si riducono a puri gruppi ordinati di unità, e questi esprimenti tante somme parziali di queste unità, si appalesa chiaro una importante circostanza, qual'è quella del ravvicinamento delle serie che procedono per potenze e sono ingenerate dalla operazione detta moltiplica, con quelle che derivansi dalla divisione e sono prodotte da questa operazione che è poi la moltiplica inversa.

581. Di qua pure si appalesa sempre meglio la verità della massima di già ammessa, che la variazione attribuita alla grandezza, quantunque pure infinitesima, partecipa pienamente alla natura e proprietà della grandezza medesima perchè incorporandosi con le somme o termini della stessa non può a meno di non esprimere le proprietà della grandezza. Così la F. x^2 provando la variazione w diviene F $(x + w)^2 = x^2 + 2wx + w^2$. Ove la w è pienamente trattata nè più nè meno di qualsivoglia grandezza finita. Gli stati adunque delle potenze della w non dipendono per verun conto della operazione, ma unicamente dalla nostra volontà la quale attribuisce alla w dei valori finiti o infinitesimi, come più ci aggrada.

582. Da queste dottrine ne viene, che siccome nell' an-

damento delle potenze del binomio risultante da quantità finite vi sono leggi determinate e fisse che ne regolano le sue potenze e servono a dedurre i suoi termini gli uni dagli altri, e quindi a ritornare da essi per via retrograda alla funzione non variata, mantenendosi così inalterate tutte queste forme analitiche anco allora che in luogo di una quantità finita si pone una infinitesima per variazione e quindi tutto quello che ha luogo per una quantità finita, si avvera e puntualmente per la infinitesima, anzi con maggior vantaggio, perchè di quest'ultima, occorrendo, si possono ommettere le potenze superiori alla prima.

583. Quando si svolge in serie una data funzione si stabilisce una specie di equazione tra la funzione variata, e la serie esprimente lo sviluppamento di essa. Sopra questa equazione si sono fondati e Newton e Leibnitz; e l'ultimo più dichiaratamente. Anzi a tutela di questa equazione poneva in uso il principio del calcolo differenziale, perchè con questo si faceva strada a non ritenere che i soli primi termini, che compongono lo sviluppamento. Qui però conviene osservare che questa ommissione dei termini contenenti potenze elevate della infinitesima, serviva più presto alla semplificazione del calcolo che ad altro, atteso che nel carattere e proprietà del secondo termine dello sviluppamento c'è quanto occorre per riconoscervi il carattere e la proprietà della funzione, o per risalire da questa infinitesima alla funzione primitiva: nel terzo termine parimenti di ogni sviluppamento ove entra la infinitesima alla seconda potenza in esso pure vi sono i mezzi di risalire al secondo, e da questo alla stessa funzione. Solamente convien osservare che a mano a mano che si considerano i termini superiori, più e più difficili e più complicati e laboriosi riescono i tentativi di risalire alla funzione primitiva.

584. Quali che siano però i fenomeni, che presentar può

uno sviluppamento qualunque, tanto a grandezze tutte finite, quanto a grandezze infinitesime, sempre è vero, che non sono altra cosa, che espressioni del fondamentale concetto che noi ci formiamo della funzione combinata con quella variazione che a noi piace di attribuirle. Poichè tanto la maniera della derivazione, quanto l'ordine dei termini sono sempre eguali in ambidue i casi. Egli è però vero, che nelle serie dobbiamo aver riguardo anco alle particolari operazioni da noi impiegate per ottenerle. Queste operazioni, che sono gli unici mezzi che abbiamo in mano per esprimere in lingua algebrica o analitica tutti li nostri pensamenti, sono mezzi assai limitati e si riducono come sappiamo alle fondamentali operazioni note tanto in aritmetica che nell'algebra, ovvero al loro simultaneo concorso.

Nè si creda che dicendo noi che le formole del calcolo, altro non sono, che l'espressione delle nostre intellettuali funzioni, conformate alle operazioni suddette, per questo si venga ad ammettere che il calcolo o l'analisi siano di poca utilità, o riescano una magra suppellettile del nostro pensiero; perchè chi la pensasse a questo modo andrebbe assai lontano dal vero; imperciocchè fissato per mezzo del calcolo il nostro concetto mentale intorno alle particolarità e costitutivi delle funzioni, e fissato in tutti gli stati e modificazioni nelle quali ci piace di tradurla scomponendola, la nostra mente allora in certo modo riposa sopra la fedele espressione del calcolo, che tutte le rappresenta, e sopra del suo calcolo si pone ad eseguire quelle modificazioni od operazioni che all' animo nostro piace ancora di fare, quindi ha in mano un tipo da cui dedurne quelle legittime induzioni che ne derivano, e tutte queste sempre determinate e sensibilmente e continuamente espresse dal suo calcolo. Perciò egli può riposare sopra tutte queste sue operazioni, come sopra certo ed immancabile appoggio, per indi sempre

innanzi progredire a suo beneplacito. Onde sopra di queste basi, può innalzarsi sin dove gli piace.

Nella filosofia comune nella quale i nostri concetti mentali non hanno espressione sensibile e permanente, avviene che la mente con uno sforzo di memoria è costretta ritenerseli tutti presenti, e avuto riguardo ai limiti molto ristretti di questa nostra facoltà, si trova in grande difficoltà del ritenerli sino alle più lontane elaborate induzioni. Di fatti l'animo sendo costretto strascicarsi dietro la folla dei primitivi concetti e loro induzioni, si trova come da pesantissimo fardello oppresso e soprafatto, di modo, che non di rado gli accade, che dopo voli sublimi d'aquila generosa e forte, rimanga e si ritrovi alle volte risospinto indietro in cerca della luce e dello splendore delle primitive verità, che nella moltitudine delle induzioni viene perdendo di vista.

In questa parte della filosofia mancando il sussidio del calcolo, o meglio della permanente rappresentazione delle idee, e delle loro successive induzioni, manca un possentissimo appoggio sopra del quale fondandosi l'animo vale a spingersi sempre innanzi alle più remote illazioni senza stancarsi, e senza timor di soccombere sotto la folla delle sue idee.

586. Se amiamo convincerci in maniera sensibile di questa dottrina si propongono v. g. due fatti numerici, e uno sia la moltiplica dell'8 per 9; e l'altro fatto, sia la moltiplica di 888888 per 999999. La prima di queste operazioni è subito percepita ed eseguita dalla nostra mente la quale comprende appieno che il prodotto di 8 per 9 è appunto 72. La seconda che in sostanza non riducesi ad altro che alla ripetizione della prima, tuttavia per la moltitudine dei prodotti parziali da tenersi tutti presenti e da collocarsi tutti nelle rispettive colonne numeriche non vi può arrivare a meno di un quasi prodigioso sforzo memorativo, e rappre-

sentativo. Pure usando del calcolo aritmetico o dei simboli sensibili, anco un fanciullo eseguisce con tutta facilità questa moltiplica, e ci presenta il prodotto di 8 8 8 8 8 7 1 1 1 1 1 2; e nel far tutto questo non ha bisogno che del primo semplice concetto del 9 moltiplicato per 8.

Sarebbe a desiderarsi che quelli che fanno le meraviglie del progresso delle matematiche, e che lamentano i lenti passi della filosofia comune studiassero un poco più addentro i mezzi diversi di cui si servono i geometri, e pensassero ancora che la filosofia comune non si abbandona mai alle ipotesi, ed allora conosceranno quanta sia la diversità nella quale si ritrova il nostro identico animo, quando seguita le dottrine delle speculazioni geometriche, e quando invece rivolge li suoi studii alla filosofia comune e tenta progredire in essa.

587. In vista degli incalcolabili beneficii, che la mente ritrae dalla presenza fedele e sensibile de'suoi concetti, dovrebbero i filosofi procurare per quanto è loro possibile di far uso di formole rappresentative per esprimere i loro pensamenti, poichè su queste potrebbero sempre riposare per spingersi innanzi a loro piacere. Nè dovrebbe esser loro di ostacolo il pensamento, che cotali formole mal si prestino alla rappresentazione sensibile ed esatta dei loro pensamenti, poichè in allora anch'essi dovrebbero in questo imitare i geometri esprimendoli con quella approssimazione che si può maggiore, e di più chiamar in soccorso anco la ipotesi.

Nella Teorica e pratica del probabile avendo voluto determinare la legge degli aumenti di forza derivanti dalla prova testimoniale di molti individui, ho usato di esprimere con segni sensibili un valore di ipotetiche probabilità, e con questo mezzo mi è riuscito di rinvenire la legge dell'aumento della forza persuasiva delle prove testimoniali, e di spingere le speculazioni sin dove mi è piaciuto.

Determinate queste cose in via ipotetica, mi è riescito facile in ogni caso concreto il conoscere l'andamento della prova testimoniale e ciò in tutte quelle combinazioni di testimonii in cui possiamo incontrare; così che stabilita che sia una legge fissa ed invariabile, con questa in ogni caso concreto si può conoscere il risultamento o il valore della prova testimoniale che può presentare uno qualsivoglia numero di testimonii, ed aventi quel grado di veracità che si voglia.

588. Dalla maniera con la quale si esprimono alcuni geometri, apparirebbe che le serie non servissero ad altro che a dare la misura di una data funzione, misura espressa per parti discontinue o disuguali di essa; ma considerando invece sotto di un'altro e ben importante aspetto le serie, si conosce, che alcuna volta le serie sono bensì di tal natura da presentare la misura della grandezza, almeno per indefinita approssimazione, come vediamo nelle seguenti espressioni: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ ec. all'infinito, o nella più astratta maniera $n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} +$ ec. all'infinito; ma moltissime volte, e tra l'altre in quelle che concernono l'analisi superiore, il principale ufficio delle serie si è quello di manifestare meglio la natura e lo stato della funzione presentando più manifeste le proprietà della funzione, tanto nel suo valore quanto nella di lei forma e sue parti. E questo secondo ufficio delle serie è appunto quello che più d'ogni altro interessa l'analisi superiore nelle sue ricerche e speculazioni.

589. La matematica deve alle serie le più elevate sue speculazioni; deve alle serie il concetto dell' infinita divisibilità delle grandezze servendo esse più d'ogni altro mezzo

analitico a far palese la natura ed il potere del continuo; alle serie si deve gran parte della nozione sublime delle supreme parti generatrici della grandezza, non già perchè esse vi ci conducano veracemente, ma perchè vi ci traducono da vicino. Quindi è che le serie si sono sempre considerate come una preziosa e peregrina merce dell'ingegno umano.

Qui però osserviamo che chi ha dato quasi l'ultima mano alle serie e chi le ha portate molto vicine alla loro perfezione, deducendone con analitiche espressioni la verace dimostrazione, dando nuova dottrina dimostrativa dei coefficienti, fondandoli sopra le combinazioni che ne sono come la vita è stato Wronski. Più questo geometra superiore a molti, ha gettato nuove basi della scienza del calcolo con la sua dottrina dei *gradi*, ha ridotto tutte le formole delle serie e degli sviluppamenti sin ora conosciuti ad una sola legge suprema, universale.

Finalmente benchè abbiamo in varie occasioni manifestato parere opposto e diverso a quello di questo grandissimo geometra, pure non possiamo ricusargli un tributo sincero di alta estimazione, anzi di una specie di ammirazione. La forza che ha di calcolare la potenza dell'astrarre e generalizzare tutte le nozioni e le espressioni analitiche è unica, e qualche fiata superiore a tutti gli altri.

E quando la lingua oscura nella quale ha scritto, e le ambagi della filosofia cui ha servito, permetteranno che sia pienamente inteso, non v'ha dubbio che allora comunemente se ne apprezzerà tutto il suo merito, corrispondente alla grandissima potenza del suo vastissimo ingegno.

590. Ma lasciando di più avanti scrutare la natura delle serie e della derivazione dei termini non che dei loro rapporti, solamente ci limiteremo a considerare che il potere delle serie, nè verun altro artificio di calcolo, possa ren-

dere una qualunque quantità geometrica incomparabilmente maggiore o minore di un'altra. E quando gli ultimi termini delle serie, tanto se questi sono crescenti, quanto se sono decrescenti, si sono voluti considerare pervenuti a tanto di grandezza o di piccolezza da non esser più comparabili a delle grandezze finite o agli stessi loro termini finiti precedenti, si sono sempre ingannati ed altrettanto non hanno potuto asserire se non in via di pura ipotesi. Qualsivoglia serie esprimente sviluppamento di funzione finita non può avere i suoi termini spinti fuori dell'ordine finito, o al di là di un limite di comparazione finita; quindi niuno può presentare un termine ultimo che sia infinitamente maggiore o minore di un altro finito. Ciò unicamente può avverarsi allorquando noi diamo alla funzione finita una variazione infinitesima o infinita; il che significa che questa relazione di infinita maggioranza o minoranza, non deriva dalla natura delle serie, ma bensì dalla pura nostra ipotesi.

591. In tutte le maniere di analisi derivata, non si può rinvenire che la filiazione o derivazione dei termini; l'andamento dei rapporti o delle loro ragioni, appartiene tutto per intiero alli valori che a noi piace di assegnare alla variabile della funzione ed alla variazione di essa.

Nella moltitudine delle serie che con tanta profusione si trovano esposte in moltissime opere analitiche, non ravvisiamo in tutte la immediata misura delle grandezze reali o supposte che contengono; così la serie 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6. ec. all'infinito, può forse esser considerata come la misura dell'infinito? Noi non poniamo a questa serie alcun fine o limite, tuttavia procedendo sempre ne' suoi termini con valori appien finiti, e gli uni dagli altri diversi per una sola unità, come mai tanti termini o somme crescenti e finite, tanto separate, quanto riunite potranno adequare l'infinito? Dove è un filosofo, che senza ingannarsi apertamente possa abban-

donarsi a sì fatto pensamento di considerare cioè 1 . 2 . 3. 4 . 5 . ec. $= \infty$?

592. Da ciò si conosce che le serie crescenti nel valor dei loro termini solo erroneamente posson esser considerate misura dell'infinito, come le decrescenti nel valor dei loro termini solo erroneamente posson essere considerate conducenti allo zero. Tanto più poi si manifesta questa incapacità delle serie quando si voglia riflettere, che siccome le serie esprimono per parti le funzioni che tendono a misurare od a rappresentare, così ripugna al concetto umano, che l'infinito possa esser rappresentato per mezzo di parti e brani finiti, come ripugna che da essi possa venire prodotto o ingenerato l'infinito.

L' infinito benchè non appieno comprensibile si presenta però con abbastanza di verità di un ordine affatto diverso dal finito, e dall' ultimo al primo non appare via veruna, per cui vi sia trapasso all'altro.

La legge, qualunque poi sia, che governa le serie che non hanno fine, e che per questo si dicono procedenti all'infinito, è legge per sè stessa chiara e facile ad intendersi, ma appunto è chiara per noi ed è facile, perchè sempre lascia una parte del finito, sopra del quale fonda il suo potere di procedere innanzi. Del resto questa legge non inchiude in sè stessa lo infinito, nè mai può terminare allo zero, appunto perchè si appoggia ad una divisibilità senza fine.

Allorquando alcuni si danno a credere, che con questa legge, noi possiamo sorpassare ogni ordine finito, allora si illudono apertamente, perchè altrettanto è estraneo affatto ad ogni legge che governa queste serie. E se ad alcuno paresse che con sì fatta legge si trapassasse nell'ordine infinito o allo stato zero della grandezza, sappia bene che ciò non è in forza della legge alla quale anzi ripugna, ma è

in causa di pura nostra ipotesi, e ipotesi non appoggiata a veruna filosofica verità.

593. Noi abbiamo già dimostrato questa verità, quando abbiam provato, che nel progredire avanti coi termini di qualsivoglia serie, non si fa nemmeno il più piccol guadagno per arrivare all'infinito; ed in vero da uno all'altro termine, sia nell'aumento, sia nella diminuzione, non esiste che una differenza finita; ora, o ci conviene dire, che molti finiti possan formare un infinito, il che ripugna nei termini stessi, o ci conviene lasciare tra le cose impossibili a conseguirsi questo conseguimento dell'infinito per mezzo di parti finite. La stessa cosa abbiam pure dimostrata per riguardo al giungere allo zero, per mezzo delle diminuzioni, perchè ogni grandezza per piccola che sia è lontana tanto dallo zero, quanto la più grande escogitabile.

594. Più le serie che hanno origine e vita dalla sottrazione, che è l'inverso della somma, mirano a manifestare il fondo inesauribile del continuo, e quindi mirano a dimostrare l'impossibilità di pervenire a quel supremo residuo, che per esser ammesso come non divisibile, ripugna per questo a poter esser considerato come prodotto della diminuzione. Nelle serie però derivanti dalla sottrazione, le parti ed i brani che si prendono, non sono presi senza legge, che anzi si ritengono sempre assoggettati ad una legge di discontinuità fissa ed invariabile. Tale è la legge di Euclide più volte mentovata, nella quale sempre e poi sempre rimane della grandezza finita, quanto basta ad avverare il di lui asserto: *e così si faccia sempre.*

595. Perchè dunque una serie riesce senza fine, questo non deriva nè dipende dalle parti prese, o dalla operazione impiegata da noi a prender queste parti, ma dipende unicamente dalla legge, che noi scegliamo nel prendere le parti istesse; e siccome appare, che le parti per numerose che

siano, tutte col tempo, e con la continuazione possono esser prese, così a noi non resta altra via di poter conoscere che una serie riesca senza fine, se non nel prender le parti sempre in modo, che rimanga sempre e poi sempre qualche entità finita, sopra la quale sempre appoggiare il nostro procedimento di diminuzione.

E questa larghezza di posizione diviene per noi appunto inesauribile perchè è precisamente quella che ci somministra la proprietà del continuo.

596. Lo stesso vediamo avvenire a quelli sviluppamenti senza fine, che derivano dagli esponenti radicali e frazionarii; questi presentano delle funzioni, che con le note operazioni, che sono in nostra mano, non possiamo mai adequatamente esprimere, quindi ci inducono in un processo indefinito interminabile, e che perciò appelliamo infinito.

597. Non sarà disutile parimenti il notare, che molti geometri sogliono esprimere lo sviluppamento del binomio con protrazione indefinita, e si permettono questa libertà appoggiati in sul pensamento dell'esponente indeterminato che appunto essi sogliono esprimere con una n assunta in modo generale.

A dire la verità siccome la natura indeterminata dell'esponente pare possa comprendere anco ogni valor frazionario o radicale ec.; perciò sotto questo aspetto si può ritenere, che ad esso lui convenir possa anco uno sviluppamento indefinito. Per altra parte, sendo certo, che tale sviluppamento diviene tutto proprio dell'esponente radicale, frazionario ec., sotto questo aspetto appare ci sia larghezza nel dare all'indeterminata forma della n una proprietà tutta propria ed esclusiva di questa sorta particolare di valori radicali ec. Questo modo però di procedere tenuto dai geometri presenta il vantaggio di darci un tipo generale di questi sviluppamenti utilissimo nella ricerca dei coefficienti,

e della relazione dei termini, e della loro successiva derivazione.

599. Quando però vogliam render determinata una serie di forma indeterminata, non possiamo più mantenerle la sua forma generale, perchè secondo i diversi valori, che ci piaccia sostituire in essa per renderla determinata, allora si altera per sì fatto modo la forma generale di essa, che spesso la vediamo spinta dichiaratamente all' infinito, spesso la si vede troncata o ristretta entro prefiniti limiti. Dalle quali particolarità si viene a comprendere, che la natura delle serie, non sempre può sostenere la primitiva forma generale indeterminata. Non riporteremo in questo luogo tutte le serie adombrate e comprese sotto queste forme indeterminate, e perchè si trovano in tutti i libri, e perchè la materiale loro esposizione non darebbe miglior peso alle ragioni che riportiamo.

600. Risalendo adunque alla più intima origine delle serie si conosce, che tanto la loro possibilità, quanto la loro forma, estensione e significazione, tutto dipende dal concetto della nostra mente, e dai mezzi che essa adopera nello svolgere le funzioni o le grandezze in serie. Sopra questi principii si deve fondare tutta la filosofia dei metodi conosciuti ed impiegati a dar vita alle serie, e la loro rassomiglianza, ed alcune ne hanno sempre molta, tutta procede dalla identità e rassomiglianza delle operazioni da noi impiegate nel formarle.

601. Acciò i termini di qualsivoglia serie possan prestarsi ad una indefinita protrazione, dobbiamo appoggiarsi alla proprietà inesauribile del continuo, ed in modo che tale proprietà si consideri sempre tutta intiera ed intatta anco dopo qualsivoglia numero di termini che siansi presi. Noi abbiam veduto, che qualunque sia la differenza, o la ragione che i termini abbiano o possano avere quando vengano tra di loro

comparati, sempre questa differenza o ragione, grande o piccola che sia, si presta anch'essa ad esser sviluppata in serie senza fine; e quella dei termini istessi di quest'ultima in serie all'infinito, e così sempre senza fine. Egli è su di queste considerazioni, che ci si rende manifesta per quanto lo può la infinità del continuo. Di qui viene, che ogni legge, che governa qualunque serie precedente all'infinito, essa anzi che tendere a consumare il potere del continuo, come farebbe se potesse aver fine la serie, tende diciamo a manifestarci invece solamente, per quanto può, questa invariabile proprietà del continuo, e la sua inesauribile infinità.

602. Ma è tempo oramai di riassumere e ravvicinare tutte le dottrine sin'ora esposte, e di esaminarle tutte comparativamente, e tutto questo a fine di chiarire e renderci famigliare più che possiamo la filosofia delle matematiche.

Ognun di noi quando si mette allo studio delle matematiche ne legge e medita con ansietà i principii, e procura di entrar presto al possesso delle principali e fondamentali dimostrazioni costituenti il grandioso edificio della scienza. E pervenuti, che siamo con singolar soddisfacimento dell'animo a conoscere la estesa mole della matematica, ritorniamo volentieri, e per una specie di sentito bisogno sui nostri primi passi, per meglio esaminarli, e per più e più approfondire anco la natura dei principii primi, onde così con quella piena evidenza, che si può maggiore, comprenderne le molteplici e sottili, mirabili ed ingegnose applicazioni, le quali ci accompagnano in tutta la penosa e lunga carriera di questa estesissima scienza. E questo nuovo studio è principalmente diretto a comprenderne bene ed a fondo tutta la filosofia che regge e governa questa scienza esatta.

Gli elementi della geometria, non che gli assiomi ed i principii primi sopra dei quali essa si aggira, da prima ammessi senza altro minuto esame, la seconda volta ven-

gono scandagliati e sottoposti a rigoroso profondo scrutinio, e portati ed esaminati questi principii sul campo della critica rigorosa divengono oggetti di sottili e profonde meditazioni, dirette a tutta discoprirne la loro indole, natura, ed evidenza.

603. Egli è con sì fatto esame che ci accorgiamo v. g. che quando Euclide parla e tratta delle linee rette si appoggia in massima a principii di piena evidenza, ed all'invece quando imprende ad esporre e trattare della misura e proprietà delle curve circolari (unica linea curva di proposito da lui presa in considerazione) vi adopera altri principii, che al paragon dei primi non sono e non riescono appieno evidenti; quindi anco i ragionamenti sopra di questi ultimi appoggiati non si presentano di quella evidenza della quale vanno sempre forniti i ragionamenti col mezzo dei quali si compiono le dimostrazioni risguardanti le linee rette, le superficie piane, i solidi regolari e di figure piane.

604. Ma incominciamo senz'altra introduzione l'esame delle diverse opinioni dei geometri concernenti la metafisica o la filosofia delle matematiche, e questo esame sia in modo succinto e confermativo di quanto sin' ora siam venuti esponendo.

Non parlando dunque della geometria rettilinea diremo, che la più antica opinione è quella che ammette l'esistenza della *grandezza minor di ogni data*, ed un' altra ben diversa ma relativa alla prima è che questa *minor di ogni data sia eguale a zero.*

Le difficoltà nelle quali incontra sì fatta opinione sono le seguenti: primo la impossibilità di ottenere coi mezzi proposti dall'antica geometria questo genere di quantità, pretendendo presentare grandezze veracemente minori di tutte le assegnate od assegnabili; e questa impossibilità, risguarda tanto le serie effettive adoperate dall'antica geometria, quanto tutte le relative operazioni intellettuali impiegate in sussidio ed in protrazione delle serie medesime.

Volendo adunque ammettere la esistenza della grandezza minor di ogni data si è dovuto ammetterla per pura ipotesi o supposizione, giacchè non esisteva verun mezzo per ottenerla. E questa ipotetica ammissione è tanto lontana da tutto ciò che valgono a conseguire le diminuzioni contenute e contemplate nelle loro serie, che anzi, ammessa che sia la minor d'ogni data, introduce nelle serie una qualità che riesce pienamente opposta al loro più essenziale concetto, vale a dire, vi introduce l'assurdità di supporre terminata o finita una serie che va all'infinito, o meglio che è assolutamente interminabile.

605. E qui fermiamo per un momento il nostro pensiero a considerare un'equivoco di alcuni geometri, i quali mirano a far credere, che per serie procedenti all'infinito si debbano intender quelle che veracemente contengono, o contener possano un numero di termini infinito, poichè essi così facendo non avvertono che un tale loro pensamento contiene un'assurdità; assurdità che fu sempre confessata e ritenuta da tutti i più grandi geometri; assurdità che si presenta anco spontanea, perchè se il numero dei termini potesse finire, la serie anderebbe e non anderebbe all'infinito, o ciò che è la stessa cosa, l'interminabile sarebbe terminato.

Non potendo dunque pervenire alla fine di queste serie nè in via effettiva nè speculativa, si pensò che a questo manco di potere venisse in soccorso la legge che governa la serie geometrica delle diminuzioni euclidee, e degli altri geometri antichi. Ma la legge che governa queste serie, come poc'anzi si è dimostrato, non spinge innanzi la serie nè l'animo al confine dell'interminabile, ma solamente prescrive quale esser debba la reciproca ragione di tutti i termini della serie che mai non possono esistere. E sebbene con questa costanza di ragione che esiste inalterabile fra tutti i termini,

apparir possa che la legge per questo motivo abbracci tutta la loro infinità, tuttavia tutto questo si risolve in pura illusione.

Imperciocchè qui trattasi della effettiva vera esistenza dei termini e non della identità della loro ragione geometrica: quest' ultima può bensì assegnar, anzi unicamente sempre assegna la ragione dei termini, ma non è dessa che effettivamente li produca, nè che loro dia vita ed esistenza, ma solamente esige che i termini esistendo, o potendo esser possibili, debbano esistere con la costante prescritta ragione tra di loro. E siccome il fondo del continuo è sempre senza fine, perciò niuna legge può mai comprenderlo, ne governarlo, e niuna legge, tutto abbracciarlo effettivamente.

606. Poi si osservi che, o la grandezza minor di ogni data si ritiene esser dell'ordine finito delle grandezze; o si considera di un ordine di grandezze poste fuori dell'ordine finito.

Il dilemma abbraccia tutte le possibili eventualità, e perciò è irrecusabile. Pensando dunque che in origine la grandezza sottoposta a diminuzione era finita, e pensando che le sue diminuzioni procedono a passi finiti, e questo con legge immutabile (di lasciar sempre qualche particella finita sulla quale poter sempre procedere innanzi), perciò appare aperta cosa che tali diminuzioni non possono portarla allo stato di minor di ogni assegnata, ogni qualvolta questo stato si voglia considerare fuori dell'ordine finito; e perchè appunto la legge si aggira e s'intrattiene per sua natura solamente nell' ordine delle grandezze finite, convien dunque ammettere e per pura ipotesi questa minor di ogni data, che non sia più divisibile, e perciò non più grandezza finita. Parimenti, come nel concetto di esser tanto piccola, che non possa più esser divisa, non è inchiusa per verun conto la sua nullità, perciò è chiara cosa che vi vuole un'altra ipo-

tesi, per dire che la minor di ogni assegnabile si possa considerare eguale a zero.

L'antica geometria, che ha ammesse queste due ipotesi, cioè dell'esistenza della minor di ogni data, e della sua relativa qualità di riuscire indivisibile ed eguale allo zero, non si è abbastanza spiegata sopra questo rilevantissimo punto della filosofia. Quello però che fa agli antichi onore, si è l'avere circa quest'ultima posizione dell'inassegnabile eguale allo zero, di averla cioè considerata non come zero verace assoluto, ma come un zero solo relativamente alla grandezza finita, avendo posto il principio antico nel seguente modo: = Due grandezze le quali non differiscono tra di loro se non di una quantità minor di ogni data, queste sono eguali tra di loro =. Principio che espresso in forma analitica era $a + j = a$, indicando la j questa minor di ogni data.

607. Ma se con questo modo di considerare la j si evitava quella sconvenienza di idee nella quale c' incontriamo quando si voglia fare $j = o$ assoluto; per altra parte così facendo si ammetteva un altro concetto al tutto enigmatico ed incomprensibile, quello cioè di ritenere la j cacciata fuori dell'ordine finito, e fuori d'ogni significazione, e ciò in forza di finite indefinite diminuzioni. Il che quanto riesca inconcepibile ognun l'intende.

608. Questa ipotesi, una volta che sia ammessa, parrebbe che il principio antico in via ipotetica sia ammissibile ed aperto, tuttavia anco in questo suo stato ipotetico inchiude molte difficoltà; di fatti considerato che sia un poco alla buona, si presenta assai conforme a verità, ma questo aspetto di verità ridiviene tosto illusorio quando si voglia considerare la minor di ogni data come riposta in fondo o in fine alle indefinite diminuzioni. Per egual motivo solo pigliando le cose molto alla buona si può l'animo indurre ad ammettere o riconoscere come zero l'ipotetico valore della minor

di ogni data; perchè ripugna alla proprietà del continuo che siasi ridotto a questo stato; poi perchè riesce anco difficile il comprendere come un valor puramente ipotetico possa esser ritenuto come appartenente alla grandezza reale.

609. Questa parte adunque dell'antica geometria che dipende da questo ipotetico principio, non può certamente esser considerata come parte pienamente conforme al verace rigor di ragione; e tutte le dimostrazioni sopra di tale principio fondate, per speciose ed ingegnose che siano, non posson aspirare ad una verace perfezione rigorosa, se non in via puramente ipotetica.

610. Questo punto di dottrina voleva essere diffusamente chiarito, onde far così palese l'intrinseco valore del metodo antico per ciò che risguarda la dottrina delle dimostrazioni appoggiate sopra questo principio medesimo.

Imperciocchè ipotetica è l'esistenza della minor di ogni data, ipotetico il principio per cui essa si ritiene indivisibile non più menomabile, ipotetico l'altro di considerarla eguale allo zero in riguardo al finito, quindi ipotetiche e pienamente ipotetiche tutte le antiche dimostrazioni che pongon piede su queste ipotesi.

Questo modo tutto ipotetico si appalesa anco più aperto e chiaro quando noi lo vediamo applicato alle concrete dimostrazioni risguardanti proprietà reali e non ipotetiche di alcune curve, quali sono le sezioni coniche, le spirali, ed altre; imperciocchè in allora si riducono le dimostrazioni a caso pratico di proprietà reali concrete, ma sono dedotte da principii puramente ipotetici, ciò che in buona logica non corre; atteso che per render vera la dimostrazione di qualche proprietà concreta, conviene che prima e per verace necessità siano resi concreti pratici e reali i principii sopra dei quali essa si fonda. Ora chi tiene in mano la reale minor di ogni data, e chi prova esser essa eguale a zero e ciò con rigore?

611. Si può dunque senza veruna temenza asserire, che il metodo degli antichi geometri appoggiato alle minori di tutte le date grandezze non è metodo di rigore, o pienamente concludente, e quindi che la universale opinione dei geometri, la quale insino ad ora si è voluta ostinare e incaparbire a considerarlo metodo rigoroso è assolutamente mal fondata; e perciò rimane dimostrato compiutamente che il far buon viso a questo metodo in vista del suo rigore è lo stesso che dare a divedere di disconoscerlo persino nell'intima sua natura.

E da poichè trattasi di una massima importantissima nella filosofia delle matematiche, perchè sia da questa massima rimossa ogni equivocazione, lo ripetiamo, che queste considerazioni noi le intendiamo riferibili a quella sola j, detta minor di ogni data, specialmente quando la si considera come l'effetto delle indefinite o infinite diminuzioni; e come pure intendiamo dell'ipotesi della j = o, quando si considera a tale ridotta per mezzo di speculazioni dirette o indirette.

612. Alcuni sostenitori del metodo antico soglion dire, che questo vecchio metodo conduce a verità. Ma si osserva, che questo non è provato per verun conto concludentemente; imperciocchè ove sono questi rigorosi risultamenti? Forse nelle dimostrazioni relative alla misura della curva circolare o di altre curve ove si fa uso di questi principii? Chi mai ardirebbe dire altrettanto? Non vediamo noi che nelle stesse linee che Euclide suppone da prima disuguali, e che poscia tenta ridurle all'eguaglianza colla diminuzione della più grande, intendendo morderne tutta la di lei maggioranza, egli non perviene che ad una semplice indefinita approssimazione, senza speranza alcuna di pervenire alla rigorosa eguaglianza? Bramerei vedere qualcuno di questi lodatori dell' antico metodo, che mi presentasse

qualcuna di queste rigorose dimostrazioni? Protesteranno forse, che le antiche dimostrazioni si debbano considerare come rigorose perchè nessuno sino ad ora le ha contradette o smentite? Ma risponderemo che in buona logica questa non è prova concludente; poichè sappiamo, che quando si prova direttamente come replicatamente abbiam fatto in questa filosofia, ed anco con soverchia insistenza, quando si prova direttamente che non posson esser rigorose, e che anco mancano al rigor di logica, in allora a nulla giova il silenzio sin ora conservato su la loro bontà, ed a nulla più giova assolutamente questa specie di assenso diretto o indiretto prestato alla loro bontà.

613. Si rifletta ancora, che parlando noi dell'antica geometria non intendiamo negare ad essa il rigore ed il sommo rigore in tutte quelle parti che risguardano le linee rette, le superficie piane, ed i solidi regolari conterminati da superficie piane; invece intendiamo parlare di quelle parti dell'antica geometria le quali risguardano le grandezze curve od i solidi curvilinei, e che hanno bisogno di fondarsi sopra li poc'anzi ricordati principii ed ipotesi.

Euclide nel libro decimo si sforza di provare, che i circoli stanno tra loro nella ragione del quadrato dei loro diametri. Ma noi vediamo l'insigne geometra postosi nel più grande imbarazzo in cui si possa ritrovare un esatto ragionatore quando si accinge a questa sorta di dimostrazioni. In fatti come provare questa proprietà della curva circolare in comparazione di una retta che la divide per giusta metà qual'è il diametro? Prima egli aveva dimostrato che le periferie rettilinee dei poligoni erano tra di loro nella ragione o nel rapporto dei quadrati dei loro diametri, e questa sua dimostrazione era luminosa e chiara ed evidente, ma era tutta proposizione esprimente rapporti che avevano le rette tra di loro. Volendo applicare simile dimostrazione alle linee

circolari, che fà, questo gran geometra? Vedendosi chiusa ogni via somministrata dalla natura della curva, dalla quale intendeva trattare, si rivolge al partito di considerare i circoli quali poligoni di indefiniti lati, e siccome nei poligoni questo rapporto era dimostrato, si permette di supporre che i circoli (e questo contro ogni diritto di ragione, anzi contro la natura della curva) siano dei poligoni di indefiniti o infiniti lati, e dietro questa supposizione, che distrugge ed annichila da capo a fondo la curva circolare, ne deduce che i circoli stanno tra di loro come i quadrati dei loro diametri.

Ma uno che conosca anco solo gli elementi della filosofia, non saprà mai indursi a menar buona ad Euclide questa ultima induzione, anzi proverà una verace pena e dispiacenza nel vedere tanto uomo ridotto in tanto imbarazzo di doversi appoggiare a sì aperta sconvenienza di idee.

E siccome si tratta di un punto di dottrina importante, circa la quale non devono esistere equivoci, si osserva che dicendo noi che la dimostrazione di Euclide è inconcludente, non intendiamo asserire che il rapporto dei circoli tra di loro non possa forse essere precisamente corrispondente od eguale a quello del quadrato dei loro diametri; poichè non possiamo affermare cosa alcuna risguardante una proprietà che ci è ignota; ma intanto è però vero, che Euclide si è posto fuori della strada, che poteva condurlo a discoprire questa proprietà dei circoli, gettandosi in braccio ai poligoni, e distruggendo i circoli per sostituirvi poligoni, il che è lo stesso, che trasmutare la curva in retta, o sotto altro aspetto è lo stesso che commettere ragionando un vero circolo vizioso.

E considerando bene addentro il ragionamento euclideo, pare che non si possa di leggeri riconoscerlo ne anco per ragionamento di verace approssimazione, per lo scambio sconvenevole delle curve nelle rette. Tuttavia non si nega però,

che i poligoni col crescere nei loro lati non si facciano più e più vicini alla curva circolare. In quanto poi concerne quella specie di compimento, o meglio di puntello che Euclide tenta sottoporre alla sua crollante dimostrazione, vogliam dire il suo argomento dedotto dall' assurdo, e diretto a sostenere questa sua dimostrazione, non occorre di più altro esporne la sua insufficienza, perciò che questa già prima d'ora fu abbastanza appalesata.

614. Si deve ritenere la stessa cosa, e lo stesso modo di pensare circa al metodo dei limiti, e del suo affine delle evanescenti, non che delle prime ed ultime ragioni; poichè il limite realmente non si attinge ma [si suppone, l'evanescenza è supposta e non avverata, e così accade delle prime ed ultime ragioni. In fatti Archimede medesimo inventore di tutti questi metodi, quando si colloca in suo pensiero in su la via dei limiti o delle esaustioni per procacciarsi una specie di diritto di riferire le proprietà appartenenti alle linee rette, alle proprietà attinenti alle curve, egli si inganna; imperciocchè egli si appiglia al mezzo di inscrivere e circonscrivere dei poligoni alle curve, che piglia in considerazione, e delle quali tenta conoscerne le loro proprietà; ma per quanto i lati de'suoi poligoni possano essere vicini alla curva, è egli per questo possibile che le rette si confondano con la curva? Per quanto elaborato ed ingegnoso possa essere questo suo mezzo di accostarsi alla cognizione della curva, sarà sempre certo, che incontra in una assoluta impossibilità di esser rigoroso, fino a che la curva sarà di natura diversa dalla retta.

615. Noi sciegliamo questi notorii ragionamenti geometrici dei due sommi geometri dell'antichità, non già perchè difettiamo di moltissimi altri, ma bensì per evitare il tedio al lettore di portare la sua attenzione sopra complicate e laboriose altre dimostrazioni, giacchè tutte sempre alla fin fine

si appoggiano sopra i principii medesimi in questi ragionamenti adoperati, ed hanno tutte in ultimo risultamento il medesimo difetto.

616. Poi venendo a più stretto discorso intorno alle dottrine euclidee ed archimedee, diremo, che siccome per pura ipotesi si suppone nelle prime che i circoli siano poligoni di infiniti lati, e nelle seconde, che le corde appropinquantesi agli archi possano con essi confondersi rigorosamente, così sopra sola pura ipotesi sono fondate ed appoggiate tutte queste dimostrazioni. Per la qual cosa di leggeri si comprende quanto sempre ci troviamo lontani dal verace rigor filosofico, mentre non abbiamo nè anco se non in via ipotetica la stessa verace effettiva approssimazione. Diciamo la verace effettiva approssimazione atteso, che questa per essere di sua natura spinta ad un grado massimo o sommo presuppone sempre la identità di natura delle grandezze approssimantesi la quale manca onninamente nel caso nostro, trattandosi di retta e curva e di ipotetico col reale.

617. Se insistiamo sull'esame delle antiche dottrine geometriche motivo si è, che esse sono come il cardine delle più elevate speculazioni della scienza, e non già perchè crediamo necessaria tanta insistenza, ma bensì perchè così veniamo a dimostrare con pieno ragionamento erronea la universale opinione, la quale ha sempre ritenuto e ritiene tuttora, che in questi principii, e nelle dimostrazioni sopra di essi fondate vi fosse piena rigorosa esattezza ed evidenza; e lo facciano specialmente anco per rendere avvertiti molti geometri moderni, quanto male si oppongano al rigore di ragione quando ricorrono ai principii degli antichi, allorchè vogliono od intendono dimostrare molte verità dell'analisi moderna, e specialmente di quelle attinenti all'analisi sublime.

618. Aggiungeremo per ultimo una preghiera ai geometri invitandoli a mettersi innanzi al loro pensiero la minor di

ogni data, la dottrina dei limiti, e quella affine delle esaustioni e delle prime ed ultime ragioni, e comparare con animo calmo e scevro da ogni prevenzione queste ideali loro nozioni, in confronto della posizione o supposizione della infinitesima quantità, e poi osservare se nelle antiche opinioni esista una maggiore evidenza che nell'ultima.

619. Considerando però la minor di ogni data come incapace di turbare lo stato finito delle grandezze, questo è la stessa cosa, che considerare la j o la minor di ogni data come cacciata fuori dell'ordine finito, e perciò privata di ogni sostanziale proprietà del finito. Ciò per altro che con questa maniera di supposizione qui si ammette ben s' intende, che con niun mezzo nè di dottrina nè di pratica si può conseguire. Per la qual cosa solamente in via ipotetica si ammetta che $a + j = a$, ovvero $a + o = a$; ma in allora ove sono le dimostrazioni concrete che sopra questo antico principio si possan fondare? Ognuno comprende e senza la menoma fatica, che ogni pratica concludente dimostrazione eretta sopra questo antico principio esige necessariamente, che concretamente sia dimostrata la $j = o$, il che da niuno si può fare, nè si fà.

620. Qui dobbiamo far cenno di una difficoltà che naturalmente ci viene quasi suggerita dalle dottrine che veniamo esponendo; e la difficoltà è questa.

Che anco nell'analisi sublime la differenziale o la infinitesima è supposta, come è supposta la minor di ogni data; se dunque per la natura di quest' ultima non si può giungere a veruna rigorosa pratica dimostrazione, dunque anco per la infinitamente piccola quantità supposta non si potrà giungere a veruna concreta reale dimostrazione.

Per comprendere come questa difficoltà non sia che apparente, basta riflettere, che la minor di ogni data, l'evanescente ecc. hanno bensì con la infinitesima comune la qua-

lità di riuscire quantità ideali e presso che nulle poste che vengono a petto della grandezza finita, tuttavia sappiamo, che nel sistema antico della minor di ogni data si mirava a pervenire all'eguaglianza delle grandezze differenti in origine e ciò coll'impicciolire la primitiva differenza sino a ridurla allo stato di insignificanza, col metodo dei limiti sino all' esaurimento della differenza; così con le esaustioni ecc. Laddove nell' infinitesima si ha per iscopo di deciferare, e di esporre in maggior luce le proprietà della grandezza o della funzione alla quale la differenziale o infinitesima viene indossata quale sua variazione. Se dunque in una cosa convengono, nel fine e nell'uso sono al tutto diverse, e perciò siccome nel sistema antico si appoggiano le dimostrazioni reali all'esistenza ipotetica della minor di ogni data, ed alle sue qualità, perciò le dimostrazioni riescono ipotetiche; nella differenziale le dimostrazioni si appropriano e si desumono dalle proprietà reali delle funzioni, proprietà a noi manifestate dalla infinitesima o dichiaratamente meglio manifestate per mezzo di essa differenziale; tutto adunque è diverso nella nuova analisi, e le difficoltà nelle quali incontra la vecchia dottrina, la nuova pienamente le evita.

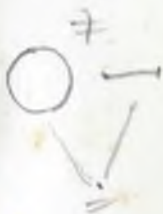
Queste dottrine si appaleseranno ancor più manifeste quando daremo in seguito un cenno sulla natura ed uso del calcolo differenziale.

621. Restaci ora una breve riflessione e questa in aggiunta al già detto, e la riflessione è diretta ai giovani geometri per far loro presente, come un principio che in via di fatto è principio di pura e magra approssimazione abbia ottenuto ed ottenga ancora l'approvazione di molti e l'abbia ottenuta a tal segno da credere che questa approssimazione possa esser spinta insino alla rigorosa identità. Per spiegare in qualche modo questo intellettuale fenomeno, crediamo che basti il considerare, che una diminuzione che si annuncia come indefinita

o infinita, inchiude anco un fondo incomprensibile, che ci ricopre tutta la infinita sua estensione. Quindi l'animo nostro che si pone su la via indefinita di queste diminuzioni, quando è giunto al limite rispondente al suo potere comprensivo per necessità perde di vista quel tenue residuo che ancora rimane e che serve di base per procedere innanzi sino all'infinito. Allora per lui sfuma o si dilegua questo tenuissimo resìduo, e perchè più non lo ravvisa quale cosa capace a turbare l'eguaglianza, si pone incautamente ad ammetterla e predicarla in onta di questo residuo ed a ritenerla come avverata.

Chi desiderasse più ampie filosofiche dottrine relative a siffatte umane illusioni, legga la *Teorica* e *Pratica* del probabile, e vi troverà argomenti e ragioni a dovizia per rendersene pienamente informati.

622. Il metodo di esaustione si appoggia al principio della minor di ogni data grandezza. L'Ab. de la Chapelle nella *Enciclopedia Metodica* parlando di questo metodo scrive quanto segue: = Il metodo di esaustione è una maniera di provare la eguaglianza di due grandezze, in facendo vedere, che la loro differenza è più piccola di ogni grandezza assegnabile, ed impiegando per dimostrazione di questa eguaglianza la riduzione all'assurdo.

Tuttavia non è per la riduzione all'assurdo, che si è dato a questo metodo il nome di esaustione, ma perchè se ne servono per dimostrare un rapporto di eguaglianza tra due grandezze, quando non si può avere di questa eguaglianza dimostrazione diretta; imperciocchè allora si limitano a far vedere, che supponendo l'una più grande o più piccola dell'altra si incontra in una assurdità aperta. Per arrivarvi si permette a quelli, che negano l'eguaglianza di determinare o assegnare la differenza a lor beneplacito, e si dimostra a questi, che la differenza, che esiste tra queste

due grandezze (nell'ipotesi che tal differenza esista) sarebbe più piccola della differenza assegnata; e siccome questa differenza ha potuto esser supposta di una tale piccolezza, la quale esaurisca per così dire ogni grandezza assegnabile; perciò ne viene di necessità di convenire che la differenza tra queste due grandezze svanisca veramente. Ora ella è questa piccolezza inesprimibile, inassegnabile, e che esaurisce ogni grandezza qualunque che ha fatto apporre al metodo di cui si tratta la denominazione di *metodo di esaustione*, dalla voce latina *exhaustio*.

Il metodo di esaustione era in grande uso appo gli antichi geometri, quali sono fra gli altri Euclide ed Archimede. Esso è fondato sopra questo teorema del lib. 10 di Euclide; = che due quantità sono eguali quando la loro differenza sia più piccola di ogni grandezza assegnabile; imperciocchè se fossero ineguali la loro differenza potrebbe essere assegnata, ciò che è contrario all'ipotesi ammessa =.

623. Questo metodo essendo appoggiato al principio sin ora preso in considerazione, non v' ha dubbio, che quanto si è detto di questo principio non sia interamente applicabile al metodo di esaustione, e perciò che questo metodo ammesso anco che sia in via ipotetica, non può in massima riuscire metodo di rigore in veruna concreta reale dimostrazione; e per concreta reale dimostrazione intendiamo sia indicata ogni geometrica ed analitica dimostrazione. Siccome però si appoggia come è detto al principio euclideo od almeno usato da Euclide, e questo non essendo atto che ad una sola approssimazione, per la stessa ragione conchiuder possiamo senza timor di inganno che il metodo di esaustione, non sia più di quello della minor di ogni data vicino al rigor di ragione.

624. Secondo la esposizione che ci presenta di questo metodo il sullodato De la Chapelle potrebbe apparir rigoroso,

assunto che sia come segue, cioè che il ricusare le dimostrazioni o le induzioni che da esso si ricavano conduca a verace assurdità, ma rimarchiamo che sotto questo punto di veduta intellettuale quando i geometri ricorrono all'assurdo perdono di vista il rigor geometrico; imperciocchè essi si limitano a provare, che nell'ipotesi di una data ed assegnata grandezza capace a turbare la eguaglianza di due quantità di questa se ne potrebbe assegnare una minore, ma la inassegnabile non ne ammette veruna per ipotesi, dunque questa non può essere la inassegnabile; dunque è una ipotesi contraria alle premesse.

La riduzione all' assurdo implica dunque che se noi siamo pervenuti alla inassegnabile, non dobbiamo nè possiamo ritenere questa come ancor menomabile, o tale da poterne assegnare una minore, poichè è assurdo, che la inassegnabile possa diminuirsi, ed è assurdo, per posizione, che di essa se ne possa assegnare una che sia minore. Ma quale legittima induzione viene da questa ipotesi o da ciò? Forse, che si compia il ragionamento, che quando siamo arrivati ad una grandezza estremamente diminuita dal primitivo suo stato finito, forse diciamo che questo sia questa minor di ogni data, oppure una inassegnabile, supposta nell'argomento dell' assurdo? Se il ragionamento è giunto a questa verità esso ne inchiude e ne contiene tutta la piena dimostrazione rigorosa. Ma in caso diverso a qual pro, come abbiamo detto anco altra volta, a qual pro, porre in campo l' argomento dall'assurdo, per compiere una dimostrazione già compiuta e perfetta senza di esso? Se poi il ragionamento ordinario antico non fosse pervenuto a stabilire evidentemente esser noi arrivati alla minor di ogni data o alla inassegnabile, ed esser questa rigorosamente zero, a cosa può mai giovare il riflesso che se non siamo arrivati alla minor di ogni data, e se invece non siamo pervenuti che ad una grandezza mag-

giore di essa, cosa giova, diciamo, il dire che in tal caso si potrebbe concepirne ed assegnarne una minore? Sia pure altrettanto concesso, e per questo dove è il guadagno che presenta l'argomento dall'assurdo? Quest'argomento inchiude tutta intera la supposizione che la minor di ogni data sia quella della quale non se ne può concepire alcuna che sia minore; e questo principio posto razionalmente ed in via ipotetica, non si niega; ma quando questo argomento si chiama in ajuto per provare in concreto che il residuo di una grandezza indefinitamente diminuita esso sia veramente ridotto allo stato da essere inassegnabile, in allora l'argomento dall'assurdo, non ha luogo nè può somministrare nemmen l'ombra di prova, perchè l'argomento dall'assurdo anzi che provare che esista in verun concreto caso la inassegnabile, esso anzi sempre intieramente la suppone bella e posta; dunque questo ricorso a tale argomento è pura petizione di principio, è artificioso sistema, è giochevole combinazione di parole. Quindi quest'argomento antico dall'assurdo, diretto che sia a dimostrare l'esistenza della inassegnabile diviene il più triviale sofisma che si possa immaginare.

625. Il metodo dei limiti in quanto alla sua sostanza deve esser assomigliato a quello delle minori di tutte le assegnabili, o a quello delle esaustioni, con questa sola diversità nelle applicazioni, che laddove questi metodi tendono a diminuire la grandezza finita, il metodo dei limiti tende invece, poggiando sopra questa medesima diminuzione, tende a spingerla sino all'evanescenza od allo zero differenza tra le grandezze ed i loro limiti, per quindi aver motivo di paragonare i limiti di diverse grandezze in luogo di quelle svanite. Questo diverso modo di giungere alle dimostrazioni alle quali tentano arrivare i geometri che adoprano il metodo di esaustione, o il metodo delle grandezze minori di tutte le

assegnabili presenta anco le basi fondamentali di un'altro metodo quello appellato delle quantità evanescenti del quale pure se n'è abbastanza ragionato.

626. Que'geometri, che pur son molti, i quali fanno buon viso a questo metodo dei limiti, sogliono aggiungere quanto segue: molte grandezze le quali si accostano di continuo al loro limite, pervengono a consumare ogni differenza esistente tra esse ed il loro limite; e che questo è un metodo di realtà e di perfezione, perchè di fatti molte grandezze col crescere la finiscono a confondersi col limite medesimo, e fanno così vedere essere intieramente esaurita la differenza che esisteva fra il limite e la grandezza accostantesi al limite. Quanti esempii, dicon essi, non si hanno nell'andamento delle curve? Si vede adunque, ripigliano essi, che il metodo dei limiti, e quello allo stesso affine delle evanescenti si deve considerare come appieno rigoroso. L'esaurimento di una qnantità finita giustifica ancora il metodo dei limiti, il quale diviene appunto rigoroso nel momento, che svanisce la differenza tra le grandezze approssimantesi ed il limite medesimo.

627. Ma si prega il lettore ad osservare che queste considerazioni anzichè confermare l'esattezza del metodo dei limiti provano all'invece tutto il contrario; imperciocchè si concede ultroneamente, che nelle curve accadono alcuni casi nei quali l'ascissa o l'ordinata che si accosta ad un determinato limite lo raggiunga; come appunto nel circolo si ritiene che l'ordinata raggiunga pienamente e perfettamente il raggio che si considera suo vero naturale limite di tutti i suoi aumenti. Ma nè questo nè altri consimili casi nulla provano, in conferma delle dottrine sopra ricordate in favore del metodo dei limiti, perchè, o si considera l'aumento dell'ordinata crescente od accostantesi al suo limite secondo legge geometrica, ovvero si considera cresente per salti e quasi a

capriccio. Nel primo caso gli aumenti dell'ordinata governati da legge geometrica procedente all'infinito, non permettono mai, che possa essa ordinata raggiungere rigorosamente il limite che anzi per forza di questa legge diviene inarrivabile; nel secondo caso, crescendo saltuariamente l'ordinata non solo raggiunge ed eguaglia il limite ma lo può in alcuni casi anco sorpassare.

Però si ponga attenzione, che nelle curve, e nell'andamento delle coordinate loro applicate, gli antichi ed i moderni geometri ammettono, che gli aumenti di queste linee si facciano non saltuariamente, ma invece per legge geometrica ovvero di indefinito appropinquamento; ed appunto ci appigliamo tutti a questa maniera di aumenti per legge geometrica acciò non vi sia punto o confine alcuno finito al quale termini questo avvicinamento. Equivocando così su la legge delle infinite diminuzioni, o degli infiniti aumenti con la finita reale diminuzione od aumento della grandezza, la quale quando debba percorrere per tutti li gradi possibili voluti dalla legge geometrica infinita, presenta una verace impossibilità di esaurimento o di consunzione, o di rigorosa eguaglianza col limite.

628. Se dunque vediamo in alcuni casi particolari, che alcune grandezze eguaglino esattamente il loro limite per indi decrescere insino al loro annichilamento, questi sono casi affatto estranei ed appieno eterogenei alle veraci dottrine del metodo dei limiti. Le ordinate che seguono l'andamento del circolo e delle elissi, principali curve nelle quali hanno luogo i casi sopra contemplati (di raggiungere cioè perfettamente il limite) per nulla affatto confermano il metodo dei limiti, imperciocchè tutte le grandezze, che nei loro aumenti e decrementi si fondano sopra leggi geometriche procedenti all'infinito, queste grandezze non possono mai adequare rigorosamente il limite al quale si accostano, ma so-

lamente di continuo ed infinitamente ad esso appropinquarsi.

629. Quando adunque in una curva o nel circolo si dice che l'ordinata o l'ascissa sono eguali al raggio od allo zero, si dicono dei fatti veri, ma si tace che a tali risultamenti arriviamo solo o per ipotesi o per procedimenti di aumenti di diminuzioni saltuarie. Anzi qui in questi casi meglio che conseguire, che per legge geometrica di continui aumenti, l'ordinata sia eguale al raggio, unicamente si prova che lo stato massimo dell'ordinata riesce eguale al raggio. E per ottenere questo valore massimo si supponga tolto tutto ciò che potrebbe esser di obice. Anzi qui per incidenza sia rimarcato, che secondo questo andamento si vede dall'ordinata raggiunto il limite, e in seguito anco lo stato di zero. Ma questo non somministra alcun appoggio alla dottrina dei limiti; di fatti nel circolo v. g. diviso dal diametro si suole far incominciare la ordinata dal punto ove il circolo è tocco dal diametro, e perciò dal luogo ove il circolo, l'ordinata e l'ascissa sono un punto solo, cioè dal luogo ove è zero la curva, zero l'ordinata, zero l'ascissa. Dopo di questo punto progredendo, o meglio incominciando ad aver vita le coordinate alla curva circolare crescono sino al massimo o sino ad essere l'ordinata e l'ascissa ambedue eguali al raggio, di là l'ordinata diminuendo, e l'ascissa crescendo si arriva sino al punto ove il diametro taglia il circolo nella parte opposta, luogo ove l'ordinata ritorna zero, la curva zero, l'ascissa eguale al diametro; e così prosiegui nella parte inferiore, a tre quarti del circolo, l'ordinata pareggia di nuovo con segno opposto il raggio, l'ascissa diminuendo ritorna eguale al raggio, per indi progredire nelle loro diminuzioni inverse sino al punto primo ove vi si rendono zero, le coordinate e la stessa curva. Ora non ci vuole molta perspicacia per comprendere che altrettanto non può

avverarsi per legge geometrica di aumenti e di diminuzioni continui; come pure per conoscere come le coordinate non posson ridursi allo zero rigoroso quando decrescano per legge geometrica consimile. Così parimenti è facile il comprendere l'impossibilità che dallo zero incomincino la curva, e le coordinate ad essa.

630. L'andamento delle ordinate segue quello della curva cui sono applicate; il rapporto che regna tra queste rette ci appalesa almeno con grande approssimazione l'andamento della curva. Noi non entreremo in più minuto dettaglio sopra questo oggetto noto a tutti; solamente invece osserveremo, che le coordinate non incominciano dallo zero, e qualunque sia la legge geometrica per la quale diminuiscono dopo esser pervenute ad uno stato di grandezza qualunque, questa legge non può che ricondurle ai loro primitivi principii allo zero non mai.

Ogni linea tanto curva come anco retta, ha un principio, un primo elemento di esistenza o di grandezza, questo è sempre la primitiva parte di essa; ed ogni linea o grandezza non può in causa di qualsivoglia diminuzione regolata da legge geometrica esser ridotta se non a questo primitivo di lei principio.

Riguardo alla singolarità che l'ordinata nel circolo divenga rigorosamente eguale al raggio, questo come si è detto è caso, che non appartiene al metodo dei limiti, perchè lo stesso d'Alembert, che ha cotanto vagheggiata e rischiarata ed adoperata la dottrina di questo metodo ammette espressamente per massima, che questo caso è escluso dalla dottrina dei limiti, perchè asserisce posititivamente quanto segue nell'*Enciclopedia Metodica:* = veramente le grandezze che si accostano al loro limite, possono bensì appropinquarsi indefinitamente allo stesso, ma raggiungerlo, e confondersi con esso non mai =.

631. Ed affinchè alla meglio che si può vengano chiarite

queste dottrine, osserveremo che una linea v. g. di dieci metri di lunghezza, sarà prestamente tutta consunta se in dieci riprese la diminuiremo di un metro la volta; ma se al contrario vorremo procedere alla di lei consunzione secondo legge geometrica, come è ancor quella da Euclide propostaci e seguita universalmente da tutti, pigliandone cioè per la prima diminuzione una metà e qualche cosa di più, e così facendo sempre del residuo rispettivo che rimane, ella è chiara cosa, che con questa legge, che lascia sempre e poi sempre qualche residuo finito su del quale operando nuovamente proseguire nella diminuzione, ella è chiara cosa diciamo che con tale procedimento sarà impossibile di consumar tutta rigorosamente questa linea.

632. Ora siccome Euclide, Archimede, e tutti gli antichi hanno appoggiate anzi fondate le loro dottrine sopra queste leggi geometriche di diminuzioni, e ciò hanno fatto per potere provare, che esse procedevano all'infinito, da ciò n'è venuto sempre, che le loro dottrine non poterono assolutamente mai condurre alla consunzione di qualsivoglia grandezza, ed in particolare non potevano mai ridurre due grandezze disuguali a divenire rigorosamente eguali tra di loro.

633. Ben diversa è la via che battono i cultori della nuova analisi infinitesimale; perchè questi suppongono la grandezza finita come ingenerata o risultante da un' infinito numero di grandezze infinitesime, e queste supreme elementari loro parti generatrici sendo intieramente supposte per ardimentosa ipotesi, essi non sono in dovere di cercare di procacciarsele inutilmente e con mezzi inetti come fanno gli antichi. Più da questa supposizione dei moderni cultori del calcolo differenziale, ne viene, che una più, una meno di queste infinitesime parti (come prima dell' invenzione dell' analisi sublime insegnato, anzi dimostrato aveva Galilei) non vale ad alterare la grandezza finita o la sua eguaglianza che tiene

con qualsivoglia altra, perchè ogni grandezza finita è sempre un'infinità di queste supreme parti infinitesime, o meglio è sempre un'infinito verace relativo.

E benchè così adoperando i cultori della nuova analisi superiore, si appiglino ad una ipotesi arditissima, tuttavia non incontrano nelle difficoltà insuperabili nelle quali urtano sempre gli antichi, e per le quali vien loro tolta la possibilità di riuscire nelle loro dimostrazioni pienamente rigorosi.

634. In forza di questa maniera di concepire ipoteticamente la generazione di queste grandezze o finite quantità, maniera adoperata nella nuova analisi superiore, ne viene che tanto le rette, quanto le curve, come qualsivoglia altra grandezza si posson considerare come il risultamento di una infinità di primitive elementari infinitesime particelle; quindi anco le curve in queste dottrine vengono considerate come risultanti da tanti infinitesimi archi, o particelle di curve. Ma questa maniera di considerar le curve, non vuole esser confusa con un' altra dottrina per niun conto rigorosa, quella cioè di credere che i lati infinitesimi della curva coincidano rigorosamente con le loro corde sottoposte, poichè quest' ultima illazione oltre al riuscire estranea alle dottrine del calcolo superiore riesce anco sicuramente erronea, e coincide coll' opinione o pensamento antico, che le curve siano poligoni di infiniti lati, imperciocchè questa sì fatta sconvenienza di idee, conduce niente manco che alla piena distruzione della curva che si imprende ad esaminare ed a voler determinare.

Ora l' analisi superiore e le dottrine di essa non inchiudono questa sconvenienza per verun conto.

Questo concetto come ognuno intende è al tutto estraneo alle dottrine dell' analisi superiore, e sotto un'altro riguardo non presenta che una approssimazione o un metodo di vedere molto largo ed erroneo. Poichè questo metodo tende ad appianare la via a poter comparare le rette alle curve,

ma in modo distruttivo delle ultime; onde è che forvia dal rigoroso metodo di ragionare. E se questo nostro pensamento sembrasse alcun poco ardito, diremo che questa maniera di accostarsi alle curve anzi che esser atta a tor di mezzo le difficoltà, non fa altro che sospingere il pensiero nel campo dell'infinito, regione per noi sempre incomprensibile, senza rimuovere dall'animo veruna difficoltà inerente alla natura del ragionamento.

Quindi siccome i geometri sogliono scandagliare il corso delle curve comparandole ai lati dei poligoni che loro in certo modo serrano adosso per conoscerne con tal mezzo tutto il loro corso, perciò egli è chiaro che anco la quadratura, o la misura perfetta dello spazio compreso da una curva non può mai esser noto se non per approssimazione, e tutto al più grandissimo o sommo. E difatti con tutti questi mezzi non si fa altro in sostanza, che scandagliare e determinare alcuni punti della curva, e non mai la curva medesima. Ed in verità sia finito ed anco infinito il numero dei punti determinati e conosciuti in sul cammino di una curva, per mezzo delle rette alla stessa applicate, questa cognizione a nulla giova riguardo alla verace conoscenza della curva, perchè questi punti non possono essere al contatto poichè toccandosi si ridurebbero ad un solo; e separati tra l'uno e l'altro giace un tratto di curva che i punti non fanno conoscere per verun modo; dal che ne viene, che attribuire alla curva ciò che si sa e che è proprio di alcuni punti ad essa comuni, o per li quali essa passa, è abbracciare una filosofia al tutto inesatta.

I punti non sono la curva, quindi le ordinate, che pure poco o molto sono tra di loro discoste, non segnano nella curva che dei punti tra loro discosti, e perciò toccano a delle vicissitudini alle quali spesse volte la curva può non avervi che poca parte. Queste vicissitudini dipendono dalle condi-

zioni alle quali a noi piace di sottoporre le coordinate come vediamo usarsi nel metodo delle ascisse e delle ordinate, delle quali l'origine è da noi fissata a piacere, ed il loro andamento è da noi regolato a passi finiti o infinitamente piccoli. E quest'ultima ingegnosa maniera di considerare queste linee procedenti a passi infinitesimi, serve ad accostarsi alla curva con tanta approssimazione che l'animo nostro non sa ideare di più; anzi trovasi condotto al limitare dell'infinita vicinanza che per esso lui quasi distrugge la differenza e pare che presenti le cose cotanto avvicinate e ciò quanto si può desiderare in oggetto di approssimazione. E dicesi di approssimazione perchè è sempre impossibile che la retta si identifichi o si unifichi con la curva.

635. Ognun vede, che questo metodo di scandagliare e di venir in cognizione tanto delle curve quanto dello spazio compreso da queste linee, sebbene non conduca a rigorosi evidenti risultamenti, guida però e conduce a molta e grande approssimazione; imperciocchè nel corso un poco regolare di una curva, la differenza che può esistere tra un latercolo rettilineo di una lunghezza infinitesima e l'arco della curva sovrapposto allo stesso non può essere che tenue. Tuttavia egli è certo, che questa maniera di calcolare le curve ed il loro spazio, benchè la migliore e l'unica che si conosca, è però sempre una maniera, che ben addentro considerata, si presenta estranea alla natura della curva medesima, perchè tutta fondata sopra le rette. Più, non è vero che le curve rigorosamente parlando possano essere assomigliate ai poligoni di infiniti lati, attesa la sempre impreteribile diversità di loro natura. Difatti il rigor dell'esattezza manca sempre per intiero in quel piccol tratto infinitesimo, nel quale nè più nè meno, che in qualsivoglia tratto finito di essa, la curva si innalza e si scosta dalla corda o dalla retta sottoposta. Siccome però in tutti i metodi questa piccola differenza si

considera come infinitamente piccola, così si ritiene che quel poco che manca al rigore dell'esattezza non sia capace a rendere diversi o sensibilmente alterati i risultamenti finiti, che si ottengono. Tuttavia è cosa per sè aperta e chiara, che tutto questo risultamento è puramente ipotetico e non mai reale concreto, perchè supposte pienamente tutte queste infinitesime parti, che sono razionalmente da noi concepite e soggettivamente ammesse, ma non mai come effettive. Parimenti è certo che non può esser presentato che per modo approssimativo.

636. Nè giova dire (come asseriscono taluni) che si fatti risultamenti siano esatti, perchè da tutti si considerano come tali; imperciocchè primamente crederemmo far torto alla avvedutezza dei geometri col ritenerli persuasi di una esattezza asserita e non provata; poi perchè l'ipotetico risultamento qui sopra ricordato non può mai esser ritenuto per vero e reale e rigoroso, stante che tra l'ipotesi ed il reale, passa sempre infinita distanza o differenza; e finalmente, perchè la approssimazione è sempre stata all'in tutto diversa dalla rigorosa realità. Che poi noi non abbiamo alcun altro mezzo migliore di accostarci alla cognizione delle curve e dello spazio da esse contenuto, questo è vero, ma altrettanto non monta un frullo per aver diritto a considerare per buono e rigoroso un sì fatto mezzo di cui si parla. Leibnitz e Newton quando si appigliarono al partito di dire, che le dottrine della loro scoperta si assomigliavano a quelle degli antichi si ingannarono doppiamente, e perchè le antiche dottrine non avevano alcuna miglior prova, e perchè non contenevano nemmen quella delle dottrine nuove.

I moderni trascurando un infinitesimo in comparazione del quanto finito si mostrano consentanei a sè stessi, perchè, come abbiam veduto e dimostrato, ad alterare il finito, non vale lo infinitesimo. Laddove gli antichi, che non am-

mettevano palesamente questa infinità di elementi generatori infinitesimi, volendo considerar zero gli ultimi residui prodotti delle diminuzioni, mancavano anco della prova dell'incapacità in cui trovavasi questo residuo di alterar il finito; e riguardo alle curve anco il calcolo differenziale si assomiglia al metodo antico, perchè tutte le equazioni che si chiamano equazioni alle curve, sono in sostanza equazioni che presentano i rapporti e l'andamento delle linee rette che seguono le curve: perciò anco il calcolo superiore che applica a queste equazioni le sue variazioni infinitesime in questo si appoggia precisamente ed unicamente alle linee rette.

637. Una cosa però assai degna di osservazione per la filosofia di questa parte delle matematiche, si è che nel fondo e nella sostanza dei ragionamenti che siamo sin qui venuti esponendo, sta riposta la spiegazione sino a quest'ora da nessuno compiutamente appalesata, cioè che quel infinitesimo che manca al rigore dell'esattezza non è capace di accrescere o diminuire il risultamento finito, e perciò non vale a turbare il rigore dell'esattezza finita; quindi è manifesta la ragione per la quale il calcolo differenziale presenta (applicato che sia, alle dimostrazioni geometriche elementari) dei risultamenti o esatti o dall'esattezza non discosti per quantità finita, circostanza tutta propria e conforme alla filosofia italiana di Galilei.

Ritornando però alle equazioni delle curve, siccome queste esprimono delle sole proprietà delle linee rette applicate alle curve, così sotto questo riguardo anco il calcolo differenziale risolve dei problemi o delle equazioni di linee rette, e non s'accosta alla verace cognizione delle curve, che per quel tanto che loro si avvicinano queste rette, avvicinamento però portato, secondo le dottrine del calcolo differenziale, ad una approssimazione di cui non esiste una più grande possibile per le nostre attuali cognizioni.

Non dimentichiamo però, che in queste ricerche concernenti lo infinito, non dobbiamo pretendere di comprendere pienamente ogni cosa, ma ci conviene limitarci a dedurne quelle induzioni che sembrano legittime e derivanti dalla nozione, che noi ci possiamo formare di questo incomprensibile concetto. Chi si scosta da queste giuste precauzioni si getta nella oscurità, ed entra in un labirinto senza via di uscirne.

638. Si fa accusa a Newton di aver introdotto nelle dottrine dell'analisi pura, concetti e nozioni tolte dalla meccanica, ed attinte da Galilei, ma questa accusa, prescindendo dalle parole non è fondata. Lo spazio, il moto, la velocità, che egli prende in considerazione nel suo trattato delle *flussioni* sono tutti concetti e nozioni pienamente soggettive astrattissime, e perciò al suo dire non rimane di meccanico altro che il nome; e di vero tutte le sue nozioni sono rivestite della proprietà del continuo, e quindi esse sono e si possono considerare quali veraci grandezze geometriche.

L'unica cosa che si sarebbe desiderata in quel gran uomo è, che egli si fosse un poco di più emancipato da quelle forme meccaniche, che toccano troppo dichiaratamente alla pratica, sotto la quale le aveva già presentate Galilei; poichè laddove all'italiano servivano mirabilmente per fondare nuove dimostrazioni di reali meccaniche dottrine, nelle mani dell'inglese fanno qualche offesa al concetto soggettivo, sotto del quale unicamente possono appartenere alla nuova analisi superiore. Così v. g. Galilei, dopo aver diviso e considerato il tempo come risoluto in infiniti istanti, e dopo aver dato queste sublimi dottrine a lui tornava acconcio e sommamente útile applicare subito alla pratica questo suo generale insegnamento; e noi vediamo, che egli fa incominciare il moto anco reale con li primi istanti del tempo, e con le prime velocità virtuali, rispondenti agli infiniti istanti

medesimi, e lo faceva terminare con lo spegnersi dell'ultimo istante e dell'ultima velocità virtuale, ed in modo, come è detto num. 561 che anco questa si addatti al prescritto del continuo. Dietro tali considerazioni il moto, il tempo, e la velocità di valor finito, erano considerati come somme di infiniti momenti di tempo, di istanti, e di infinite velocità virtuali.

639. Questi erano gli altissimi concetti di questo sommo italiano, e noi lo vediamo farne felicissime pratiche applicazioni all'accelerazione dei gravi cadenti, all'esplicazione del colpo di percossa infinitamente più potente di quello di pressione, e alla generazione o fermazione di ogni momento finito di tempo, considerato come un cumulo indefinito di momenti primitivi appellati anco velocità virtuali.

In questa somma di momenti minimi in cui considerava diviso il tempo finito ed il moto, trova la spiegazione, come un uomo, arrivi a mettere in moto la gran massa di un peso enorme quale è quello delle porte del Battistero di S. Giovanni in Firenze; le quali al primo sforzo che fa la vostra mano per muoverle, non vi arriva, e spesso ne anco al secondo od al terzo, ma continuando i nostri sforzi, con questi replicati e riunentisi momenti di forza viva impressa da parte del braccio, si vedono alla fin fine mettersi lentamente in moto quelle pesantissime porte; le quali benchè si muovano lentamente tuttavia quando vengono ad urtare nella soglia della porta, che non possono smuovere, scaricano contro di essa sì grande momento di moto, che tutto ne trema l'altissimo sovraposto edificio di quel Battistero.

640. E lasciando di tener dietro ad altre stupende applicazioni di queste dottrine del divin Galilei, osserveremo in vece, che con queste sue vedute intellettuali presentava non solo la generazione suggettiva del tempo, del moto, dello spazio ecc. ma dava bella e fatta la più precisa idea. che

si possa avere anco della integrazione, o della somma di questi infinitesime parti generatrici, anzi di più presentava delle effettive integrazioni concrete in molte sue dimostrazioni relative alle scienze meccaniche astratte e reali.

Onde possiam credere, anzi lo dobbiamo, che egli con la risoluzione di tutte le grandezze finite in infinitesimi infiniti, ovvero in infiniti indivisibili stabiliva la dottrina fondamentale del calcolo differenziale ed integrale, con la dimostrazione per sopra più che un indivisibile comparato al finito, non vale a mutarne il suo quanto, o il suo valore finito, ed in pari tempo provava nella sua parte più infima il principio di comparazione tra l'indivisibile ed il finito, e fondava il principio che dopo fu chiamato, principio del calcolo differenziale. Cose tutte che noi Italiani dobbiam aver care, onde venire anco in cognizione di quanto si allontanassero dal vero alcuni geometri i quali incautamente si diedero a credere, che il merito di tutte queste elevate dottrine fosse tutto esclusivo di Newton e Leibnitz.

641. Dopo questa incidentale digressione relativa alle dottrine italiane ritornando al pensamento di Newton noi possiamo comprendere, che egli ha dedotto dalle dottrine di Galilei conseguenze che da quelle non discendevano. Imperciocchè quest'ultimo iniziava bensì il moto, come ogni altra grandezza meccanica e geometrica dal suo indivisibile infinitesimo, tuttavia il nostro fiorentino non si è mai permesso, e non ha mai nemmen sognato di considerare e trattare il suo indivisibile nè come evanescente, nè come eguale a zero. E nella stessa occasione nella quale ha insegnato che uno di questi indivisibili non era capace di alterare lo stato finito di una grandezza finita, lo ha fatto in modo che questa incapacità del suo indivisibile a turbar lo stato finito della grandezza, la deduce tutta e per intiero dal porre, che faceva l'indivisibile in confronto di una infinità di questi indivisibili, e non mai in altro concetto. num. 561.

642. Tanto, crediamo possa bastare a far comprendere palesamente che, nè gli antichi, nè i moderni geometri, non hanno mai avuto un ragionevole appoggio di ammettere l'esistenza delle quantità evanescenti, fondandosi sopra la natura e la proprietà del continuo, nè sopra alcuna escogitabil legge geometrica procedente all'infinito, come neppure sopra la sublimissima idea della composizione o generazione della grandezza considerata come risultante da infiniti indivisibili.

Più, quando Newton appoggiandosi alle dottrine fisiche italiane del moto dei corpi, nei quali questo moto effettivamente si spegne, o per le quali realmente il moto si ingenera od incomincia ad esistere, pare che voglia addossare tacitamente alle suddette dottrine il concetto delle evanescenti; ma questa sua maniera di pensare non è che una malintesa induzione ricavata indebitamente dalla natura del continuo, ed introdotta nel suo modo di vedere, quasi che l'evanescenza fosse una verace origine del principio del moto, ovvero un verace finimento del medesimo. Il moto pratico effettivo pare abbia origine e principio dalla quiete, e finisca nella quiete, ma intanto il principio come il fine del moto non si può iniziare dallo zero nè terminar in esso. Anzi all'invece la ragione nostra esige una verace iniziativa procedente da una forza viva reale. E questo bisogno di iniziativa o di origine, molti geometri come pure lo stesso Galilei, credono possa essere una parte infinitesima di moto o una parte indivisibile di esso; ma la natura della proprietà del continuo pare che escluda anco questo primo passo indivisibile, atteso che, converrebbe in questa ipotesi immaginare che di fatto tutto d'un tratto avesse vita questa parte infinitesima; ora a tanto non prestandosi la proprietà del continuo, ci insinuerebbe, che anco questa parte indivisibile avesse vita e fosse come il prodotto di altri generatori incomparabilmente minori, e questi ultimi egualmente debbano

aver vita da altri incomparabilmente minori, e così segui senza fine, num. 561.

Siccome però noi vediamo il moto dei corpi finire, questo fatto deve aver suggerito allo inglese il concetto della evanescenza; ma l'evanescenza è cosa tutta soggettiva; perchè egli non ha mai potuto provare, nè alcuno altro può mai provare, che il moto reale si spenga passando per tutte le diminuzioni minime corrispondenti alla legge di tutti gli impiccolimenti possibili ed attinenti alla natura del continuo; anzi diremo che appare molto più probabile, che si spenga invece per saltuarii e finiti sopravegnenti mordimenti di moto. Non insisteremo però più a lungo circa queste dottrine perchè crediamo siano già prima d'ora abbastanza discusse in questa filosofia.

643. Ritornando pertanto in sull'oggetto principale delle nostre indagini, pare possiam conchiudere, che la ipotesi più ragionata costituente il principio del calcolo differenziale sia quella del Galilei, perchè più semplice, e meglio ragionata di quante ne sian venute in mente umana, od almeno in sino ad ora appalesate per iscritto; perchè col pensamento di Galilei si evita ogni sconvenienza di idee alla quale sempre traducono le serie degli antichi, e tutti gli altri mezzi da loro escogitati per venire in possesso della infinitesima grandezza, o della minor di ogni data. L'idea galileana si adatta pienamente alla principale proprietà del continuo, ed anzi ne pare la più semplice e spontanea illazione derivante dalla proprietà del continuo appropriata alle grandezze.

Tuttavia convien sempre confessare, che la cognizione che noi possiamo avere dell'indivisibile infinitamente piccolo o dell'infinitesimo è sempre proporzionata alla nostra facoltà percipiente, dalla quale siamo guidati ed ajutati a concepire od a procacciarci quest'idea; onde ne viene che questa nozione dell'infinitesimo come quella dell'infinito, è sempre in noi incompleta ed imperfetta.

644. Il principio pertanto del calcolo differenziale è vero, perchè qualunque sia la comprensiva nostra circa la infinitesima parte di una grandezza, quest'ultima però per comune ipotesi si ritiene e si considera come infinitamente minore della finita grandezza: dunque nè una, nè due, nè dieci di queste infinitesime parti possono alterare il finito valore della grandezza finita; poichè in caso potessero ottenere altrettanto sarebbero e non sarebbero infinitesime, e la grandezza finita, sarebbe e non sarebbe un infinità di infinitesime parti, come generalmente si suppone e soggettivamente si ritiene da tutti.

Gli oppositori del calcolo differenziale egualmente che i loro inventori, non si sono mai collocati in questo vero punto di veduta intellettuale risguardante la intrinseca natura di questo principio; perciò non hanno mai potuto soddisfare razionalmente al gran quesito seguente; perchè, cioè un infinitesimo sia qualche cosa in genere di grandezza ed in pari tempo si possa con rigor di ragione considerare incapace di accrescere o diminuire una grandezza finita. Ma se gli uni e gli altri avessero ben addentro conosciuti e ponderati i principii qui sopra esposti e discoperti da Galilei, non avrebbero i primi osato contradire il principio con tanta ostinazione come han fatto, ed i secondi non si sarebbero abbandonati a dei sutterfugii poco proprii e poco degni dei grandi geometri, ed in pari tempo inetti a risolvere le difficoltà loro rinfacciate.

Ed acciò che questa filosofia la quale tenta giustificare il principio del calcolo differenziale sia appieno palese ed appieno intesa ed apprezzata, si osserva, che ammessa la ipotesi suggerita dalla nozione del continuo, cioè che ogni data o supposta grandezza finita, sia ingenerata da una infinità di primi principii infinitesimi, ella è cosa fuor di ogni dubbio che manca quasi di ogni sentore di verace valor fi-

nito ad ognuno di questi principii generatori, e ciò per la ragione che ce ne vogliono infiniti, onde così essere capaci di formare una qualsivoglia grandezza finita; dicesi che manca a questi infinitesimi quasi ogni sentore di valor finito, perchè se avessero un valor finito, allora riunendosi insieme in numero infinito potrebbero ritenersi capaci di dar vita all'infinito. Vero è, che anco l'unione dei finiti non può produrre lo infinito, tuttavia pigliando la cosa un poco alla buona appare che una infinità di finiti presenti un'infinito. Per altra parte confessar dobbiamo che anco il negare a questi infinitesimi ogni valor finito, farebbe apparire, che quando tutti avessero un valore finito eguale a zero, allora il finito fosse per risultare da tanti zeri il che pure è inamissibile. Che restaci dunque a pensare? dobbiamo alla meglio pensare, che gli infinitesimi, ognuno porti con sè un'infinitesima parte del finito, e questa infinitesima parte del finito dobbiamo concepirla o idearsela per approssimazione, atteso che con esattezza non si può; essendo questo infinitesimo un concetto che supera di molto la nostra limitata intelligenza. Intanto è evidente, che nè uno, nè due, nè tre possono formare grandezza finita, e così aver forza di alterare il valore o il quanto finito di una grandezza finita.

Il principio adunque soggettivo, il quale pone l'infinitesimo in comparazione del finito, e che ammette, l'infinitesimo come una variazione di questo, è un principio che contiene la piena prova, che il finito non cangia stato coll'aggiunta o colla sottrazione dell'infinitesimo. D'onde appare la certezza dell'enunciato principio, che due grandezze finite le quali non differiscano tra di loro che per una grandezza infinitesima, queste due grandezze sono eguali tra di loro.

645. Nessuno, che noi sappiamo, tra quelli che han trattato della metafisica o della filosofia del calcolo differenziale

ha profondamente studiato l'origine soggettiva dell'infinitesimo, o dell'indivisibile galileano, perciò tutti si sono lasciati sopraffare dalle difficoltà promosse contro il citato principio. E pure intanto che generalmente si riconosce per cosa certificata, che un infinità o un numero infinito non può esser accresciuto per l'aggiunta che ad esso si faccia di un quanto finito, pure non si conosceva che per simiglianza di posizione, anco le difficoltà contradicenti il principio del calcolo differenziale si riducevano a distruggere il concetto qui sopra, cioè il più aperto che noi abbiamo dell'infinito.

Noi abbiam veduto che Eulero e D'Alembert, furono di questo numero, l'ultimo abbracciò il metodo dei limiti, ed il primo richiamò a vita quello delle evanescenti.

A compimento di queste dottrine ci rimarrebbe a risolvere una dimanda; e la dimanda è questa; se un infinitesimo non turba lo stato del finito, perchè uno o due non fanno grandezza finita per piccola che sia, convien dunque che questo infinitesimo per sua natura sia una grandezza veramente singolare, giacchè a formare o ingenerare il finito ce ne vogliono infiniti? Ora questa è una posizione che difficilmente si comprende; imperciocchè, o la supposizione ardita con la quale si considera il finito risoluto in infinite parti, ritiene queste minime infinitesime parti fuori dell'ordine finito o nò; nel primo caso non si conosce nè si intende come delle grandezze fuori dell'ordine finito produr possano la grandezza finita; di fatti l'idea che noi abbiamo di ogni o qualsivoglia unione è sempre di tal natura, che nella collezione non vediamo che riunite e contenute se non la proprietà ed il quantitativo dei componenti; quando adunque niun sentore di finito si trovasse nei singoli infinitesimi, in qual maniera la loro unione potrebbe formare il quanto finito?

Queste riflessioni spargono e ricoprono di non poche

tenebre la prediletta e grandiosa idea della risoluzione della grandezza in parti infinitesime; ma queste oscurità derivano dal ragionare che facciamo noi intorno alla risoluzione infinita della grandezza con le nozioni tutte proprie della quantità finita. Tuttavia sotto di un'altro aspetto si comprende, che una divisibilità infinita è estranea ad ogni cangiamento della quantità divisibile, ed è estranea alla natura di tutte le sue parti, così che la divisione effettiva ed anco solo razionale non deve privare le particelle per quantunque minime o infinitesime della proprietà e capacità di riunirsi a ricomporre la quantità da cui furono state staccate con la divisione ideale; e quantunque dopo una ipotetica divisione infinita sembri che le infinitesime siano cacciate fuori dell'ordine finito, pure questo deve esser tutta nostra illusione in forza della quale noi trasmutiamo contro ogni diritto di ragione, la impotenza di nostra mente a comprendere tanta tenuità della grandezza minima con la niuna entità quantitativa, imaginando cioè, che ciò che per piccolezza non si può più concepire questa sia piccolezza nulla, o zero piccolezza. Non attribuendo adunque alla divisione di più della sua potenza, la qual potenza è tutta unicamente ristretta alla separazione delle parti di una data grandezza siamo sempre assicurati che le infinitesime possan e debbano sotto qualsivoglia ipotetica divisione esser capaci di riprodurre il finito; e tanto più questo ragionamento si fa palese, se portiamo il pensiero alla considerazione, che se questi elementi non avessero dopo infinita divisione ipotetica conservata la proprietà di ricomporre il finito, questo sarebbe segno evidente, che non avevano tale proprietà nè anco prima e perciò che indebitamente od assurdamente si sarebbero ritenute e considerate quali parti supreme elementari.

Tutte queste sconvenevolezze però derivano dalla supposizione assurda in sè stessa della divisione spinta all'in-

finito, al qual limite ripugna sempre essa possa pervenire anco in idea, e quando noi vogliamo per capriccio, o per, errato nostro modo di vedere introdurre nel nostro ragionamento un elemento assurdo allora siamo sempre circondati e disturbati continuamente da assurdità, da oscurità, e da inamissibili illazioni. Difatti la ipotesi dell'infinita divisibilità, conseguenza legittima della natura del continuo, traduce l'animo in faccia a delle idee che non vale più a comprendere, e lo stesso tentativo di ritorno del pensiero sui proprii passi cioè sopra la riunione di questi infiniti elementi ci mette in faccia dell'infinito esso pure incomprensibile. Ora la sopra ricordata difficoltà piglia queste due ipotesi da quel solo lato che appajono semplici ed intelligibili, ma essendo però ambedue queste ipotesi anco incomprensibili, la prima nostra precauzione filosofica deve esser quella di non abbandonarci con sicurezza a quel poco barlume di verità che presentano. Ed in fatti l'infinito e l'infinitesimo meditati da noi sin dove ci è dato di poterli conoscere presentano diversi aspetti cioè di luce e di oscurità. Cosi anco nel caso presente relativo alle nozioni contenute nella sopra ricordata difficoltà ci pajono chiare due cose escludentisi, cioè che se lo stato o il valor dell'infinitesimo non fosse all'in tutto fuori dell'ordine finito, certamente che poco o molto dovrebbe alterare il valor della grandezza finita, e se avesse un valor nullo, certamente che nè anco la riunione di una infinità di infinitesimi o di zeri non saprebbero produrre un qualsivoglia valor finito. Similmente dato anco che l'infinitesimo avesse qualche valore supremo e tenuissimo, si trova una apparente impossibilità a voler credere, che possa anco in questo stato alterare il valor finito della grandezza, perchè quest'ultima riuscendo infinitamente grande in comparazione dell'infinitesimo, sembra impossibile che l'infinito si possa accrescere. Anzi quest'ultima idea che l'infinito sia

quello che non si può più accrescere si presenta di tanta evidenza, che nulla di più chiaro e persuasivo; imperciocchè si può anco francamente asserire, che l' infinito non può esser alterato nè anco da qualsivoglia valor finito parlando in generale; nel caso poi concreto ogni quantità finita essendo un' infinità di elementi infinitesimi, per posizione dei nostri principii, questa non può mai dall' infinitesimo esser accresciuta o diminuita.

Prima di porre fine al nostro filosofico ragionamento, risguardante la filosofia dei metodi tutti infinitesimali, diremo, che considerando attentamente l' indole e la natura loro facilmente ci vien veduto che tutti indistintamente si sforzano di ripetere la rigorosa loro certezza dalla supposizione che l' infinitesimo sia zero, o che si possa avere quale zero la differenza infinitesima, che impedirebbe alle quantità finite di non poter essere rigorosamente eguali. In quale maniera ognuno dei ricordati metodi vi arrivi, lo abbiam già detto.

Ma qui osservar dobbiamo, che tutti i metodi infinitesimali presentano delle applicazioni le quali sono meno vere delle induzioni, che ricavar si possono dai metodi medesimi. E qui vogliamo accennare alle applicazioni di questi metodi adoperati nella misura delle curve specialmente. Poichè tutti i metodi quando li applichiamo, ovvero quando noi li estendiamo a queste applicazioni, noi in allora li adoperiamo per comparare delle grandezze eterogenee quali sono le rette e le curve. Ora tutta la sconvenienza delle idee derivante da questa eterogeneità è comune a tutti i metodi, e questa è una cosa sorpassata da tutti; perchè da tutti si applicano alle curve in onta di questa difficoltà. E qualunque esser possa il valore che dar si voglia a questa larghezza nell' uso dei metodi, questa tutta per intiero sussiste e milita egualmente contro tutti i metodi. Di qui viene, che ove un metodo applicato alle grandezze omogenee riesca di indefinita approssimazione,

applicato alle curve poste in comparazione colle rette riesce all'invece di manco che di una indefinita approssimazione.

646. Dopo Eulero nessuno ha messo in campo un metodo nuovo, nessuno ha procurato di risuscitarne un vecchio, per sostituirlo alle dottrine del calcolo differenziale. Solamente in sul finire del secolo passato ed in sul principio di questo si è manifestato il desiderio di abbandonare il principio del calcolo differenziale cercando ridurre le dottrine dell'analisi superiore alla pura analisi algebrica. Arbogast e Lagrange, ne sono i promotori. Ma essi si sono smentiti, perchè hanno poi avuto ricorso alle dottrine antiche, e precisamente alle grandezze minori di tutte le date, il qual genere di grandezze contiene maggiori difficoltà che non ne contenga quello delle grandezze infinitamente piccole. Più il principio delle minori di tutte le date è forse più lontano dall'algebra finita, che non lo sia lo infinitesimo, perchè considerava come zero la grandezza minor d'ogni data senza nemmeno averne determinata con sufficiente precisione la di lei entità; se questo non è che indirettamente sotto l'aspetto inconcludente che in tale stato si considera come non più divisibile. Sono dunque caduti in questa sconvenienza di idee, Lagrange e tutti i fautori delle funzioni analitiche di esso.

647. A compimento di queste nostre osservazioni ci conviene riferire e ricordare le opinioni di quelli che hanno tentata una filosofica esplicazione del calcolo superiore. Ora tra quelli che di proposito si sono occupati della esposizione filosofica del calcolo differenziale evvi il celebre geometra Carnot, il quale espose i suoi filosofici pensamenti in una operetta intitolata: *Riflessioni sopra la metafisica del calcolo infinitesimale.* Noi tributiamo a questo bravo geometra moltissima estimazione per le sue opere matematiche, e specialmente per quelle che risguardano l'arte militare della difesa dei luoghi fortificati; tuttavia con sincerità dichiariamo

che nella succitata operetta, egli ha spiegato assai poca filosofia. Imperciocchè in essa non manifesta una nozione precisa ed esatta della quantità infinitesima, giacchè soventi volte la confonde con la grandezza evanescente, e quello che ancor più ci sorprende si è, che parla e tratta dell' infinitesima come di una grandezza di natura indeterminata, ed altra fiata la considera come di natura arbitraria indeterminata, ed alcun' altra, come una illazione del metodo dei limiti; cose tutte che inchiudono inconcludenti supposizioni, e se fosse possibile, capaci di annullare la scoperta del calcolo differenziale.

Egli chiama v. g. imperfette le equazioni che differiscono tra di loro di una dx. E siccome coll' integrazione di queste equazioni contenenti la dx si risale alla funzione od all' equazione finita cui appartiene la variazione dx, così a lui sembra, che altrettanto avvenga per compenso di errori. Ma questo pensamento è una sua gratuita asserzione, e noi la dichiariamo anco offensiva alla verace filosofia e natura del calcolo differenziale ed integrale. E in verità, il ritornare dalla dx alla funzione primitiva, alla quale la dx si è supposta applicata, in questo non è trascuranza, nè in questo avvi compensazione di errori. Di questa nostra opinione se ne darà in seguito precisa dimostrazione.

648. Se il benevole lettore si richiamerà a memoria i ragionamenti che abbiamo tenuti sin qui intorno alla filosofia dell' analisi sublime, comprenderà di leggeri, che Carnot non aveva profondamente meditato sopra l' oggetto del quale ha impreso a scrivere. Di fatti egli al num. 22 dice: = Si comprendono sotto il nome di quantità infinitesimali le quantità infinite o infinitamente grandi, e le infinitamente piccole; tutte le altre si chiamano finite =. E nel num. 23 prosiegue: = Dunque dire come si pratica comunemente, che l' infinito è ciò, che non ha confini, ciò che non ha limite, o di cui

non esiste limite, è darne una idea semplice e fondata, perchè in fatti le quantità hanno tutte per limite, le une lo zero, le altre $\frac{1}{0} = \infty$.

Ed al num. 40 scrive: = Le quantità infinitesimali, come già dissi, non sono enti chimerici, ma sono semplici quantità variabili, caratterizzate dalla natura del loro limite, il quale è zero per le infinitamente piccole, ed è $\frac{1}{0}$ per le infinitamente grandi. Si posson dunque successivamente attribuire a codeste indeterminate, come a tutte le quantità indefinite, diversi valori arbitrarii, e tra questi si deve tenere conto dell'ultimo che è zero per le infinitamente piccole, ed è $\frac{1}{0}$ per le infinite =.

649. Ommettendo di commentare li concetti comuni, e comunemente espressi nel num. 22 di questa sua opera, osserveremo solamente che ove dichiara, che *si ha un' idea semplice e fondata dell' infinito*, quando si concepisca esser quello che non ha limite, egli qui altamente si illude, perchè siccome l'idea o il concetto del finito non dipende per verun modo, e per niuna ragione da quella del suo limite, per simile ragione anco quella dell'infinito desumer non si deve dal proprio limite o dalla mancanza di esso, perchè ognuno sa, che l'idea del limite è quella di una estrinseca relazione, che una grandezza qualunque crescendo e decrescendo ha verso di un'altra, cui crescendo o diminuendo si avvicina, la qual relazione quanto sia lontana dalla idea costitutiva della grandezza ognuno lo intende; anzi il limite, se è noto, non serve ad altro se non a farci conoscere verso

quale stato di valore la grandezza o la quantità crescente o decrescente continuamente si accosti. Non fa meraviglia che Carnot, si perda in queste magre osservazioni intorno alla idea dell'infinito, da che tenderebbe a comprovare che noi abbiamo una idea *semplice* e *fondata* dell'infinito desumendola dalla mancanza del limite.

Imperciocchè niuna via esiste (per la nostra intelligenza), la quale possa condurla alla cognizione dell'infinito, e le vie indirette e negative, tra le quali si deve annoverare la mancanza di limite, molto meno valgono a condurvela. Poi permettiamoci apertamente di osservare, che nello sforzarsi di dedurre la nozione della grandezza da quella del limite, o ciò che è lo stesso, dedurre la nozione della grandezza da una estrinseca relazione, che essa ha con un'altra, è una maniera quasi sempre antilogica, perchè la grandezza, non che la di lei entità è intieramente presupposta e data, in questa comparazione o relazione; dal che ne viene, che in questa maniera di pensare si inverte l'ordine naturale delle cose, pretendendo desumere l'idea della grandezza dal limite che la presuppone. Poi se il limite fosse un dato capace o valevole a dare un'idea della quantità ognuno intende, che il limite essendo anch'esso una quantità, esso medesimo sotto questo riguardo avrebbe bisogno di derivare il suo quanto, e la sua idea e la sua nozione da un'altro limite, e così via saremmo guidati a perder di vista ogni mezzo di conoscere le grandezze, atteso che collocheremmo tale cognizione come riposta in fondo ad una via non solo lunga e penosa ma interminabile di limiti determinanti tutte le grandezze.

Nel concetto adunque del limite, concetto tutto contenuto e consistente in questa estrinseca relazione tra due grandezze, non si può rinvenire prova alcuna, ma bensì solamente una semplice petizione di principio (considerato tutto

questo ragionamento sotto il rispetto di voler acquistare un'idea adequata della grandezza, deducendola da quella del suo limite).

La induzione che si può ricavare dal limite non si deve estenderla al di là della sua propria forza. Esso per questa sua relazione estrinseca non può manifestare che solo qualche volta qual sia il valore approssimativo di qualche grandezza, che si avvicina ad esso ma anco in questo caso sempre imperfettamente e solo per approssimazione.

Il voler dunque persuaderci che la mancanza del limite da esso lui attribuita all'infinito serva a darci di questo un'idea *chiara* e *fondata* questo è pensamento ripieno di sviste; primamente la mancanza di confine o di limite è idea negativa la quale non può somministrare veruna fondata cognizione positiva dell'infinito, tanto più che tutto questo non è relativo che a noi e non all'infinito medesimo. Forse alcuno dirà che il pensamento di conoscere le grandezze deducendo la loro misura dal limite è metodo giusto, perchè si assomiglia al metodo di conoscere le grandezze comparandole ad una data e nota misura. Ma osserviamo che questo non si verifica riguardo al limite; perchè colla comune misura si determina bensì una grandezza, venendo a conoscere quante volte essa contenga questa comune misura; nel limite all'invece la facenda procede diversamente perchè esso non manifesta che una approssimativa misura, cioè quando una grandezza se gli avvicina indefinitamente senza però mai adequarlo compiutamente.

Forse alcun altro soggiungerà, che per mancanza di limite il filosofo francese ha inteso significare, che l'infinito è cotanto maggior del finito, che non esiste alcuna grandezza finita la quale possa stargli a petto, e far così le veci di suo limite.

Ma si osserva che una nozione di questa natura, ovvero

il voler considerare a questo modo l'infinito è la stessa cosa, che escludere dal suo concetto ogni sentor di limite, e quindi è invertere tutto l'ordine delle sue *Riflessioni*, nelle quali al contrario vorrebbe guidarci all'idea dell'infinito deducendola dalla mancanza del limite. Poi prescindendo da questa osservazione la quale è meglio diretta contro la riportata opinione che si vorrebbe attribuire a Carnot, che contro questo stesso filosofo, perciò diremo che siccome una sì fatta istanza riducesi a dirci, che lo infinito supera ogni grandezza, così è perditempo il voler cercare di averne idea semplice ed adequata. Al num. 40 asserisce: che la infinitesima non è quantità chimerica; ed in questo conveniamo, che abbia tutta la ragione, perchè nessuno l'ha giammai qualificata per chimerica, ma solamente quantità ideale, soggettiva. Che poi le grandezze infinitamente piccole siano delle *semplici quantità variabili caratterizzate dalla natura del loro limite* questa è una asserzione che non si può intendere con facilità, e perchè parlando del carattere della grandezza infinitamente piccola, l'epiteto di variabile le riesce affatto estraneo al concetto di infinitamente piccola, quindi ella è questa una espressione che considerata qual epiteto qualificativo della infinitesima, è all'in tutto fuor di proposito ed improprio. In seguito dopo questa stessa definizione prosiegue a volerci dare ad intendere che il carattere della infinitesima deriva e dipende dal limite; il qual limite appunto è zero per le infinitamente piccole, ed è $\frac{1}{0}$ per le infinite. Qui non ripeteremo ciò che già ripetutamente abbiam detto della sconvenevolezza di idee che ci presentano coloro che hanno voluto ammettere lo zero come limite delle quantità diminuite o impiccolite. Quello che qui si può pensare circa questa sua maniera di parlare si è, che in queste sue sen-

tenze non si rinviene veruna filosofia, nè veruna convenienza di idee. In fatti qual carattere può imprimere all'infinitesima lo zero? Ogni idea di limite inchiude la idea di grandezza comparata a grandezza o la idea di ragione o di rapporto, idea tra grandezze costanti e variabili, e per dir breve idea affatto aliena allo zero anzi evidentemente esclusa dallo zero. In oltre dice che $\frac{1}{0}$ è il limite delle quantità infinitamente grandi; il che riesce nulla meno, che a dire, che l'infinito è il limite dell'infinito, concetto che quanto poco sia degno del geometra che lo pronuncia non si dura fatica a intenderlo. Poi ella è una bella figura quella che fa questa proposizione con quella poc'anzi ricordata dal medesimo autore, cioè che la mancanza di ogni confine e d'ogni limite somministra un'idea semplice ed adequata dell'infinito!

Dove poi in questo medesimo paragrafo si dimostra di un modo di pensare assai singolare si è quando egli attribuisce tanto alla quantità infinitesima quanto alla infinita il carattere di quantità indeterminate ed indefinite, suscettibili perciò di diversi valori arbitrarii, gli ultimi de'quali valori per l'infinitesima è lo zero, e per l'infinita è $\frac{1}{0}$. A dire candidamente quello che ne appare riteniamo, che questa maniera di dire inchiuda tale e tanta confusione di idee per cui non si ravvisa in essa nemmeno il primo sentore di filosofica rettitudine, anzi incliniamo a credere, che questo geometra quando scriveva tali cose avesse il suo animo distratto e divagato in qualche altro pensiero; e in vero sentirsi a dire che l'infinitesima parte è una quantità indeterminata e suscettiva di diversi valori, e che l'infinito è parimente grandezza indeterminata e capace di diversi valori,

l'ultimo solo de' quali è $\frac{1}{0}$, ella è tal maniera di parlare, che se questa non si voglia ascrivere a sbadatezza, certamente, che dovremmo confinare questo stato del suo animo tra gli immaginarii e gli impossibili di quel bravo geometra.

Poco dopo accenna ad una infinitesima sensibile poi ad una infinitesima assoluta, e fa che l'ultima sia limite della prima; finalmente soggiunge: = che bene si possono ritenere nel calcolo anco delle quantità che svaniscono, e che in certo modo sono nulle, perchè anco nella geometria, si ritiene e si mette in computo il punto geometrico, il quale ha zero dimensioni, vale a dire se ne parla e se ne tratta nelle linee ove è zero lunghezza e così via via =. Bella figura diciamo noi, che fanno nel calcolo le quantità nulle, quando esse vi facciano l'ufficio che il punto fa nelle grandezze geometriche! Dove è in geometria che sia posto a computo o a calcolo il punto geometrico. Tutti i geometri si servono della parola punto, per esprimere un sito, un luogo, e per questo si dirà che essi lo pongono a calcolo, e che lo ritengano grandezza o lineare, o superficiale, od altro?

Ma non entriamo in più minuto esame delle dottrine spiegate da questo geometra in tale mal pensata sua operetta, e questo si faccia a fine di non sprecare il tempo inutilmente. Basta dire, che egli procura di giustificare tutti i metodi infinitesimali, cerca ravvicinarli, ed unificarli, ma col suo dire li confonde tutti, e li oscura tutti nella loro più importante parte della filosofia.

650. Collalto, bravo geometra italiano ha dato alla luce una memoria intitolata: *Identità del calcolo differenziale con quello delle serie ovvero il metodo degli infinitamente piccoli di Leibnizio spiegato e dimostrato colla teorica delle*

funzioni di Lagrange. Dalle dottrine esposte e diffusamente in questa sua operetta si viene a conoscere facilmente, che egli non aveva una giusta e filosofica nozione delle infinitesime grandezze, nè del calcolo differenziale nè di quello delle funzioni analitiche; imperciocchè la natura del calcolo differenziale è al tutto estranea all'idea ed alla nozione delle serie, e quando vi fosse identità tra questi due oggetti, in allora la scoperta del calcolo differenziale non sarebbe che apparente; atteso che le serie erano note e pienamente conosciute anco avanti questa scoperta. E quando questo geometra avesse saputo dimostrare questa identità avrebbe anco dimostrato che la scoperta del calcolo di cui trattasi non fu che apparente. Poi Collalto doveva ben distinguere la forma materiale architettonica delle serie, considerata superficialmente, dall'intrinseco significato delle serie medesime; poichè allora avrebbe anco riconosciuto, che quando Leibnizio discopriva il calcolo differenziale si appoggiava bensì qualche volta alle serie, ma introduceva nelle serie in luogo della variazione finita una variazione dx infinitesima.

In questa posizione ed in questo concetto unicamente stava riposta tutta la sostanza del calcolo differenziale; il che vuol dire, che ricercare come fa quel geometra di ravvisare una identità del calcolo differenziale, con quello delle serie, è disconoscere da capo a fondo tutta la dottrina e la sostanza di questo calcolo.

Parimenti si vede esser stato un'altro suo grave equivoco quel che lo ha condotto a crederlo identico con le funzioni analitiche di Lagrange; perchè le funzioni analitiche secondo la dichiarazione del medesimo Lagrange non contengono e non esprimono che grandezze finite, ed il calcolo differenziale non risguarda e non contiene come suo oggetto principale se non delle grandezze infinitamente piccole; la distanza adunque che passa tra la grandezza finita, e la infi-

nitesima è precisamente quella che indica la distanza, o meglio la infinita differenza che passa tra la dottrina delle funzioni analitiche, e quella del calcolo superiore di cui si tratta; in fatti la variazione j nelle serie di Lagrange è finita, nelle serie di Leibnitz la dx è infinitesima, perciò Collalto tenderebbe con questo suo dire a provare che j = dx, intanto che la prima è finita e la seconda infinitamente piccola; sconvenienza di idee tanto manifesta che nulla più!

Collalto se avesse ben meditato la dottrina delle funzioni analitiche avrebbe veduto, che Lagrauge quando ha voluto cavare qualche costrutto dalle sue funzioni finite, fu costretto da necessità a dare alla sua variazione j finita un valore minor di ogni data; il che conduceva Lagrange su la via della contraddizione, in quanto che aveva in principio delle funzioni analitiche dichiarato espressamente, che la sua teorica era indipendente da ogni idea di infinitamente piccoli, di limiti, di prime ed ultime ragioni, e di minori di tutte le assegnabili ecc.; quindi facendo poi la sua j minor di ogni data usciva di strada, e toglieva alle sue funzioni il prestigio che intendeva di dare ad esse. Più doveva pensare che Lagrange facendo la sua variazione j indeterminata, per poterla poi render suscettibile del valore di una minor di ogni data, veniva col fatto a dimostrare, che la sua j non poteva esser comparata e certamente mai riuscire identica con la dx di Leibnitz pienamente determinata.

651. Quando volessimo indagare in via al tutto incidentale quale sia stato il motivo che ha indotto Collalto in sì alto inganno, dovremmo necessariamente pensare che egli fu sedotto dall'identità della forma materiale delle serie lagrangiane con le leibniziane; non badando, che la forma delle serie dipende dalle operazioni adoperate nello svolgere le funzioni in serie (ogni qual volta però si tratta di funzioni comuni ordinarie), alla qual circostanza non avendo posta

attenzione sufficiente, egli s' è dato a credere, che l' identità della forma materiale del calcolo annunciasse anco identità di principii ed identità di significato nelle serie.

Ma che importa mai questa materiale rassomiglianza intanto che la stessa serie, che contiene le differenziali ha una significazione indefinitamente diversa da qualsivoglia altra di forma simile ma contenente la variazione j finita?

Serva a maggiore dilucidazione un piccol esempio; sia il puro binomio $(a + d)^2$ sviluppato in serie, cioè espresso per $a^2 + 2\ ad + d^2$; e se vogliamo togliere alle lettere che lo compongono lo stato indeterminato, sia $a = 8$ e $d = 4$. Noi avremo $8^2 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 4^2 = 144$; ove ognuno vede il rapporto dei termini sotto ogni riguardo. Ora facciamo che nel binomio $(a + dx)^2$ sia la $d = dx$ allora avremo $(a + dx)^2 = a^2 + 2\ a\ dx + dx^2$.

Ciò posto chi dicesse che lasciando a + d finite ed indeterminate, chi dicesse che i termini, ed i valori, o il significato di questi due piccoli e semplici sviluppamenti fossero identici, non moverebbe a riso i geometri?

Eppure è cosa certa, che avendo innalzato al quadrato il binomio $(a + d)$, col puro mezzo della moltiplica, la forma del quadrato svolto in serie considerata materialmente è una istessa ed identica; eppure intanto è anco cosa certificata che il significato ed il valore del consecutivo rapporto dei termini è infinitamente diverso nei due sviluppamenti!

652. Antonio Conti in una operetta intitolata: *Della vera esposizione del calcolo differenziale* saviamente si dimostra mal soddisfatto dei ragionamenti di Carnot da noi poco fa ricordati. Ma quando si accinge alla filosofia del calcolo da lui detto leibniziano, pare che si occupi più del materiale delle formole di questo calcolo, che della filosofia che presentano. In fatti si intrattiene a ridurre la soluzione di alcuni problemi risoluti col metodo di Lagrange alla sempli-

cità con la quale si risolvono col calcolo differenziale. Questo però non interessa nè direttamente concerne la filosofia dei due metodi, ed i due metodi, essendo sostanzialmente diversi nelle loro dottrine, si vede bene, che anco una medesima semplicità, che presentassero nella forma, questa non può nè unificarli, nè può fare che abbiano una identica filosofia.

La j nel calcolo di Lagrange, non può divenire identica con la dx del calcolo leibniziano, se non cangiando il significato di ambedue, ovvero indentificando ciò che infinitamente è diverso.

653. Brunacci in una sua memoria diretta all'Accademia delle scienze di Padova in risposta al seguente programma da essa proposto ai dotti: = In che differisca veramente la metafisica del calcolo sublime del Lagrange dalla metafisica dei metodi anteriori. Qual sia il grado della sua superiorità; se e come questa possa ridursi alla semplicità degli altri metodi, massimamente del leibniziano, tanto nelle applicazioni puramente analitiche, quanto nelle geometriche e meccaniche =; Brunacci, diciamo, rispondendo a questo programma, si studia di esporre questa metafisica, ma lo fa nel modo il più triviale ed inetto che si potesse adoperare. Il quesito a primo aspetto, ha un'apparenza di importanza, ma ben ponderato non si presenta molto degno del sapere dei membri dell'Accademia, che lo hanno proposto. Per verace ossequio, che noi portiamo a questa celebre Accademia ometteremo di farne minuta analisi, e solamente ci permetteremo di osservare che i proponenti il quesito non potevano ignorare, che Lagrange riducendo tutta la sua analisi all'algebra comune, e poscia, contro la sua dichiarazione, ricorrendo al principio delle minori di tutte le date, e tentando con queste mal composte, anzi sconnesse nozioni, di surrogare la metafisica del calcolo differenziale, Lagrange, diciamo noi, non proponeva una nuova metafisica del cal-

colo sublime, ma esibiva una metafisica antica, anzi la più vecchia di tutte le imaginate dai geometri antichi; quindi non si può comprendere qual pensamento abbia guidato i proponenti il quesito espresso nel programma citato, di dimandare cioè *in che differisca la metafisica del calcolo sublime di Lagrange da quella dei metodi anteriori;* giacchè tanto facendo uso dell'algebra comune, quanto adoperando il metodo delle quantità minori di tutte le date, Lagrange non usava, nè proponeva alcuna metafisica sua propria, e molto meno una metafisica di calcolo sublime.

Più, i membri del corpo accademico non potevano ignorare, che nei calcoli di Lagrange la variazione, che serviva anco allo sviluppamento delle funzioni in serie era indicata generalmente dalla sua j, quantità indeterminata, laddove nei calcoli di Leibnitz, si additava con la dx pienamente determinata ed infinitesima. Perciò riducendo il quesito al concreto confronto delle dottrine o posizioni lagrangiane con quelle leibniziane, si veniva a domandare con esso, in che differiva una variazione semplice indeterminata espressa per j, da una variazione pienamente determinata espressa per dx e precisamente infinitesima.

654. Quando Brunacci avesse ben ponderato il programma e ciò che in esso si domandava, certamente che avrebbe dato di capo in queste osservazioni, e sopra di esse si sarebbe fatta strada a trattare del quesito con quella filosofia della quale era suscettivo. Ma non curiamoci di ciò, che pure doveva fare e non ha fatto; veniamo a ciò che egli ci presenta nella succitata memoria. Egli incomincia a ricordare i principii fondamentali del calcolo leibniziano, (e per appalesare la sua erudizione, che egli fa comparire sotto il modesto pretesto di pienamente corrispondere al quesito) ci mette sott'occhio anco il metodo dei *limiti* di D'Alembert quello delle *evanescenti* di Eulero, e quello delle *flussioni* di New-

tou. Ma dopo aver copiati succintamente i principii di tutti questi metodi anteriori a quello di Lagrange, venendo a questo ultimo, anzi che esporre precisamente la filosofia o la metafisica sopra la quale si regge, nulla dice di tutto questo. Eppure ognun comprende, che la metafisica di Lagrange doveva esser precisamente manifestata ed esposta, tanto per poterla confrontare con la metafisica degli altri metodi, quanto per bisogno di farla conoscere al pubblico, giacchè nessun scrittore di polso aveva fatto ancora altrettanto; tuttavia Brunacci ci lascia digiuni di questa esposizione, intanto che questa mancanza rendeva impossibile un fondato e ragionato giudizio concernente il programma.

655. Per formarci una idea del modo col quale egli espone il calcolo di Leibnitz riportiamo le sue parole istesse, quali si leggono nella pag. 21 § 27 della *Memoria* di cui parliamo. Questa esposizione ci farà conoscere indirettamente con quanta poca filosofia il sullodato geometra siasi accostato a risolvere il quesito dell'Accademia di Padova. = Essendo il calcolo differenziale quel calcolo il quale ci insegna a trovare il secondo termine dello sviluppo di una qualunque funzione $y = \Phi(x)$ in serie ordinata secondo le potenze di dx aumento indeterminato qualunque, quando si pone $x + dx$ in vece di x; sia che questa funzione y sia data esplicitamente in x, o lo sia implicitamente, cioè dipenda da una relazione tra x, y ne segue che il differenziale $\left(\frac{dy}{dx}\right) dx$ esprimerà ciò che realmente è, cioè il secondo termine dello sviluppo di $\Phi(x + dx)$ ordinato per le potenze di dx: che $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dy}{dz}\right) dy$, esprimerà ciò che è realmente, cioè l'aggregato del secondo termine

nello sviluppo di Φ $(x + dx , y)$ e del secondo termine nello sviluppo di Φ $(x , y + dy)$; e che infine $\left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy = o$ esprimerà la relazione che necessariamente esser vi debbe tra questi due secondi termini, quando tra le variabili x , y vi è l'equazione Φ $(x. y) = o$. In quella equazione differenziale la dx esprime l'aumento indeterminato della x, e dy esprime il differenziale di y, cioè il secondo termine dello sviluppo della stessa y secondo le potenze di dx quando in essa porremo $x + dx$ per x =.

656. E nel num. 28 prosiegue: = L'esposizione da me fatta dei principii sopra i quali è fondato il calcolo differenziale, ampiamente risponde alla prima parte del problema proposto dall'Accademia, cioè: = *In che differisca veramente la metafisica del calcolo sublime del sig. Lagrange dalla metafisica dei metodi anteriori* =.

657. Prima di far parola del metodo del calcolo differenziale quale risulta dalla sua esposizione, ci è necessario di riportare quanto esso dice esponendo il *calcolo sublime di Lagrange da lui detto delle funzioni analitiche.* Egli dunque scrive: = Indicato per w un qualunque aumento di x se una funzione qualunque Φ $(x + w)$ si suppone sviluppata secondo le potenze di w , onde abbiasi $\Phi (x + w) = \Phi (x) + P w + Q w^2 +$ ecc., al coefficiente P che è ancora esso una funzione di x , Lagrange dà il nome di funzione prima. Lagrange poi la indica con la stessa funzione primitiva, contrassegnata con un'apice in questa maniera $\Phi (x)'$; così $P = \Phi (x)'$.

658. E se per y, z, u ecc. sono indicate altrettante funzioni di x, le loro funzioni prime si denotano per y', z', u' ecc.,

e queste, altro non sono, che i coefficienti della prima potenza di w negli sviluppi in serie delle funzioni primitive x, z, u, ecc., quando in esse la variabile x che le compone, divenisse x + w. Il calcolo delle funzioni analitiche consiste nella ricerca di queste funzioni prime, cioè nella ricerca dei suindicati coefficienti e delle proprietà di essi.

Se ora abbiasi una funzione di due variabili $\Phi(x, y)$, e siano queste indipendenti tra loro, se considerasi costante la y, la di lei funzione prima $\Phi(x, y)'$ sarà (giusta il detto) il coefficiente di w nello sviluppo di $\Phi(x + w, y)$, e se considerasi costante la x la funzione prima sarà il coefficiente di o nello sviluppo di $Q(x, y + o)$ indicando per o l'aumento di y. Questa funzione prima si denota con $\Phi(x, y)_{\prime}$ ponendo l'apice al basso della funzione. Dunque una funzione primitiva di due variabili ha due funzioni prime $\Phi(x, y)'$; $\Phi(x, y)_{\prime}$ queste due funzioni prime sono i due coefficienti P, Q nello sviluppo $\Phi(x + w, y + o) = \Phi(x, y) + P w + Q o$ ec. come è facile a vedersi =.

659. Poi estende queste dottrine alle equazioni tra x ed y, ecc. poi finalmente al num. 21 pag. 17 conchiude così: = Il calcolo delle funzioni analitiche *dà nascita al calcolo differenziale,* col quale in buona sostanza non è che la medesima cosa. Per vedere tutto questo indichiamo per dx l'aumento indeterminato w della variabile x, aumento che può indicarsi con qualunque segno, e di più chiamiamo differenziale di una funzione $\Phi(x)$ la sua funzione prima moltiplicata per quell'aumento indeterminato di x. Questo differenziale allora sarà rappresentato per P dx ovvero per $\Phi(x)'$ dx, e sendo P dx il secondo termine dello sviluppo di $\Phi(x + dx)$ secondo le potenze di dx); e se il differenziale di una funzione si indica al solito per la stessa funzione preceduta dal d, avremo $d\,\Phi(x) = \Phi(x)'\,dx$, ovvero

indicando per y una qualunque funzione di x, si avrà dy = y, dx.

660. Poi al num. 28 pag, 22 segue. = Il calcolo sublime del sig. Lagrange, cioè il calcolo delle funzioni analitiche, sopra cui è fondato il differenziale, è un ramo di algebra ordinaria giacchè egli non considera la quantità sotto altro aspetto che quello, sotto del quale le riguarda la geometria e l'algebra; non le confronta tra loro in altre situazioni che in quelle, nelle quali le confronterebbe la geometria; non prescrive sopra di esse se non che delle operazioni algebraiche del medesimo genere di quelle che si fanno per elevare a potenza, o per estrarre la radice; in somma non abbisogna di niun principio nuovo, ed a lui bastano quei principii e quelle convenzioni che danno nascita all'algebra ordinaria. Si può quindi concludere che niun'altra metafisica avvi nel calcolo differenziale appoggiato al calcolo delle funzioni, che quella metafisica dell' algebra ordinaria, la quale esprimendo tutti i rapporti per segni universali, facile ne rende il calcolo, nel tempo stesso che lo generalizza. La metafisica del calcolo sublime di Lagrange lascia nell'animo una convinzione perfetta della di lei esattezza. Il calcolo differenziale basato sopra gli altri principii forma una scienza separata dall' algebra giacchè in essa quei principii non avviene mai che si incontrino =.

661. Ho voluto riferire alcuni passi concernenti le precipue prove o l' esposizione che Brunacci arreca parlando della metafisica del calcolo sublime di Lagrange. Ma a dire la verità richiamando a memoria anche solo alla buona quanto sin' ora siamo venuti esponendo intorno la filosofia delle matematiche, ed in particolare dei diversi metodi sin'ora esaminati nella parte più difficile ed elevata di essi, ognuno con facilità si può accorgere anzi può largamente comprendere, che Brunacci sapeva poco innanzi intorno la me-

tafisica del calcolo sublime; anzi conoscerà che parlava in modo da destare un sentimento di impazienza in chi lo legge con cognizion di causa.

Tocchiamo adunque solo alcune principali sviste che sono in questo suo dettato. E primamente osserviamo, che è una forzata e grandissima improprietà quella che adopera cioè di appellare la dx *un aumento indeterminato qualunque della x,* mentre che tutti sappiamo che la nozione della dx è per l'uomo la nozione più precisa e pienamente determinata che esista; giacchè la dx è sempre stata adoperata per indicare la differenziale della x, o la infinitesima parte ideale della x. In secondo luogo si presenta al tutto peregrina la definizione che egli dà del calcolo differenziale, quando dice, e con serietà!: = essendo il calcolo differenziale, quel calcolo, il quale ci insegna a trovare il secondo termine dello sviluppo di una qualunque funzione $y = \Phi(x)$ in serie ordinata secondo le potenze di dx =. Imperciocchè a dire la verità altrettanto non si è mai sentito da alcuno; perchè la deduzione o il ritrovamento del secondo termine in tutti gli indefiniti sviluppamenti delle funzioni in serie si conosceva prima che nemmeno si prevedesse la scoperta del calcolo differenziale. Più, quando un geometra voglia considerare la famiglia presso che innumerevole delle funzioni, che si possono sviluppare, dando alla variazione un valore qualunque, allora vede ancora che il calcolo differenziale non sarebbe buono a dare lo sviluppo se non nel solo caso di un valor unico quale è quello infinitesimo della dx. Onde anzi che esser il calcolo differenziale quello che insegna a rinvenire il secondo termine in ogni sviluppamento, risulterebbe esser quello, che lo indicasse in un solo caso unico; sebbene anco in quest'unico caso è all'in tutto falso, e onninamente falso, che sia il calcolo differenziale, che insegna a rinvenire il secondo termine, giacchè la filiazione, la natura,

ed il variare delle potenze, e insomma tutto quello che esiste nelle funzioni sviluppate, tutto, intieramente tutto, dipende dalla natura della funzione, e segnatamente dalle operazioni elementari note impiegate a dar vita o a produrre lo sviluppamento. Così nel binomio di Newton il secondo termine dalla funzione sviluppata che è poi moltiplicato per la dx tutto assolutamente, è il prodotto della moltiplica impiegata a produrre questo sviluppamento; dal che ne viene, che al calcolo differenziale è affatto estranea la virtù attribuitagli da Brunacci, cioè che sia quel calcolo che ci insegna a trovare il secondo termine; e ciò è tanto palese che se vorremmo domandare a tutti indistintamente i conoscitori degli elementi d'algebra, tutti, nessuno eccettuato, ci assegnerebbero il secondo termine del binomio, e quello di indefinite altre funzioni sviluppate.

In quanto all'esempio di calcolo, che arreca in questo luogo e che è $\frac{dx}{dy}dx$ mi pare che meriti di esser appellato colle sue proprie parole, che *esprime ciò che esprimono tutti gli altri calcoli di questo genere*, e col riguardo che sia la y funzione della x, circostanza che in questo caso non può che complicare le idee.

Similmente non sappiamo comprendere perchè nella differenziale della equazione Φ (x,y), egli dica che la dx esprime un aumento *indeterminato* della x, e parlando della dy dica che questo esprime la differenziale di y, cioè (come replica) il secondo termine dello sviluppo della stessa y secondo le potenze di dx, quando in detta funzione poniamo $x + dx$ in luogo della x. Di fatti questo suo discorso è senza alcuno giusto concetto, e quello che più importa non ha relazione alla metafisica del calcolo. Dicesi che non ha alcun giusto concetto, perchè è cosa nota a tutti che nella Φ (x,y), che

egli qui fa variare per parti, ovvero differenzia in riguardo alla x, e poi riguardo alla y, è cosa nota dico a tutti che insino a tanto che la x e la y sono nella funzione collocate in una identica situazione, il dire come egli ha fatto poc'anzi che la dx è un aumento indeterminato di x e che la dy è la differenziale di y è un parlare sì ripieno di sbadetezza, che si dura fatica a credere che sia stato proferito da un geometra per altra parte coltissimo, come era Brunacci. Poi dopo avere, e con poca esattezza, espresso il metodo dei limiti, delle evanescenti e degli infinitesimi, soggiunge: = L'esposizione da me fatta dei principii dei metodi sopra dei quali è fondato il calcolo differenziale ampiamente risponde alla prima parte del problema proposto dall'Accademia: cioè in che differisca la metafisica del calcolo sublime di Lagrange dai metodi anteriori. Poichè una sì fatta esposizione ci ha schierate sott'occhio le metafisiche di questi diversi metodi, le quali appunto consistono in questi diversi principii =.

La commissione dell'Accademia doveva avere presente ciò, che si trova nella teorica delle funzioni analitiche di Lagrange, vogliamo dire, doveva aver presente all'animo, che Lagrange quando ha voluto ricavare anco il più piccolo costrutto dalle sue formole puramente algebriche ha dovuto ricorrere al metodo infinitesimale di Euclide, cioè della minor di ogni data, e così ha dovuto trasmutare, o meglio infinitamente alterare le sue formole algebriche introducendo in esse delle considerazioni superiori e attinenti non all'algebra comune e finita, ma attinenti invece bene o male, all'analisi sublime; ed è per questo che la commissione aveva posto nel programma *in che differisce l'analisi sublime* di Lagrange, dai metodi anteriori cioè dai metodi di analisi sublime e non da quelli di pura analisi algebrica, perciò doveva anco rigettare e non premiare questa Memoria. Ma Brunacci non ha considerato il quesito sotto questo riguardo,

che alla fin fine era l'unico sotto del quale il metodo di Lagrange si appalesava sublime, perciò noi non sapremmo in qual maniera si possa ritenere, che Brunacci avesse inteso la dimanda dell'Accademia; e di fatti come tra poco ci renderanno convinti le sue stesse parole, non ha considerato le funzioni che puramente sotto l'aspetto del lato algebrico comune. Non ha nemmeno tentato il paragone del metodo Euclideo cui ricorre Lagrange, e sotto questo aspetto non ha menomamente risposto al quesito.

662. Nè possiamo darci a credere, che egli ignorasse le dottrine d'Euclide che questi ha adoperato quando ha voluto tentare la comparazione delle linee rette con le curve, perchè alla pag. 3 riporta il famoso principio euclideo, del quale ne abbiamo parlato assai a lungo; dal qual principio si crede indurre, che ogni grandezza finita può esser ridotta a diventare *minore di ogni data quantità*. Ma egli su questo punto presenta un'idea al tutto erronea, cioè che il principio di Euclide sia identico, anzi sia lo stesso principio che fonda il metodo delle esaustioni! Pigliando poi in considerazione quanto egli soggiunge resteremo sempre vie maggiormente convinti, che nulla ha fatto per la soluzione del problema, e di più che non dà a divedere di aver letta ed intesa l'opera delle funzioni analitiche, imperciocchè esso scrive: = Il calcolo delle funzioni analitiche sopra cui è fondato il calcolo differenziale, è un ramo dell'algebra ordinaria. Il che vuol dire, che l'algebra è il calcolo sublime di Lagrange! = Così con questo ultimo piccol tratto più gremito di sviste che di parole, chiude il suo dire al tutto inconcludente.

Unicamente osserveremo che così, anzi che sciogliere quel nodo che l'Accademia ravvisava nel problema, esso invece dà di spalle allo stesso, e fa che l'Accademia abbia proposto un quesito senza significazione. Il far riflettere che la metafisica del calcolo sublime di Lagrange (cioè la pura

algebra ordinaria) lascia nell'animo una convinzione perfetta, questa era all'in tutto cosa inutile; finalmente conchiuderemo pregando la gioventù a conservar la stima a questo celebre scrittore di matematica, ma a non leggere questa sua Memoria, nè il suo Trattato dell'Ariete Idraulico, perchè anderà confusa nelle idee, come pure farà bene a non studiare la filosofia del calcolo sublime nel suo trattato, che ci dà di essa nella sua opera grande.

663. Ci convien fare un cenno anco di un'altro scrittore di filosofia matematica, cioè del Lafontaine, geometra francese, il quale in una sua opera intitolata: *Elementi della geometria dell'infinito,* nella seconda sezione, ove parla della grandezza infinitamente grande, e precisamente nel num. 82 scrive quanto segue: = Ciò che per essenza è suscettivo del più e del meno, non perde niente della suā essenza ricevendo questo più e questo meno, del quale esso è suscettivo. Ora la grandezza è per essenza sua suscettiva del più, e del meno; dunque la grandezza non perde della sua essenza ricevendo questo più e questo meno; dunque essa è ancora suscettiva egualmente del più e del meno; dunque essa è sempre suscettiva del più e del meno; dunque essa lo è sempre senza fine o all'infinito =. Ed al num. 83 soggiunge: = Poichè la grandezza è suscettiva di aumento senza fine, se la può concepire accresciuta un'infinità di volte, cioè fino a tanto che sarà divenuta infinita. E in fatti egli è impossibile che la grandezza suscettiva di aumento senza fine, sia nel medesimo caso, come se essa non fosse suscettiva senza fine. Ora se essa non lo fosse essa resterebbe sempre finita. Dunque essendo suscettiva di aumento senza fine essa non può restar sempre finita o ciò che è lo stesso deve divenire infinita =. E al num. 84 = Per meglio concepire lo infinito io considero la serie naturale dei numeri dei quali l'origine sia zero o l'unità. Ciascun termine cresce sempre di una

unità, ed io vedo che questo aumento è senza fine, e che per quanto grande che sia il numero ove io sarò arrivato, io non sono più vicino alla fine della serie della quale il numero dei termini sarebbe infinito; dunque la serie naturale ha un numero di termini infinito.

In vano si direbbe che il numero dei termini che la compongono è sempre attualmente finito, ma che io lo posso sempre accrescere. Egli è ben vero che il numero dei termini che io posso attualmente riandare e disporre secondo il loro ordine è sempre finito, ma il numero dei termini dei quali la serie è composta in sè stessa, è tutt'altra cosa. I termini de'quali essa è composta in sè stessa esistono egualmente tutti; e se io la concepisco spinta solamente a cento, io non do a questi cento termini una esistenza, della quale siano privati tutti quelli che sono al di là del cento; dunque tutti i termini della serie benchè non possano tutti insieme essere abbracciati e considerati dal mio spirito, sono però egualmente reali. Ora il numero n'è infinito, come si è provato; dunque il numero infinito esiste tanto realmente quanto i numeri finiti =.

664. I geometri son tutti consenzienti nel considerare e definire la grandezza finita come suscettibile di aumento e di diminuzione, questo scrittore all'invece, considera questa capacità (inerente alla natura medesima della grandezza finita) come *essenziale;* quando una proprietà si dichiara essenziale in un ente giusta ogni buona filosofia, esso ente non ne può esserne spogliato mai, ed il tentativo di spogliare un'essere de'suoi essenziali, è tentativo distruttivo dell'ente. Ora qual è la induzione da esso lui creduta legittima, che ricava da questa essenziale proprietà della grandezza finita? Eccola: *dunque essa lo è senza fine o all'infinito.* Ma quest'ultima illazione è mal ferma in sulle gambe, e non può star in piedi, perchè senza entrare in un ragionamento ontologico

e stringentissimo su questo oggetto, ci contenteremo far presente al lettore, che tutte le proprietà essenziali sono immancabili nè si posson torre ad un'ente se non distruggendolo; ma di grazia consideri come non esista niuna necessaria nè ragionevole connessione, coll'esister sempre, e col divenire infinito. Le proprietà di tutti gli enti sono sempre le stesse, dunque possiamo forse con proposizione logica legittima estenderle all'infinito e portarle fuori degli essenziali?

È pan perduto il pigliar le masse da queste filosofiche considerazioni, giacchè la induzione legittima che deriva dalle sue basi è questa: che è attribuita alla grandezza finita la essenziale proprietà di esser sempre suscettibile di aumento e di diminuzione; dunque diciamo noi è impossibile, che la grandezza finita possa giammai per qualsivoglia accidente divenire infinita. Onde quando nel num. 83 si permette asserire, che esistendo questa suscettibilità nella grandezza può essa esser accresciuta una infinità di volte, cioè sino a tanto che sarà divenuta infinita, dice sentenza falsa. Questo matematico non comprende, che questo stato quando potesse convenire alla sua grandezza essenzialmente suscettiva di aumento e di diminuzione, questo stato infinito la distruggerebbe, e farebbe che essa andasse in fumo insieme coi suoi essenziali.

Questo scrittore che pare voglia far pompa in questo luogo di filosofia comune avrebbe dovuto anco saperla adoperare con rettitudine e non erratamente; imperciocchè, sia che lo faccia per isbaglio, sia che abbia voluto regalarci di un sofisma, egli si pone a supporre che questa essenziale proprietà sia esercita o messa alla prova un'unfinità di volte; ma è essa cosa possibile questa supposizione? Noi abbiam provato che solo in via di ardita e incongruente ipotesi si può ammettere; dunque ogni conseguenza che ne deduca è, e sarà sempre pura ardita ipotesi; poi dato che questa infinita ripetizione di aumenti e di diminuzioni fosse possi-

bile, non è chiara cosa, che il suo dire tutto si riduce ad una puerile petizion di principio o ad un continuo circolo vizioso? di fatti tentarebbe provare l'infinito, deducendolo dall'infinito, o dalle infinite volte che si è preso l'aumento che è poi lo stesso! La sua maniera di esprimersi nel num. 83 è al tutto inconcepibile, perchè ci viene a proporre questa ridicola argomentazione: = è impossibile che la grandezza suscettiva di aumento senza fine sia nel medesimo caso come se ella non fosse suscettibile senza fine. Ora se essa non lo fosse, essa resterebbe sempre finita; dunque essendo suscettiva di aumento senza fine essa non può restar sempre finita, o ciò che è lo stesso deve divenire infinita! = Ora ognuno intende come questa sua ultima induzione sia lontana dalle premesse più che non lo è il cielo dalla terra.

665. Si comprenderanno ancor meglio gli equivoci nei quali incappa il filosofo francese osservando, come egli scrive nel num. 84 qui poc'anzi riportato, cioè che nella serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ecc. sia la stessa cosa il cominciar questa serie dallo zero (il che è assolutamente impossibile) ovvero incominciarla dall'unità (cosa possibilissima). Sorpassando però questo suo errato modo di vedere relativo all'origine delle serie, veniamo a quanto egli dice ragionando delle serie e del numero de' suoi termini: dopo aver richiamata l'attenzione sopra la differenza dei termini dicendo, che ogni termine cresce sempre di una unità, soggiunge, che questo aumento è senza fine e per quanto sia arrivato avanti nel prender termini non è più vicino di quello che fosse da principio; secondo lui questo esige un numero di termini infinito.

Peregrina illazione!! Però sin qui bene o male si è studiato di provare, benchè sempre inutilmente, l'esistenza del numero infinito (del quale ne manca tuttora la prova e persino la sua possibilità); più qui ricorre ad un'altra maniera di dimostrazione fondandosi sopra alcune nozioni certamente

non migliori delle prime; e riflette che i numeri della serie naturale sono infiniti, perchè i termini esistono tutti in sè stessi, nè più nè meno di que' pochi, che possiamo scrivere ed abbracciare col nostro spirito; se dunque esistessero, quanti sono poi questi termini? (egli ritiene che sono infiniti); dunque diremo noi la faccenda è terminata ed il numero è infinito, la esistenza dell'infinito è provata. Ma gli dimanderemo per qual motivo adunque si dà in braccio alle illusioni di alcuni idealisti, di supporre cioè l'esistenza delle cose in sè stesse; cosa può significare la supposizione dell'esistenza in sè stessa di tutti i termini di una serie per un uomo? Chi è, che percepisce infinita questa serie progressiva dei numeri naturali? È la intelligente nostra attività. Chi l'ha ideata e regolata? È la nostra facoltà libera intellettiva. Ora chi può uscire dalla nostra sfera delle idee e del nostro intendimento per poter conoscere se esistano o no delle cose astratte in sè stesse? Nessuno. Dunque come si può asserire che esistono questi termini in sè stessi, termini costituenti questa serie?

Ma finiamo questo breve ed insieme nauseoso commento dello scritto di Lafontaine, gaicchè egli di continuo s'aggira sopra gratuite supposizioni, le quali lo mettono in una perpetua petizion di principio, ed in una antilogia continua.

666. Gabrio Piola, chiarissimo geometra di Milano, nel tomo 97 della *Biblioteca italiana,* Giornale scientifico letterario che esciva in allora alle stampe in Milano, inseriva un *Saggio sulla metafisica dell' analisi pura.*

Ma egli si è posto con questo scritto in un campo all'in tutto diverso dal nostro, voglio dire, si è unicamente occupato di dare savj ricordi e bellissime dottrine risguardanti la significazione che i geometri intendono dare a certe formole o parti analitiche. Il che vuol dire che il suo Saggio ha per iscopo principale non la filosofia fondata sovra i principii

ideali matematici, ma sopra le diverse maniere adoperate ad esprimere dei concetti, delle induzioni, e dei passaggi da un genere all'altro delle quantità, secondo i diversi loro stati di variazione e di cangiamenti ecc.; cioè risguarda l'esplicazione di tutte le ingegnose formole ed operazioni analitiche inventate ed adoperate nell'analisi sublime; dal che si comprende, che il nostro pensamento filosofico è tutto diverso perchè si aggira all'invece sopra il campo della filosofia delle formole considerate nella loro fondazione, e specialmente nel loro valore e significazione, laddove il pensamento filosofico del Piola risguarda il metodo ed il formolario usato dai matematici per cavarne costrutto. Questa avvertenza ci è sembrata necessaria a sdebitarci dal dovere che ci pareva a noi attinente, cioè di non sorpassare un nome celebre ed una bell'operetta che conta pochi anni di vita.

667. Nieuwientiit uno dei più acerrimi appugnatori del calcolo differenziale, ha stampato un opera intitolata: *Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex poligonorum natura deductæ.* Amstelœdami 1695.

E prima di mettere alla luce questa sua opera aveva esternato li suoi pensamenti risguardanti il calcolo differenziale od infinitesimale in una altra sua operetta denominata: *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatæ principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis.* Amstelœdami 1694. Così parimenti, in un'altra appellata: *Considerationes secondæ circa calculi differentialis principia et responsio ad virum nobilissimum ecc. ecc. Leibnitium.* Amstelœdami 1696.

Riporteremo in questo luogo non già un sunto ragionato di tutte queste sue opere, ma sibbene daremo un saggio sufficiente e risguardante li principii sopra dei quali egli le ha fondate, e questo saggio vogliamo sia destinato a far conoscere il principale appoggio che ha indotto questo celebre

appugnatore del calcolo sublime a tentare la sua analisi, che egli appella, rigorosissima e degna d'esser anteposta a quella manco esatta di Leibnitz.

Questo esame si fa non tanto per dare a divedere con quali magre e sparute idee Nieuwientiit abbia tentato supplantare l'analisi di Leibnitz quanto per far sempre più comprendere, come inutilmente siasi tentato e si possa ancor tentare di appoggiarsi ai principii antichi in riguardo all'analisi sublime.

Riportiamo prima le sue definizioni.

Definit. 1.ª = Datam quantitatem omnem eam voco, quæ determinabilis est, cujusque magnitudo imaginationis humanæ limites non excedit =.

Definit. 2.ª = Unde quid per quantitatem, qualibet data minorem aut majorem intelligendum veniat ipso nomine apertum est =.

Definit. 3.ª = Quantitatem qualibet data minorem compendii gratia infinitesimam; majorem infinitam appellare liceat =.

Riteniamo bene presente le sue idee, e precipuamente, che per la prima definizione niuna cosa può esser considerata come grandezza quando vinca la facoltà della umana imaginativa. Questo è il significato preciso della sua prima definizione. Incominciando poi la seconda proposizione con la parola *unde* ci farebbe conoscere, che considera la seconda definizione come dedotta dalla prima, e con quella aperta e spontanea derivazione, che l'animo è costretto comprendere quasi per forza tra connesse idee. Ma dove è mai qui, non già la derivazione, ma nemmeno la più lontana possibilità di dedurre senza altra considerazione, la nozione di una quantità di un' ordine cotanto diverso e di natura se possiam dir così infinitamente lontana! Chi legge questa seconda definizione deve sempre domandare a sè stesso, questa

minor di ogni data supera o non supera le forze della nostra imaginazione? Se le supera, perchè si chiama quantità. Se non le supera, a qual fine dar nomi nuovi a quantità che sono tra i limiti della nostra imaginazione? Siccome però questo scrittore fa uso in questo luogo di una nozione antichissima e pienamente conosciuta ma non mai appieno compresa perchè supera l'imaginazione umana; direm dunque, che inizia assai male il lettore nelle sue dottrine mostrandogli incongruenza di idee nelle prime definizioni coll'esordire la seconda definizione dalla prima, con la quale non ha veruna connessione escogitabile. Nella terza poi egli si permette di appellare in modo di sinonimi la minor di ogni data *l'infinitesima,* e la maggior di ogni data *l'infinita!* A dire la verità anco in questa terza definizione si ravvisa tanta sconvenevolezza di idee con le due precedenti che eccita la meraviglia.

Ma vediamo se almen negli Assiomi ci dia qualche cosa di manco confuso, e di manco tramestato di quello che ci ha messo innanzi nelle sue definizioni.

Axiomata.

1.ª Quid quid toties sumi, hoc est per tantum numerum multiplicari non potest, ut datam ullam quantitatem ut ut exiguam magnitudine sua æquare valeat, quantitas non est, sed in re geometrica verum nihil.

2.ª Quælibet quantitas data in partes qualibet data minores, tum æquales inter se, tum inæquales est divisibilis.

Ecco li due assiomi. Il primo è tolto da Wallis, e sotto apparato scientifico riducesi alla ordinaria sentenza, che ciò che ha qualche valor finito, moltiplicato quanto occorra, arriva ad avere un valore finito il quale può sempre esser aumentato quanto si vuole, e se tanto non si avvera, è segno

che ciò che si è moltiplicato non ha valor finito, ovvero ciò che si è moltiplicato era zero.

A proposito di questo assioma, io inviterei volentieri l'autore di esso a considerare la niuna significanza del medesimo, il quale attentamente considerato si riduce a dire, che lo zero non può dar prodotto che sia finito per quanto moltiplicato sia; e ciò che è qualche cosa, questo moltiplicato, cresce e cala secondo che questo numero è maggiore o minore dell' unità.

Il secondo assioma se non è pienamente assurdo, certamente che ne ha tutta la apparenza. Difatti ponendo che ogni grandezza sia divisibile in parti minori di ogni data, sin qui è appoggiarsi alla natura del continuo e ricavarne illazioni se non legittime almeno in via ipotetica ammissibili; ma il dire poi che possono essere eguali o diseguali tutte queste minori di tutte le date, questo fa apertamente a'pugni colla comune nozione della quantità minor di ogni data. La nozione della minor di ogni data, è quella che non si possa più diminuire nè più dividere; e l'esser una disuguale dell'altra porta necessariamente, che una sia maggior dell'altra, perciò diminuibile e divisibile; dunque qui c'è tutta la più grande sconvenienza di idee, perciò tutta la più aperta assurdità.

Veniamo ai suoi Lemmi per vedere se in essi si abbia più luce rischiarante queste dottrine, che devono essere anteposte a quelle di Leibnitz.

Lemmata.

L. 1.ª Omnis quantitas vel data est, vel qualibet data minor aut major.

L. 3.ª Qualibet data quantitas per numerum quemlibet est divisibilis.

L. 6°. Unde si quantitas per numerum quolibet dato majorem dividatur, erit quotiens pars ejus quantitatis, qualibet data minor.

L. 7.° Pars cujuscumque quantitatis qualibet data minor $\frac{6}{m}$, erit etiam omni alia data quantitate minor.

Si neges, sit designata quantitas K minor ipsa $\frac{6}{m}$, erit mK minor ipsa 6, et m minor $\frac{6}{K}$; adeoque numerus quolibet dato major m, minor erit numero, seu quotiente dato, quod repugnat.

L. 8.° Si partes, qualibet data, minores $\frac{6}{m}$ et $\frac{C}{m}$ ad se mutuo addantur, vel a se mutuo substrahantur, summa $\frac{6+C}{m}$ et differenzia $\frac{6-C}{m}$ respective, partes erunt qualibet data minores summæ vel differentiæ totorum: uti patet.

L. 9.° Multiplicetur $\frac{6}{m}$ per datam quamdam r, erit factum $\frac{6\,r}{m}$ retangulum omni data minor (juxta lem. 6ª.)

L. 10.° Si pars qualibet data minor $\frac{6}{m}$ ducatur in se ipsam,

vel aliam qualibet data minorem $\frac{C}{m}$ erit productum $\frac{66}{mm}$ seu $\frac{6\,C}{mm}$ aequale nihilo, seu non quantum.

Demonstratio.

Multiplicetur enim quatiescumque libuerit hoc productum, et si placet per numerum omni dato majorem m, emerget $\frac{66}{m}$ aut $\frac{6\,C}{m}$ quæ singula sunt quantitates qualibet data quantitate minores (L. 7.um) adeo nullam quantitatem ut ut exiguam æquare valent; quæ juxta (axa 1.um) $\frac{66}{mm}$ seu $\frac{6\,C}{mm}$ sunt nihilo æqualia.

668. Esaminiamo brevemente questo apparato di principii, e siccome la maggior parte sono gli uni agli altri eterogenei, così possiamo anco incominciar dall'ultimo. Facciam dunque parola di questa dimostrazione; essa si presenta con paralogismo il più aperto che ci sia toccato leggere, benchè vestito di forme analitiche. L'autore per arrivare alla $\frac{66}{mm}$ ha moltiplicato la $\frac{6}{m}$ già infinitesima, per una $\frac{6}{m}$ infinitesima; ha dunque ottenuto la infinitesima di secondo ordine espressa per $\frac{66}{mm}$. Per far questo egli ha dovuto supporre, e assolutamente supporre possibile ciò che ha fatto; cioè

supporre che fosse possibile la infinitesima parte della grandezza già infinitesima, altrimenti la moltiplica riusciva un vero assurdo, ed il risultato $\frac{66}{mm}$ sarebbe un prodotto assurdo ripugnante; cosa fa questo disavveduto geometra? si pone a disfare ciò che ha fatto, cioè moltiplicando per la m o per l'infinito la $\frac{66}{mm}$ facendola cioè $\frac{66m}{mm} = \frac{66}{m}$; così ritornando sopra i suoi passi ha ridotto $\frac{66}{m}$ a quantità infinitesima di primo ordine; se aveva la bontà di ritornare anco sul primo passo disfacendo ciò che aveva posto, cioè moltiplicando $\frac{66}{m}$ per m ne avrebbe ottenuto $\frac{66m}{m} = 66$ quantità finita qualsivoglia. Perchè fermarsi al primo passo? forse per dire che $\frac{66}{mm}$ era zero; in allora non vede che così ragionando si dà di martello in sulle mani; imperciocchè moltiplicando la sua $\frac{6}{m}$ per m da 6; dunque la $\frac{6}{m}$ non può esser mai zero, perchè moltiplicata per m quantità maggior d'ogni data dà per prodotto una quantità finita. È dunque un assurdo il suo pensiero di considerare come fa nella sua opera sopra citata la $\frac{6}{m}$, come zero in comparazione della quantità finita perchè moltiplicata per

m dà una quantità finita, ciò che non può essere quando fosse $\frac{6}{m} = 0$ per l'assioma primo.

Anco la quantità $\frac{6}{m}$ col suo argomento si proverebbe eguale a zero, perchè filosoficamente parlando la m è infinita, e lo è anco per la sua definizione 3.ª Ora l' infinito non è un numero nè piccolo nè grande, come stabilisce nell'assioma primo; dunque per giusto ragionamento non poteva dedurre alcuna conseguenza riguardo alle $\frac{66}{mm}$ e $\frac{6\,C}{mm}$ perchè espressioni non contemplate ne'suoi principii; poichè con ciò sarebbe per esso lui precisamente escire dai proprii principii; e poi credere di riversare sopra di essi le estranee induzioni.

669. Poi ommettendo ogni particolar dettaglio, osserviamo che egli ammette nè più nè meno l'infinitesimo e l'infinito. Ed in ciò fare si scosta da tutti gli antichi, ai principii dei quali sembrerebbe voler ridurre tutte le sue dottrine. Ora gli antichi evitavano l'infinito ed egli lo adopera per dividere il finito! Eglino evitavano di adoperar la minor di ogni data per divider le grandezze finite ed egli se ne permette quest'uso! Essi la derivavano dall'infinita diminuzione, ed egli la deduce dalla nozione del finito, come cosa la più semplice del mondo!

Dopo tutte queste larghezze, e con tante escludentisi ipotesi, è arrivato a crearsi un pasticcio di principii quale qui sopra si leggono.

E quello che eccitar deve in tutti i geometri le meraviglie, è il considerare, che dopo aver apertamente ricono-

sciute ed ammesse le nozioni della infinitesima parte e dell'infinito (nozioni tutte tolte dall'analisi leibniziana) egli pretende sopra di queste fondare le basi di una prova, e prova perentoria contro l'analisi infinitesimale di Leibnitz! Non faremo altri commenti a questo strano miscuglio di principii, per la maggior parte anco svisati ed a queste ancor più inesatte sue illazioni. Chiunque abbia letto il sin qui detto in questa filosofia sarà al caso di ponderarli meglio di noi, e di ravvisarne la inconcludenza loro pienissima.

670. Unicamente ci limiteremo a far una parola delle principali accuse, che questo autore fa al calcolo differenziale, che riduconsi a tre capi principali: la prima consiste che nel calcolo differenziale si trascura la infinitesima; la seconda perchè dalle dottrine del calcolo leibniziano ne verrebbe che la tangente e sottangente sarebbero eguali, il che ripugna; la terza perchè le differenziali di secondo ordine riescirebbero impossibili od assurde come tenta mostrare nelle sue osservazioni.

Per quanto concerne la prima, pare incredibile che tale difficoltà sia uscita dalla bocca di chi dichiara nel corso di tutta la penosa sua opera di trascurare la minor di ogni data, e che effettivamente trascura, e trascura di fatto per aver campo di condurre a fine una quantità delle sue dimostrazioni.

Per la seconda, cioè che la tangente nel triangolo differenziale sarebbe eguale alla sottangente, essa è falsa per due ragioni; una perchè altrettanto si avvera pienamente anco nel suo metodo, delle minori di tutte le date non che in quello dei limiti, delle evanescenti, delle prime ed ultime ragioni, e persino delle derivate; la seconda ragione si è, che l'autore si appoggia ad un falso supposto, perchè non è mai fattibile e molto meno vero che i lati del detto triangolo differenziale si riducono ad essere tutti identici

per aver diritto, per la somiglianza dei triangoli, a considerare identici i lati del triangolo finito a formar li quali vi entrano la tangente e sotto tangente, ed il calcolo differenziale non identifica mai la curva con la retta; nè giova credere che ciò avvenga nel momento che il triangolo differenziale svanisce, perchè lo svanimento è escluso del calcolo differenziale, e poi perchè in allora mancherebbe all' in tutto questo triangolo infinitesimo, e quando sia ridotto ad un sol punto il triangolo non esiste più, ed anzi che esser riuscito di uguali lati, è ridotto ad esser zero; e zero è la tangente, e zero è la sottangente, la secante ecc.

Finalmente, il dire che sono assurde le differenziali seconde, è cosa che fa a' pugni con le dottrine dell'autore, perchè nel num. 668 ha egli moltiplicato la $\frac{6}{m}$ per $\frac{6}{m}$ e quindi ha ammesso una differenziale del secondo ordine o un infinitesimo di secondo ordine? Poi risguardando anco al triangolo differenziale di secondo ordine, questo è sempre simile a quello del primo, perciò ha sempre la possibilità del primo ed il significato del primo, onde la possibilità del primo deve esser comune anco al secondo; finalmente quando la differenziale seconda fosse impossibile, in allora dichiarerebbe impossibile anco le espressioni analitiche del suo lemma decimo più sopra ricordato con la sua dimostrazione.

671. Noi conchiuderemo adunque che questo valente geometra merita compatimento della avversione che provava inverso al calcolo differenziale, perchè quest'ultimo capitava inopportuno mentre stava redigendo e pubblicando la sua analisi degli infiniti, sulla quale aveva consumati molti anni di fatica, e per la quale sperava gloria ed onore; mentre la comparsa del nuovo calcolo dava il tracollo alla sua analisi e la condannava a quel silenzio in cui fino ad ora è rima-

sta, e nel quale secondo ogni verosimiglianza continuerà a giacere perpetuamente.

672. Ci conviene far parola anco di un'altro scrittore di filosofia del calcolo sublime. Questi è il chiarissimo colonnello Caccianino. Egli ha messo alle stampe un'operetta intitolata: — *Meditazioni sul calcolo differenziale*, e ciò nel 1833.

Questo bravissimo geometra fino dall'anno 1825, aveva pubblicato una *esposizione di un principio puramente geometrico del calcolo differenziale* e questo era diretto a togliere ed a sopprimere le oscurità che erano inerenti al calcolo suddetto. Ma per poca salute non potendo dare la dimostrazione accennata, in detta esposizione, cercò in seguito nel 1833 di adempiere alla sua promessa con le succitate meditazioni.

Egli in esse appoggia la nozione delle differenziali all'idea o nozione che presentano le grandezze appropinquantesi al limite, e considerate insino al punto che esse lo abbiano raggiunto, circostanza nella quale hanno luogo i massimi ed i minimi valori delle grandezze e l'annientamento delle grandezze appropinquantisi al limite. Con questa sua maniera di vedere veniva ad ammettere $dx = o$, e $dy = o$, e ciò in modo veramente assoluto, onde considerava la $dx = o$ anzi vero zero come la $dy = o$.

A questa sua maniera di pensare appare che sia stato indotto dallo studio delle dottrine dei limiti, e specialmente da da quello delle evanescenti di Eulero. Non ripeteremo ciò che si è detto di questi metodi tra di loro molto affini, invece unicamente osserveremo che lo stato di verace zero, differenza tra la grandezza ed il limite, par che si scosti troppo dalla verace nozione del limite; e pare anco che sia in grande disarmonia con la pratica costante dei geometri di mettere a calcolo le ragioni della dx con la dy, perchè queste ragioni non si possono più concepire quando le gran-

dezze comparate non hanno più valore, ma sono invece tanti zeri. E cotanto è vero, che Caccianino considerava le differenziali quali veraci zeri, che procura di insegnare, che i geometri trascurando le differenziali o le infinitesime, che esse rappresentano, non trascurano, diceva egli, niente, perchè trascurano dei veraci zeri.

Riguardo al giustificare il suo concetto che dx sia zero, lo appoggia anco all'opiuione di Eulero, dicendo: = *Il nome solo di Eulero basterebbe a far riputare simile obbiezione speciosa soltanto ed insussistente,* e l'obbiezione è che non si possa considerare dx = o. In altro luogo della sullodata opera soggiunge, che = *le differenziali non potrebbero concepirsi diverse dallo zero finchè paragonate fra di loro a due a due non costituiscono che dei simboli di rapporto sotto espressioni tutte equivalenti a quella di* $\frac{0}{0}$; *espressione che esclude assolutamente l'idea di differenza fra loro.* Questo modo di esprimersi commune ad Eulero, ed anco a D'Alembert non regge per le dottrine tutte sin ora esposte, nel discorso fatto da noi risguardante li due metodi. Noi non troviamo parimenti corrispondente a verità, che il triangolo differenztale noto a tutti i geometri, il qual triangolo appunto ha vita dai lati espressi dalla dx e dalla dy che sono le variazioni delle coordinate, questo triangolo, diciamo, possa rappresentare colle variazioni delle coordinate alcun rapporto quando esse sono veramente zero. Similmente non sapremmo fare buon viso a quanto soggiunge, che esistano cioè *espressioni geometriche decrescenti, delle quali è pur forza convenire che l'ultimo termine è zero; sebbene per operazioni successive non possa mai raggiungersi, per cui chiamasi zero limite a differenza di quello che si ottiene nelle progressioni aritmetiche.* In questo luogo in

fatti pare che si appoggi a quell'equivoco che la legge geometrica delle diminuzioni possa in massima od in astratto condurre allo zero, legge della quale parimenti ne abbiamo abbastanza parlato.

Queste a parer nostro sono le principali opnioni del prefato geometra che meritano di esser ben considerate, perchè contengono ed esprimono le sue idee e tutto l'appoggio sul quale egli fonda ed innalza le sue dottrine.

Queste dottrine benchè non contengano veruna sostanziale novità, danno però a divedere che il geometra Caccianino era versatissimo nelle parti più elevate della scienza, e profondamente al possesso di tutte le parti più intime e recondite di essa e che errando, errava col grande Eulero. In queste meditazioni s'incontrano ancora molti altri lumi qua e là sparsi li quali, se la salute glielo avesse acconsentito, avrebbero sparsa molta luce sopra la scienza, e rischiarate molte parti principali del calcolo e avrebbero servito a consolidar meglio le sue opinioni, ed a purificare le sue idee.

673. *La Biblioteca italiana*, giornale che si stampava allora in Milano, riferendo quest' opera, dichiara apertamente: = Non volendo noi entrare in discussioni, ci limiteremo a riportare letteralmente quale sia il principio in discorso =.

Ma questa maniera di parlare tenuta dall' autore dell' articolo riesce di sorpresa; perchè collocata in un giornale periodico il quale erasi assunto l' obbligo preciso di dare un sunto ed una idea chiara ed imparziale di ogni opera che vedesse la luce e specialmente in Italia.

Il non voler dunque entrare in esame, o nell' esposizioni dell'opera, è mancare al dovere assunto dal giornale; tuttavia qual ne sia la cagione di questo contegno, a noi non importa di indagare.

Solamente osserveremo, che trattandosi di giornali sarebbe bene che le loro direzioni si attenessero meglio [illegible]

blighi che assumono, e che dessero (quando sieno al caso) un'idea dell' opere che riferiscono, ma nè di critica, nè di lode, anzi invece facessero puntualmente noto al pubblico tutto ciò che nelle opere è contenuto. E non si continuasse più il brutto contegno di riempire i giornali di articoli, e quasi tutti di critica, anzi che di lode, e nei quali si vede dominare più la smania per parte dell'autore di comparire col suo articolo, piuttosto che dimostrare tutta la buona fede, e si fa vedere più la voglia di sciorinare qualche sua propria sentenza che altro.

I dotti amano sapere tutto quello che esce alla luce per regolarsi nei loro studii, ma non si curano, nè si cureranno mai dei giudizii contenuti negli articoli dei giornali, i quali, non è cosa infrequente, che siano imperfetti, fallaci, e perfino compri, o avvelenati da spirito di parte.

Poco diversamente andò la faccenda riguardo all'articolo riferito e di cui si tratta, all'apparire dell' opera del Caccianino. L'autore dell' articolo spiega poca persuasione circa le opere che parlano della filosofia del calcolo sublime, facendo apertamente conoscere essere nella natura del calcolo sublime delle oscurità irremovibili, e intendendo così indirettamente dichiarare inutili tutti i nobili tentativi dell'uomo per chiarire queste oscurità. Opinione che dopo tutto quello sin qui detto, ognuno può conoscere quanto poca stima essa meriti, e quanto sia erronea; solamente osserveremo che l' autor dell' articolo succitato si permette di far voti, perchè abbandonate le ricerche circa la filosofia del calcolo sublime, si attenda da ognuno a promovere l'analisi delle funzioni analitiche di Lagrange, giuocando sempre sull'equivoco, che queste funzioni contengono piena evidenza, perchè contenenti pura scienza algebrica, mentre si sa, che per ricavare da queste dottrine lagrangiane qualche costrutto, o per renderle atte alla soluzione di qualche problema, è

sempre stato giocoforza fecondare queste analisi algebriche col principio antico della minor di ogni data, principio incomparabilmente più oscuro di quello della infinitesima. Per la qual cosa si vede, che l'autor dell'articolo non sapendo a fondo bene quello che scriveva, riusciva a venderci a prezzi discreti le sue sconvenienze di idee.

Difatti, che sia così, ne abbiamo prova parlante nel vedere l'autor dell'articolo copiando Brunacci e Lagrange, dirci, che le funzioni analitiche considerate come algebra pura, convincono l'animo e soggiungendo che l'evidenza algebrica, accompagna tutti i ragionamenti dell'analisi lagrangiana e tutte le sue applicazioni risguardanti i problemi dell'analisi infinitesimale; asserzioni fallaci, come è provato diffusamente in questa filosofia. Ma intralasciamo di più innanzi proseguire questo nostro cenno risguardante tale strano articolo, chiudendo il nostro dire: insino che altro che parole non appariscono, lasciamo l'autore con la sua opinione, seguitando la nostra, di lui dicendo quello che esso di noi dirà; dando di spalle a questo vanto, e lasciandol soffiare, come vento che vario spira e manco nuoce alla verace filosofia delle matematiche.

674. Per non riuscire prolissi finiremo il nostro esame intorno agli scrittori che han parlato della metafisica del calcolo sublime. Confessiamo di conoscerne ancora molti altri, ma però tali che non sono riusciti bene nello spiegare le alte dottrine di questo calcolo. Tutti però a parer nostro meritano molta lode perchè si sono occupati della filosofia matematica la quale è la parte più nobile e più degna dell'uomo e la parte più capace di promovere la scienza in quelle parti nelle quali essa ne ha maggior bisogno.

Diremo solo che l'equivoco di molti, che non abbiam qui ricordati, generalmente consiste nel confondere la forma esteriore o meccanica del calcolo contenente le differenziali,

con le formole contenenti variazioni indeterminate o finite, equivoco che dal fin qui detto si riduce a confondere i rapporti finiti dei termini delle serie con li rapporti infinitamente grandi, che presentano i termini contenenti infinitesime grandezze.

675. Dal finito non si fa trapasso all'infinito, nè dall'infinito si fa ritorno al finito con mezzi finiti; è dunque sempre un illusione il credere che vi sia passaggio dalle forme finite alle infinite, ed al contrario.

E se nella formola dello sviluppamento della funzione Fx^n tanto quando si pone $F(x + a)^n$, quanto allora che si pone $F(x + dx)^n$, se esiste diciamo nella formola tutta la rassomiglianza del calcolo, questo non è motivo sufficiente, e molto manco fondato in filosofia per darci a credere che queste formole si trasmutino una nell'altra, quando per pura ipotesi non si supponga distrutta nei propri valori e relativi rapporti dei termini, o l'una o l'altra. In ogni forma di sviluppamento devesi sempre ben distiuguere la materiale espressione, dal significato e dal valore che esprime. Nell'ordine del finito quale che sia la forma, i termini si reggono con rapporti finiti; e nell'ordine degli infinitesimi, tutti si reggono con rapporto di valor infinito. Sotto l'aspetto della forma o della costituzione estoriore del calcolo sembrano identici, i termini intanto che nei loro valori sono infinitamente diversi.

Li due binomii $(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} a + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} a^2$ ecc.

$$(x + dx)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} dx + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} x^{n-2} dx^2$$

+ ec. ec., sembrano l'uno nell' altro convertibile, ma per far questo veramente importa di distrugger nel primo lo stato finito per serbare solamente l' altro stato infinitesimo. Questo basti per tutta prova, che una di questa serie non si può far rientrare nell'altra se non spropositando.

676. La filosofia non si prende cura della forma materiale del calcolo, ma tiene unicamente di vista il tipo mentale rappresentato dalla forma sensibile del calcolo; non ha riguardo alle somiglianze sensibili del formato dei termini, le quali sono tutte dipendenti e figlie delle operazioni da noi impiegate ad ottenerli, ma solamente ha riguardo al valore, che noi intendiamo di far rappresentare alla cifra destinata ad esprimere ed a servire di variazione, la quale qui fa le veci del secondo monomio del binomio. Per questo non possiamo convenire col signor Wronski quando, parlando egli delle serie a differenze finite, ove cioè la variazione è indicata dalla usuale caratteristica Φ x, pretende cangiarla in dx, supponendo l' ultima un caso particolare della prima; ritenendo le formole delle serie finite si trasmutino in quelle del calcolo differenziale; ma il geometra di Polonia non vede che l'infinitesimo non è un valore che possa esser considerato come un valor particolare tra quelli che presentar possono le differenze finite; e perciò, anzichè dichiarare possibile il passaggio dalle serie a differenze finite, in quelle delle differenze infinitesime, trovar doveva in queste considerazioni un giusto filosofico motivo di dichiarare incompatibile al tutto questa transizione, anzi sotto questo riguardo impossibile.

677. Per la stessa ragione vanno illusi quelli che han creduto assegnare l'origine e l'andamento del calcolo differenziale deducendolo dalle formole a coefficienti indeterminati, perchè con questi ed altri consimili pensamenti si viene a far palese, che da essi si disconosce tutta la filosofia del

calcolo di cui trattano; atteso, che con tali pretensioni si vengono con troppo scapito della verace filosofia a confondere il materiale formato delle serie, coi veraci principii che servono di base al calcolo differenziale o al calcolo infinitesimale.

Questi ultimi pare che ignorino come i coefficienti tanto determinati quanto quelli che sono indeterminati, che altro poi non sono che le combinazioni cui vanno sottoposti gli elementi della funzione, e segnatamente quelli che dipendono dall'esponente, nulla hanno a che fare coi valori finiti o infiniti, ovvero infinitesimi tanto della funzione che della variazione. Quindi siccome il calcolo differenziale non differisce, in riguardo alle formole cui si appoggia, se non nel valore infinitesimo attribuito alla variazione la quale entra come parte costituitiva nella funzione variata, perciò lo aggirarsi attorno alle formole del calcolo, in ciò che concerne il generale andamento delle sue formole istesse è proprio perdere di vista tutta la filosofia su cui si appoggia e si innalza il calcolo differenziale, è un disconoscerlo da cima a fondo, è un illudersi nella maniera più grossolana, che si sappia immaginare.

678. Insino ad ora col nostro dire ci siamo studiati di schiarire e di spiegare le dottrine sopra delle quali si fondano e si reggono le matematiche, e segnatamente il calcolo differenziale; procuriamo ora di fare un cenno della sorprendente utilità di questo famoso calcolo, considerata succintamente nei soli principii che servono alle applicazioni, o alla soluzione dei problemi di ogni maniera e dei problemi i quali ai metodi anteriori riuscivano in parte inaccessibili od almeno intralciatissimi.

E primamente vuolsi considerare la facilità con la quale data e conosciuta che sia una funzione o equazione a qualunque curva, questa funzione o equazione differenziata

che sia, diviene una funzione od una espressione analitica mista di grandezze finite ed infinitesime.

Col mezzo della differenziazione (la quale consiste poi nel sostituire alla x la x + dx, estendendo secondo vuole l'esponente la funzione della x), l'equazione o la funzione data per la differenziazione viene dilatata ed ampliata nel campo delle posizioni e delle espressioni analitiche, le quali servono poi a determniare l'equazione o la funzione di cui trattasi.

Imperciocchè, un'equazione v. g. ad una curva, essa rimane sviluppata per la differenziazione e le quantità infinitesime incorporate ed accomodate alla natura e proprietà della equazione ne assumono tutte le proprietà di essa. Con ciò l'equazione contiene dei nuovi termini e delle nuove grandezze infinitesime che si prestano ad esser tra di loro comparate, e per esse divengono comparabili ancora le grandezze finite dell'equazione, e nella maniera, la più certa, desiderabile, per la identità dei rapporti tra le infinitesime, con i rapporti delle grandezze finite.

Così in tutte le equazioni alle curve, il triangolo finito che serve a determinare le tangenti, le sottotangenti, ec, è sempre perfettamente simile al triangolo delle differenziali, detto per questo anco triangolo differenziale, nel qual ultimo risultante dalle variazioni, stanno i termini di comparazione anche del primo.

Si deve però notare, che qui con la espressione di comparare non s'intende indicare direttamente la comparazione che concerne le grandezze finite poste a petto delle infinitesime, ma invece di comparare direttamente il rapporto finito delle differenziali con quello finito delle grandezze finite, e più particolarmente il rapporto delle differenziali, delle coordinate, coll'usuale rapporto finito delle medesime ordinate; imperciocchè sebbene si tratti di grandezze finite ed

infinitesime, essendo le une e le altre incorporate nella medesima funzione, e trattate come fossero variazioni d' ogni maniera anch' esse finite, ne viene che presentino rapporti identici tanto le infinitesime tra di loro comparate, quanto le finite tra di loro parimenti comparate, perchè nel variare delle coordinate, si hanno figure infinitesime bensì, ma simili alle figure finite.

Questa identità di figure e di consecutivi rapporti è facile a rinvenirsi in tutte le funzioni analitiche o algoritmiche differenziate, ed è apertissima nelle equazioni alle curve, quando colui che ve la cerca sia discretamente informato ed esercitato nel calcolo e nella proprietà delle curve.

679. La ricerca delle tangenti e sottotangenti, normali ec. alle curve, quella dei massimi e dei minimi valori delle grandezze tanto delle funzioni, che delle grandezze costituenti le equazioni divenne facilissima per mezzo delle differenziazioni, anzi la ricerca di queste cose si appalesò cotanto facile, semplice e cotanto spedita, che destò fino la meraviglia. Il calcolo degli infinitesimi aperse una nuova strada, sparse una nuova luce la quale rischiarò e rese famigliare la determinazione di tutte queste grandezze.

Girolamo Saladino, assai valente geometra, conferma pienamente questa nostra maniera di esprimere questi vantaggi del calcolo differenziale, perchè nelle sue sostituzioni analitiche, opera assai pregiata e per dottrina matematica e per pratiche operazioni, egli scrive: = Hinc orta est methodus directa tangentium, maximorum et minimorum, et ejus generis plures =; ed in questo luogo parla precisamente dell'analisi infinitesimale, e del calcolo differenziale, ed adombra la facilità e semplicità che esso presenta in tutte queste ricerche.

680. Il calcolo differenziale applicato alle funzioni analitiche riesce a meraviglia non già per isvolgere in serie le

funzioni, perchè altrettanto si ottiene con qualsivoglia altra variazione di valor finito, ma per dare allo sviluppamento in serie delle funzioni, un carattere al tutto nuovo, per cui senza errore si può troncare e semplificare lo sviluppamento medesimo, quando ciò torni utile al fine, che ci proponiamo. E quello che più ancora importa si è, che le differenziazioni presentano un tipo e una regola fissa per ritornare dalla funzione variata o dalla variazione alla funzione invariata o funzione primitiva. Queste particolarità sono utilissime perchè feconde di nuove risorse e d'importantissimi trovati.

Tutto questo s'intende di leggeri quando portiamo attenzione alla circostanza, che la variazione incorporata alla funzione o all'equazione, la variazione diciamo, ne assume fedelmente tutto il carattere e le proprietà contenute dalla funzione, e rendendole così replicate, onde poi queste somministrano anco un dato per determinare la proprietà della funzione che viene differenziata.

681. Qui è d'uopo ricordare che in questo genere di ricerche, le quali dipendono dalle funzioni variate per mezzo del valore infinitesimo si appalesa in una maniera manifesta la indefinita utilità dal calcolo differenziale, perchè negli sviluppamenti delle funzioni in serie esprimenti le parti delle funzioni, o i termini tutti, che le costituiscono, riescono successivamente gli uni infinitamente maggiori dei successivi; e questo gran fatto filosofico fà, che dove piaccia al geometra, egli può fermarsi nella serie a quel termine, che più gli aggrada, trascurando tutti i successivi. E siccome in ogni ricerca ciascuno ama appigliarsi alla maggior semplicità possibile, così il geometra nel calcolo differenziale è solito limitarsi al solo secondo termine che contiene la infinitesima del primo ordine quando il bisogno della particolare ricerca, che sta facendo, non lo obblighi ad aver riguardo al secondo od al terzo termine.

Noi non entreremo in minuti dettagli nè in particolari osservazioni circa questo metodo del calcolo differenziale intorno le dottrine cui si appoggia, perchè saremmo costretti riferire lunghi e penosi calcoli, e per altra parte faremmo cosa inutile, giacchè si rinvengono in tutti i libri geometrici o analitici, che parlano e trattano espressamente del calcolo differenziale ed integrale.

682. L'Hôpital nella sua opera denominata: *Analisi degli infinitamente piccoli* esprime nel seguente modo i servigi, che ci procaccia il calcolo differenziale appoggiato al relativo suo principio. = L'analisi ordinaria non tratta, che delle grandezze finite, l'analisi presente penetra sino nello stesso infinito. Essa si pone a comparare tra di loro le differenze infinitamente piccole delle grandezze finite; essa scopre i rapporti di queste differenze, e per mezzo di questi, essa fa conoscere quelli delle grandezze finite, che poste a petto di queste infinitamente piccole si possono avere come altrettanti infiniti. Si può anco dire che questa analisi si estende al di là dell'infinito, perchè essa non si limita alle differenze infinitamente piccole, ma scopre i rapporti delle differenze di queste differenze, e quelli ancora delle differenze terze, quarte, ec. ec, di modo, che questa analisi non solo abbraccia l'infinito, ma l'infinito dell'infinito, o una infinità di infiniti.

Un'analisi di questa natura poteva solo condurci ai veri principii delle linee curve. Perchè le linee curve non essendo che dei poligoni di infiniti lati, e non differendo tra di loro, che per la differenza degli angoli, che questi lati infinitamente piccoli fanno tra di loro, non appartiene che all'analisi degli infinitamente piccoli il determinare la posizione di questi lati per avere la curvatura che essi formano, cioè a dire le tangenti di queste curve, le loro perpendicolari, i loro punti di *inflessione* o di *rigonfiamento,* i raggi che vi

si riflettono, quelli che vi si rompono, ec. ec. I poligoni inscritti e circoscritti alle curve i quali per la loro moltiplicazione infinita dei lati si confondono alla fine con esse curve, sono stati considerati e tenuti in ogni tempo in luogo delle stesse curve. Ma gli antichi geometri si fermarono a questo punto: non fu, che dopo la scoperta della analisi della quale parliamo, che si è conosciuta e sentita tutta la estensione e la fecondità di questa idea.

683. Quello che noi abbiamo degli antichi geometri sopra queste materie, e principalmente di Archimede, è certamente degno di ammirazione. Ma oltre, che essi non hanno avuto riguardo, che ad assai poche curve, ed a queste pure leggermente, tutto il loro sapere si riduce a poche proposizioni particolari ed a dottrine senza ordine. Questo pertanto non forma per essi titolo di accusa, che anzi essi hanno avuto bisogno di una straordinaria forza di ingegno per discernere alcune verità in mezzo ad una grande oscurità, e per penetrare in paesi all'in tutto ignoti e sconosciuti. Se essi non sono andati molto innanzi, se hanno percorso lunghi circuiti, essi però non si sono smarriti, e quanto più le vie da essi battute riuscivano difficili e spinose, più essi sono divenuti ammirabili di averle percorse senza perdersi.

Perciò non deve far sorpresa che gli antichi non siano andati più in là, ma non sapremmo abbastanza far le meraviglie su la loro condotta, cioè che uomini così grandi, come furono gli antichi, siano per sì lungo tempo rimasti in questo stato, e che quelli venuti dopo, compresi da una ammirazione quasi superstiziosa per le loro opere, siansi, dico, contentati di leggerle e di commentarle, senza far altro uso dei loro lumi, senza permettersi di pensare da sè, e senza portare le loro indagini al di là di ciò che gli antichi avevano discoperto.... Descartes, Paschal, Fermat e sopra tutti Barrow coltivarono e promossero la dottrina delle curve,

e delle equazioni e quella dei calcoli ad esse applic[illegible] =
Alla mancanza del calcolo di Barrow, dice Paschal, è venuto opportuno il calcolo di Leibnitz. Questo sapiente geometra ha incominciato ove Barrow e gli altri avevano finito. Il suo calcolo lo ha condotto in paesi sconosciuti per lo avanti, e vi ha fatto scoperte che destarono la sorpresa dei matematici più abili dell'Europa. I signori Bernoulli sono stati li primi che si sono avveduti della bellezza di questo calcolo; essi lo hanno perfezionato ad un punto da vincere delle difficoltà che nessuno aveva mai avuto il coraggio di tentare per lo avanti.

L'estensione di questo calcolo è immensa; egli conviene alle curve meccaniche come alle geometriche; i segni radicali sono indifferenti a questi calcoli, e sono soventi volte comodi ai calcoli istessi. Essi si estendono a tante indeterminate quante si vogliono. La comparazione delle grandezze infinitamente piccole di tutti i generi è egualmente facile. Di quà nacque una infinità sorprendente di scoperte importantissime, riguardo alle tangenti, tanto delle curve, che delle rette, alle quistioni dei massimi e dei minimi valori, ai punti di inflessione di gonfiatura, alle sviluppate, alle caustiche, per riflessione, o per rifrazione =.

684. Paschal ricordato dall'Hôpital nel passo qui arrecato, Paschal diciamo, era uomo di sommo ingegno, e quasi sempre profondo pensatore, ma alcuna volta troppo superficiale e soverchiamente sentenzioso, come lo si vede in questo; imperciocchè, come poteva mai dire che Leibnitz incominciò là dove Barrow avea finito? Barrow aveva ammesso il principio del calcolo differenziale, cioè che una quantità infinitamente piccola considerata in comparazione ad una quantità finita non aveva alcun peso, ed era come se essa fosse zero comparativamente; Barrow ne aveva fatto uso felice nell'applicazione alla ricerca delle proprietà delle curve, e Leibnitz non fece che altrettanto per quanto spetta alla dottrina di queste geo-

metriche speculazioni, dunque non è vero quanto asserisce Paschal nel succitato passo. Egli è bensì vero che le dottrine di Barrow nelle mani di Leibnitz sono divenute più estese, più generali, anzi vi hanno acquistata una indefinita estensione, ma ciò nonostante non si può giammai avere per veritiera la larga asserzione di Paschal, che Leibnitz cioè avesse incominciato ove altri aveva finito. Poi la dottrina di Barrow era forse una scoperta sua propria, onde poterlo considerare, come fa Paschal, quasi un' inventore di essa? Certamente che la dottrina non era sua; perchè adunque considerare in questo suo confronto il solo Barrow, quando egli non riferiva e non ricordava che la pura dottrina di Galilei, dottrina che poi avevano abbracciata e Fermat e Wallis ed altri, e lo stesso Barrow?

Ritornando però alla mirabile utilità del calcolo differenziale, questa non si può qui pienamente riferire senza entrare in dettaglio delle indefinite applicazioni fatte alle grandezze geometriche, meccaniche, alle forze mondiali, idrauliche, ec. ec. Quando ci volessimo internare in queste alte contemplazioni del potere ammirabile della nuova analisi infinitesimale, noi vedremmo come tutti questi rami del sapere siano per forza delli nuovi calcoli in certo modo tratti dall' infanzia in cui giacevano da secoli e secoli, e portati a sì alto grado di perfezione da eccitare la meraviglia. Questi sono i fatti gloriosi dell' analisi sublime. Ma il fare altrettanto ci devierebbe dallo scopo che ci siamo prefissi in questa filosofia; perciò ci basti solo questo cenno; accontentemoci di invitare i geometri che conoscono e posseggono tutti questi meravigliosi trovati, a riandare col loro pensiero alle poche verità meccaniche che si potevano rinvenire colla sola analisi finita e porre questo stato primitivo in compazione della indefinita massa delle verità nuove, discoperte e dimostrate col mezzo della nuova analisi sublime, e questo

solo confronto basterà a renderli convinti al paro di qualsivoglia dimostrazione rigorosa.

Che se più addentro conoscer vogliamo la sorprendente utilità del calcolo differenziale, basta osservare, che il calcolo finito abbraccia le sole leggi finite e costanti, o quelle sole, che variano per salti finiti e costanti, le quali leggi tutte, comparate con quelle che abbracciano tutta la infinita varietà di tutti gli altri mutamenti o variazioni ed in qualsivoglia modo combinate, e su qualsivogiia legge di valori e di variabilità d'ogni maniera, ed allora di leggeri comprenderemo che l'analisi finita benchè mezzo in sè stesso potentissimo ad estendere assai lontane le nostre speculazioni, tuttavia è un mezzo ristrettissimo e aggirantesi in un campo finito, assai limitato, laddove la nuova analisi comprende un campo di una vastità e dimensione quasi senza confini.

685. Ci resterebbe a fare una parola del calcolo integrale, il quale è l'inverso del differenziale, e forma la parte più vasta e la più utile dell'analisi sublime, ma questa parte principalissima, altissima ed utilissima dell'analisi superiore, non contiene però veruna nuova filosofia, la quale direttamente o indirettamente non derivi dal calcolo differenziale. Imperciocchè ognuno sa, che il calcolo differenziale considerato nel suo modo di pratica operazione consiste in questo, che data una qualsivoglia funzione geometrica, analitica, algoritmica, o data qualsivoglia funzione in equazione, trascendente, l'algoritmica, o circolare, il calcolo di cui si tratta, insegna a ritrovarne le variazioni infinitesime di tutte queste funzioni, le variazioni di tutti gli ordini, ed insegna a sceverare tutte le suddette funzioni dalle variazioni, o differenziali loro.

Il calcolo integrale all'opposto insegna a risalire dalle variazioni, siano poi pure o frammiste a quantità finite (e ciò in qualsivoglia modo, ordine e combinazione quale si

addice alla costituzione o stato primitivo della funzione) insegna, diciamo, a risalire da queste variazioni infinitesime alle funzioni dalle quali sono derivate per mezzo del calcolo differenziale; perciò il calcolo integrale ci presenta due distinti aspetti di intellettuale veduta; uno è quello che appoggiandosi alle sole variazioni, le considera come le sole valutabili e significanti, e allora si appoggia intieramente alle leggi ed alle dottrine del principio del calcolo differenziale; l'altro si è quello che considera il calcolo integrale come sommatore di tutti gli elementi infinitesimi nei quali si suppone come idealmente risoluta e quindi composta ogni funzione di qualsivoglia natura, e sotto questo secondo riguardo, esso si fonda nella doppia idea dell'infinitesimo e della infinità dell'infinito numero, ovvero si appoggia all'infinito ed all'infinitesimo.

Considerato poi il calcolo integrale in riguardo alla di lui utilità, o in riguardo alle sue pratiche ricerche di finale risultamento, queste ricerche possono esser prese parimenti sotto due diversi aspetti; uno è quello comunemente inteso dai primi inventori e cultori di questo calcolo, i quali credettero, che nel risalire dalla differenziale alla quantità finita, si sommassero, e in certo qual modo si riunissero insieme le infinite sue infinitesime particelle, tutte omogenee, e delle quali la differenziale appunto ne esprimeva una distinta: e supponevano che tutte queste differenziali o infinitesime particelle concorressero così riunite a riprodurre bella e rifatta la grandezza finita, che idealmente si era supposta risoluta in infinitesime parti espresse dal calcolo differenziale applicato alle funzioni. Questa maniera di considerare il calcolo integrale, di cui parliamo lo ha fatto denominare dai primi inventori calcolo sommatore, e con vocabolo proprio calcolo *sommatorio*, o *integrale*.

Sotto l'altro aspetto considerato il calcolo integrale,

come un semplice artificiale metodo diretto a guidarci dalle infinitesime o dalle variazioni infinitesime alla cognizione della funzione finita della quale mentalmente si suppone derivata la differenziale, e sotto questo riguardo si presenta un semplice artificio di calcolo, comune anco ad altri rami dell'analisi; perciò si può considerare come calcolo analitico. Tuttavia, preso anco sotto quest'ultimo aspetto fu sempre e lo è tuttora denominato calcolo integrale, e l'operazione con cui si risale dalla differenziale alla funzione primitiva finita si è sempre appellata, e si chiama tuttora *integrazione* o *calcolo sommatorio.*

686. Tanto considerato sotto il primo aspetto, quanto preso di veduta sotto del secondo, il calcolo è sempre uno, e tutte le operazioni impiegate dai geometri per risalire dalla differenziale alla sua funzione finita sono sempre le stesse identiche.

Per procurare di formarsi e in un modo generale una chiara idea della operazione analitica appellata *integrazione* ci convien notare, che i geometri la desumono e la fondano sopra l'operazione inversa di quella chiamata *differenziazione*; e per parlare con più di precisione e di esattezza, la integrazione è una operazione, che si appoggia sopra la attenta considerazione di ciò che è avvenuto alla funzione in causa della differenziazione cui è stata sottoposta, e ciò per procacciarsi in questa considerazione i dati o i mezzi per risalire dalle differenziali alle funzioni variabili finite. Dalla contemplazione adunque della funzione differenziata e di quella delle consecutive sue differenziali o variazioni desumono questa maniera di calcolo integrale, la quale ha sempre per iscopo di guidare il geometra dalla differenziale alla funzione, dalla quale la differenziale è derivata. Di fatti, ogni data e concreta funzione finita di qualsivoglia denominazione essa sia, non può avere che una determinata forma od espres-

sione di differenziale tutta propria e rispondente alla sua forma o modo di essere atteso che nella differenziazione la infinitesima che ne esprime la sua variazione, si incorpora nella funzione e partecipa pienamente alle proprietà di questa, ovvero si adatta compiutamente alla natura, stato e condizione della funzione, e ne esprime perciò fedelmente le sue particolari proprietà.

687. Questa maniera di considerazione, che i geometri si procacciano sopra queste basi, onde aver in mano un mezzo positivo e sicuro di risalire dalla variazione o dalla differenziazione alla grandezza da cui è derivata, è una maniera di considerazione affatto simile a quella che si preparano gli algebristi quando attentamente studiano i tipi delle potenze delle grandezze finite per rinvenire o ritrovare in essi le regole della decomposizione delle potenze medesime, o ciò che è lo stesso, per istruirsi del modo di ritornare dalle potenze alle quantità prime, che furono innalzate a potenza con una operazione da essi chiamata estrazione di radice.

I geometri algebristi pigliano in considerazione le funzioni algebriche finite, tanto elevate ad esponente intiero quanto ad esponente fratto, e per dir breve si pongono a considerare le funzioni tutte algebriche di ogni maniera, ed anco trascendentali, circolari, logaritmiche, ec. ec.

I geometri all'invece che si appigliano alle integrazioni delle differenziali fanno presso a poco lo stesso degli algebristi, cioè si collocano innanzi come in diverse categorie distinte tutte le funzioni monomie, binomie, poligonomie, ec. ec. tanto semplici che composte, e combinate in tutte le possibili maniere, e per riguardo alla natura loro ed al loro stato, ec. ec; e di queste funzioni ne pigliano le differenziazioni, indi le differenziali pure o miste, e da questa ben ordinata disposizione di funzioni e dalle corrispondenti loro differenziali ne desumono, per quanto è concesso all'uomo

od all' ingegno umano, le regole di retrocessione, cioè le regole per ritornare dalla variazione alla grandezza variabile finita da cui è derivata la variazione. Osservazioni sono queste che somministrano dati importantissimi e prototipi di integrazioni esatte. Queste osservazioni contengono tutto quello che sappiamo intorno alle intergrazioni.

Un' altra particolarità importantissima deve qui essere notata, cioè quella che nel differenziare, che noi facciamo di tutte le note funzioni (onde averne le loro differenziali) noi ci procuriamo sempre delle differenziali compiute ed esatte di queste funzioni; come quando noi eleviamo una quantità a potenza, noi ne otteniamo una potenza esatta e compiuta della grandezza propostaci; così avviene sempre delle nostre differenziali; ora siccome queste sono gli unici dati o prototipi che abbiamo in mano per risalire dalle differenziali alle grandezze da cui derivano, ne viene che avendo noi in questi dati solamente delle differenziali esatte e compiute, per prototipi, per ciò noi non abbiamo in mano che delle differenziali esatte per venire in cognizione delle grandezze finite dalle quali esse sono derivate; quindi ne viene, che solamente allora possiamo integrare, quando le differenziali sono esatte e compiute. Circostanza di una suprema importanza, la quale ci manifesta quali e quanti siano i dati che noi possiamo avere in mano per integrare.

La comparazione delle differenziali, che abbiamo in mano, considerate tanto nella loro forma, quanto nella loro proprietà, costituiscono adunque il dato per conoscere se le funzioni differenziali contengano quanto abbisogna per integrarle, o ciò che è lo stesso quanto occorre per potere effettuarne la loro integrazione. Queste dottrine comparative sono dai geometri indicate sotto il nome di criterii di integrabilità.

Quando noi ritorniamo dalla differenziale esatta alla funzione primitiva, noi dall'infinitesimo argomentiamo e ritornia-

mo al finito, e così adoperando, noi in ultimo risultamento veniamo ad aver in mano la somma infinita di tutte le particelle infinitesime, somma rigorosamente rappresentata sempre dalla funzione finita, che siamo arrivati a conoscere. Tuttavia per fare questa analitica operazione, noi non abbiamo nessun bisogno di tener dietro col nostro pensiero alla infinità delle particelle infinitesime infinite, contenute nella grandezza finita, il calcolo istesso che adoperiamo non s'appoggia per verun conto sopra questa infinità, ma unicamente si fonda sopra la considerazione dell'effetto che la variazione infinitesima ha prodotto sopra la funzione finita differenziata; poichè tolto di mezzo questo effetto, si torna a riavere intiera la grandezza finita. Sebbene adunque implicitamente si riabbia la infinità degli elementi ideali infinitesimi, tuttavia non si ha riguardo alcuno esplicito ad essi. Quindi nel calcolo integrale non si trascura cosa veruna, nè dell'ordine finito, nè dell'ordine infinitesimo; onde ne viene che quelli i quali credono che nel calcolo vi sia compenso di errori, vanno assai lungi dal vero.

Noi vediamo i fautori delle funzioni analitiche menar rumore della loro maniera di integrare, maniera indipendente da ogni considerazione delle infinitesime particelle, ma il loro trionfo perde ogni pregio di novità se attentamente vorranno considerare che essi così adoperando, non fanno nè più nè meno di quello che fanno tutti i seguaci ed i fautori del calcolo differenziale. Diffatti ponendo occhio ad una funzione di $Ax^m + B$, si vede che la sua differenziale è $m\,A\,x^{m-1}\,dx$, ed il suo integrale ritorna $A\,x^m + B$. Così se fosse la funzione finita $\frac{a\,x^{n+1}}{n+1} + B$, differenziata sarà $ax^n\,dx$ da cui se ne deriva di nuovo $\frac{a^{n+1}}{n+1}$; onde i geo-

metri stabiliscono per regola analitica che: *per integrare la differenziale astratta monomia* $ax^n dx$, *fa duopo accrescere l'esponente della variabile, contenuta nella funzione, di una unità, poi dividerla pel nuovo esponente, e per* dx. In fatti applicando materialmente questa regola al caso propostoci si ha appunto l'integrale della differenziale proposta $ax^n dx$; di vero accresciuto l'esponente della x unica variabile contenuta in questa differenziale diviene $ax^{n+1} dx$; poi dividendola pel nuovo esponente $n+1$, si ha $\frac{a^{n+1}}{n+1}dx$, e finalmente dividendola per dx si ha $\frac{ax^{n+1}}{n+1}$, come prima, cioè la funzione finita propostaci.

688. Non proseguiremo più innanzi questi pochi cenni intorno alla natura ed al fondamento del calcolo integrale, quale calcolo inverso del differenziale; perchè tutti i libri che trattano del calcolo integrale ne espongono con chiarezza e bell'ordine, non che con sufficiente corredo di dottrine e di pratici esempii tutto ciò che si può desiderare in proposito.

Diremo solamente ed anco solo in modo generale astratto, che ogni grandezza di sua natura variabile (o per atto di nostro volontario pensamento considerata come tale) può sempre e con tutta facilità esser differenziata, e ritornando sui propri passi può anco in massima esser integrata. Ma queste cose che in generale sono subito dette e prestamente intese, quante difficoltà non presentano nella pratica, per parte specialmente dell'integrare? Così, chi dice v. g. che ogni funzioue o grandezza può esser elevata a qualsivoglia potenza nell'ordine finito, dice una cosa che qualunqne geometra anco poco versato nell'analisi è al caso di eseguire, eppure quante difficoltà non si incontrano per estrarne la radice? Persino nella stessa analisi finita, chi è capace di ritornare da qualsivoglia grandezza considerata come potenza

alla sua radice prima? Tutti gli sforzi dei geometri non giungono ad estrarre che le radici delle equazioni che arrivano al quarto grado. Ad estrarre le radici delle equazioni de-gradi superiori al quarto, niuno può ancora arrivare. Oltre a questa difficoltà nascente e derivante e dalla complicazione delle radici e loro funzioni, se quella anco si aggiunge dell'esser le potenze non perfette e non compiute, in allora ognuno intende come le difficoltà si accrescano senza misura. E tutto questo, benchè già molto, non basta a dare una adequata idea della limitazione delle forze dell'ingegno umano, imperciocchè persino incominciando dalle equazioni del secondo grado nell'algebra comune, noi non siamo capaci di darne rigorosa soluzione, ma si ottiene radice indeterminata riguardo la seconda potenza costituente la radice di secondo grado. Quando poi la potenza seconda non è perfetta, allora non si può estrarre la radice se non si compie il quadrato. Nell'analisi finita ordinaria, l'alto grado delle potenze, egualmente che la imperfetta potenza sono due ostacoli insuparabili per risolvere le equazioni; così nell'analisi sublime le differenziali imperfette, o l'alto ordine di esse divengono e possono sempre diventare difficoltà insuperabili per la integrazione.

Esiste pure nel calcolo integrale un'altra difficoltà, ed è quella che proviene dalle grandezze costanti, aggiunte o sottratte alle funzioni variabili, perchè queste costanti dispajono quando prendiamo la sola differenziale della funzione. E perchè qui non si alluda ad un genere di quantità dette costanti, delle quali fin'ora in questa filosofia non fu fatto alcun cenno, diremo che i geometri nel calcolo superiore distinguono le quantità, in *variabili* ed in *costanti*, le variabili sono da essi indicate con le ultime lettere dell'alfabetto, cioè segnano le quantità variabili, con quelle stesse lettere con le quali gli algebristi indicano le quantita incognite, e

con le altre lettere dell' alfabeto soglion esprimere delle quantità costanti, cioè non sottoposte per convenzione a veruna variazione.

Ora, siccome la differenziazione si appoggia per necessità di posizione alla variazione infinitamente piccola delle grandezze variabili, ne viene per conseguenza, che in ogni operazione analitica di differenziazione le quantità costanti non mutano menomamente stato, ma rimangono nel primitivo stato loro; onde si vede, che quando vogliano sapere a che si riduca la pura differenziale di una data funzione, allora si usa levare dalla funzione differenziata la funzione primitiva, e quindi non resta di essa che la differenziale pura; dal che ne viene che le costanti aggiunte o sottratte spariscono dalla differenziale.

Queste cose si intenderanno meglio arrecando un esempio: sia v. g. proposta la $F(x \pm a)$, questa funzione differenziata diviene $F(x \pm a + dx)$. Ora, pigliando la sola differenziale, avremo $F(x \pm a + dx) - F(x \pm a) = dx$. Si osservi che lo stesso risultamento si sarebbe ottenuto quando la funzione fosse stata solamente $F(x)$; poichè differenziata avrebbe dato $F(x + dx)$, e la sola differenziale sarebbe stata $F(x + dx) - F(x) = dx$.

Tutti gli scrittori di calcolo integrale parlano dichiaramente di questa particolarità, la quale non può esser sorpassata in nessun discorso risguardante il calcolo integrale, e molto meno poi in chi sarebbe in dovere di farne conoscere la filosofia.

Questa particolarità importa che pel geometra cui viene proposto di trovare l'integrale di una differenziale data dx egli non può mai sapere nè stabilire se la funzione primitiva fosse x ovvero $x \pm a \pm c$ ec.

Di qua ne viene, che sebbene il geometra sguardando attentamente la dx possa conchiuderne con certezza che essa

indica la variazione della x, e perciò integrando possa e debba avere la x, tuttavia pensando, che la sua dx può derivare tanto da x ± a ± 6 ± c ec. ec. quanto dalla sola x, senza nessuna costante; perciò non può, stando alla sola differenziale, sapere se la funzione primitiva fosse x ovvero x ± a ec. quindi è, che nel presentare l'integrazione, ovvero l'integrale d quale si suole indicare ancora col segno $\int$, o segno somma si usa scrivere $\int dx = x \pm C$, indicando per C una o più costanti che potevano esser aggiunte o sottratte dalla funzione primitiva x.

Questa costante C rimane in istato indeterminato tanto circa la sua esistenza, quanto riguardo al suo valore, come pure circa lo stato positivo o negativo. Le condizioni della funzione, il di lei stato, non che le condizioni delle questioni analitiche, sono altrettanti dati, che sono in mano del geometra per determinare, quando si possa, la C. Però nelle astratte espressioni di calcolo integrale questa C rimane sempre appieno indeterminata.

Siccome però tanto i mezzi che sono in mano del geometra, sia per ammettere la C, sia per determinare il valore o il segno più o meno, non inchiudono veruna nuova filosofia, ma all'invece si riducono tutti questi mezzi a ingegnosi artificii analitici, così noi ci dispenseremo dal parlarne di più in questa filosofia.

690. Una delle più grandi difficoltà nelle quali si abbatte il geometra che imprende una integrazione è quella dello stato incompleto delle differenziali, poichè da questo non si sa come si possa risalire alla verace primitiva funzione od al verace integrale. Quindi è che i geometri ricorrono in questi casi a mille diverse ingegnose speculazioni, le quali tutte hanno per iscopo o per fine di ridurre le differenziali incomplete allo stato di differenziali esatte o compiute, nel quale stato somministrano anco il dato od il mezzo di ottenerne il loro integrale.

In queste ricerche dilicate noi vediamo i geometri tentare tutte le vie più recondite, appigliarsi alle più sagaci invenzioni che siano possibili all'ingegno umano; quindi ora hanno ricorso alle semplificazioni delle differenziali, o delle funzioni differenziali, ora allo spartimento di esse, ora allo sviluppamento in serie; quando si fanno a separare le funzioni composte, cercando ridurle alla semplicità maggiore che possono; e per dir breve, essi non hanno lasciata intentata ogni analitica risorsa, ogni più ingegnosa e perspicace maniera per arrivare al bramato fine di rendere integrabili le proposte funzioni differenziali.

690. Tutte queste ingegnosissime ed artificiate investigazioni dirette a rendere integrabili le funzioni differenziali si trovano diffusamente esposte nelle opere di Leibnitz, de' fratelli Bernoulli, di Bourgenville, di Eulero, Lafontaine, Riccati, Saladini, d'Alembert, Condorcet, Lagrange, Laplace, Lacroix, Paoli, les sieur Jacquier, Chauchy ed altri. Siccome però tutto questo gran cumulo di risorse e di preparazioni si riducono ad analitici trovati, ed a perspicaci invenzioni ed a risorse di calcolo, senza che presentino un corredo di particolari e separate filosofiche dottrine, perciò non possono avere nella filosofia che andiamo esponendo, un posto diretto ed importante.

In questo genere di ricerche dell'analisi sublime, le più importanti di quante ne possegga la geometria e le più utili nella soluzione dei problemi, i matematici che trattano del calcolo integrale si ritrovano in una circostanza e posizione molto simile a quella nella quale sono gli algebristi, quando si accingono alla soluzione dei problemi algebrici complicatissimi, difficilissimi e soventi volte di impossibile risoluzione: come appunto sono alcune equazioni indeterminate, o quelle comuni di grado superiore al quarto, ec. ec.

Non ignoriamo che Wronski in una sua operetta stam-

pata nel 1812 in Parigi, e dedicata alla Polonia, sua patria, asserisce di aver rinvenuto la generale soluzione delle equazioni di tutti i gradi; siccome però il voler tentare un esame di questo scritto per approvarlo o per contradirlo esigerebbe una seria discussione sopra le dottrine delle equazioni algebriche, e questa ci forvierebbe dalla nostra filosofia, perciò ci asterremo dal farne parola. Diremo invece che i geometri, che tentano delle difficili integrazioni hanno pochi tipi e pochi dati certi per risalire dalle differenziali alle primitive loro funzioni. Tutte queste difficoltà si aumentano allorchè le differenziali sono quelle di molte variabili riunite in una sola funzione, o contenute in una funzione od in una sola equazione.

Gli è per questo, che secondo i diversi casi noi li vediamo, come è detto, ora separare le differenziali le une dalle altre, ora tentare tutti i mezzi per renderle complete quando siano imperfette, quando trasmutarle, quando moltiplicarle con opportuni fattori, quando spezzarle in parti, e quando ridurle in serie, od introdurvi nuove variabili indeterminate, ec. ec. Ed in queste sottilissime ingegnose indagini, niuno forse ha pareggiato e molto meno superato il grande geometra Eulero ed i sommi geometri Lagrange e Laplace, ec, i quali nelle loro opere ci presentano tante e sì importanti risorse, e tante e sì nuove vedute da destare veramente la ammirazione dei dotti.

692. Il calcolo integrale per ciò che riguarda le sue fondamentali dottrine, pare che non possa cangiare d'aspetto; in quanto poi concerne la di lui perfezione, lascia aperto ancora ai geometri un vastissimo campo, ove essi possono cogliere nuove palme e nuovi allori. Dall'epoca della sua nascita insino ai nostri giorni ha fatto passi da gigante, ma non è, e forse non sarà mai compiuto.

Le opere dei geometri ricordati nel paragrafo prece-

dente fanno conoscere il campo percorso nel calcolo integrale, additano in quali parti sia ancora imperfetto, e se a tutti i lumi dati da essi, potessimo aggiungere ancora quanto resta da farsi e determinarsi nel medesimo calcolo, e ciò circa le parti risguardanti le forze mondiali, meccaniche, idrauliche, calorifiche, elastiche, ec. ec. cioè circa la soluzione dei grandiosi problemi naturali ancora insoluti, noi verremmo a comprendere quanto manchi ancora al pieno perfezionamento del calcolo integrale.

693. Prima di abbandonare questo ragionamento filosofico intorno ai principii sopra dei quali si fondano le matematiche, dobbiamo far parola di una dimanda la quale naturalmente nasce in animo di chi legge, e la dimanda è questa: perchè nell' esporre la filosofia delle matematiche non abbiamo parlato che dei principii e non delle singole parti di esse?

Alla qual domanda, noi intendiamo dare soddisfazione, dicendo: che noi nell'esporre la filosofia delle matematiche abbiam creduto di non attenerci che a quella filosofia che si contiene e domina nelle basi o nei principii delle stesse; perchè questa sola è la vera filosofia di tutta la scienza, laddove i dettagli delle singole parti di essa non hanno, che una filosofia derivata dalle basi assunte, e sopra delle quali si aggirano. Quindi tornato sarebbe a ripetizione ed a vizioso ragionamento questo particolare minuto esame.

Più riandando parte a parte li singoli rami delle matematiche avremmo dovuto riferire tutti i principali calcoli, tutte almeno le fondamentali formole, e così condurre per le lunghe il ragionamento senza nuovo profitto di sapere, anzi soventi volte con digressioni all'in tutto estranee alla filosofia principale delle matematiche; come pure ci saremmo soventi volte trovati nel bisogno di ripetere spesse fiate le stesse dottrine e usare degli stessi ragionamenti.

Una cosa sola ci permettiamo adunque ancora di aggiungere ed è, che alcuni leggendo quest'opera un poco alla buona potranno facilmente darsi a credere che vi siano in essa alcune ripetizioni le quali si sarebbero dovuto schivare, ma a nostra giustificazione diremo, che leggendo attentamente quelle poche parti ove sono di queste apparenti ripetizioni, comprenderanno, che le dottrine medesime sono bensì più volte riprese ma però sempre con nuovi ed interessanti sviluppamenti, e questo ci ha servito a maggior chiarezza e semplicità di ragionamento; atteso che adoperando diversamente ci sarebbe stato giuocoforza affastellare ed accumulare delle idee che meritavano un posto separato per ottenere e dispiegare la importanza che meritano.

INDICE

CAPITOLO PRIMO.

CAPITOLO SECONDO.

CAPITOLO TERZO.

CAPITOLO QUARTO.

CAPITOLO QUINTO.

CAPITOLO QUINTO (per errore di stampa replicato).

Aritmetica.

Algebra.

CAPITOLO SESTO.

CAPITOLO SETTIMO.

FINE.

Pag.	lin.	ERRATA.	CORRIGE.
43	22	supporre cose che	supporre che
63	4	$1 = \frac{\infty - 1}{\infty} + \frac{\infty - 1}{\infty^4} + e \ldots$	$1 = \frac{\infty - 1}{\infty} + \frac{\infty - 1}{\infty^2} + \frac{\infty - 1}{\infty^3} + \ldots + \frac{\infty - 1}{\infty^\infty}$
67	3	$1 = \frac{1}{\infty}$	$1 - \frac{1}{\infty}$
86	33	Pteraque	Pleraque
94	30	vi sono messa slanci.	vi sono in essa slanci
97	8	anasisi	analisi
109	22	con le grandezze finite	le grandezze finite.
125	5	diminui possiut	diminui possint.
125	20	exloctatam	exoptatam
126	7	fatheri	fateri
150	12	poi poichè	poichè
151	19	ogni uno conosce	ognuno conosce
153	4	si introduca	introducono
159	23	Ogni qual che	ogni qual volta che
160	22	dalla	della
182	14	desumerlo	desumerla
183	8	e denunciate	ed enonciate
197	9	possa	passa
200	18	vigore	rigore
285	17	cercare	cerca
297	11	si vuol	ci vuol
299	13	ancienne	anciennes
313	28	$jx - Fx = o$	$fx - Fx = o$
320	32	stirati	stipati
345	29	nell'aggettivo	nell' oggettivo
375	24	al	il
412	27	dai	dei
428	17	$x^{n - n}$	x^{n-1}
430	31	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot Fw^{n-2}$	$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot F_\infty^{n-2}$
438	19	A, P,	A, Q,
464	29	della	dalla
467	25	propongono	propongano